ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

«СОЛИТОНЫ В МОДЕЛЯХ НЕСКОЛЬКИХ ПОЛЕЙ»

Выполнил студент
443 группы
Маслов Василий Евгеньевич

(подпись студента)

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор,
академик Рубаков В.А.

(подпись научного руководителя)

Научный консультант:
кандидат физ.-мат.наук
Нугаев Э.Я.

Допущен к защите 26.05.2017
Зав. кафедрой

(подпись зав.кафедрой)

Москва
2017

Оглавление

Введение

В теории поля есть солитоны — классические решения полевых уравнений с локализованной плотностью энергии. В моделях физики высоких энергий солитоны описывают квазиклассические частицеподобные состояния с большой массой, имеющие релятивистский закон дисперсии [1], [2], [3].

В физике конденсированного состояния они соответствуют непертурбативным возмущениям изучаемой системы, структура которых может быть изучена экспериментально. При этом размерность изучаемой модели физики конденсированного состояния может быть равна 1, 2 или 3 — в зависимости от количества независимых направлений, по которым могут распространяться низкоэнергетические возмущения.

В данной работе мы изучаем статические солитоны в общей модели N скалярных полей φ_i с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_i\,\partial^\mu\varphi_i - V\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_N\right)\,. \tag{1}$$

Ключевым замечанием данной работы является то, что статические уравнения для поля в этой модели

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2} = \frac{\partial V\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_N\right)}{\partial\varphi_i}\,, \qquad i = 1\ldots N \tag{2}$$

совпадают с уравнениями движения N-мерной механической системы с потенциалом $V_{mech} = -V$:

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} = -\frac{\partial V_{mech}(z_1, \ldots, z_N)}{\partial z_i}\,, \tag{3}$$

где координате x в механической аналогии соответствует время t, полям φ_i — координаты z_i.

Аналогия (2), (3) показывает существование принципиального различия между солитонными решениями в модели одного поля и в моделях нескольких полей. Действительно, движение одномерных механических систем всегда является интегрируемым благодаря закону сохранения энергии. Многомерные механические уравнения в общем случае интегрируемыми не являются, и в них возможен динамический хаос - качественное изменение движения системы при инфинитиземльном изменении начальных данных. Так как статические полевые решения подчиняются тем же уравнениям, то однополевые солитоны тоже являются интегрируемыми, в многополевых системах возможны решения, соответствующие динамическому хаосу в механической аналогии. Изучение таких решений и является главной задачей этой работы.

Существует два типа моделей с неинтегрируемыми статическими уравнениями:

1. Несколько взаимодействующих полей

2. Одно поле, находящееся во внешнем потенциале

Покажем, что модель с несколькими взаимодействующими полями в некотором случае аналогична модели с одним полем и с внешним воздействием. Для простоты рассмотрим модель двух полей φ_1, φ_2 с классическим действием:

$$S = AS_1[\varphi_1] + S_2[\varphi_1, \varphi_2]\,, \tag{4}$$

где $A \gg 1$ - константа теории. Варьируя по φ_1 и φ_2, получим уравнения поля:

$$\frac{\delta S_1}{\delta \varphi_1} = A\,\frac{\delta S_1[\varphi_1]}{\delta \varphi_1} + \frac{\delta S_2[\varphi_1, \varphi_2]}{\delta \varphi_1} = 0\,, \tag{5}$$

$$\frac{\delta S_2}{\delta \varphi_2} = \frac{\delta S_2[\varphi_1, \varphi_2]}{\delta \varphi_2} = 0\,. \tag{6}$$

Разделив (5) на A, получим:

$$\frac{\delta S_1}{\delta \varphi_1} = \frac{\delta S_1[\varphi_1]}{\delta \varphi_1} + \frac{1}{A}\frac{\delta S_2[\varphi_1, \varphi_2]}{\delta \varphi_1} = 0\,. \tag{7}$$

Случай $A \gg 1$ соответствует $E_1 \gg E_2$, поскольку энергия поля φ_1 пропорциональна A, а энергия φ_2 - не зависит от A. Пренебрегая членом порядка $\frac{1}{A}$ в (7), получим систему уравнений:

$$\frac{\delta S_1[\varphi_1]}{\delta \varphi_1} = 0\,, \tag{8}$$

$$\frac{\delta S_2[\varphi_1, \varphi_2]}{\delta \varphi_2} = 0\,. \tag{9}$$

Мы видим, что при $A \gg 1$ поле φ_1 эволюционирует независимо от φ_2, а поле φ_2 находится в заданном внешнем поле φ_1. Мы получили модель поля φ_2, находящегося под внешним воздействием, как предельный случай двух взаимодействующих полей.

Случай двух взаимодействующих полей с потенциалом вида φ^4, а также более общего вида φ^n, $n \geqslant 3$, рассмотрен в Приложении А. Показано, что хотя статические многосолитонные решения существуют, они нестабильны. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай одного поля под внешним воздействием, но в потенциале с большим числом вакуумов, между которыми могут наблюдаться солитоны.

Примером такого потенциала является потенциал «синус-Гордон»: [1], [2], [3]:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + (\cos\varphi - 1)\,. \tag{10}$$

Этот потенциал встречается и в физике конденсированного состояния вещества. Например, система двух взаимодействующих одномерных бозе-конденсатов с волновыми функциями φ_1 и φ_2 описывается [4] гамильтонианом

$$H = \sum_{j=1}^{2} \int dx \left[\frac{1}{2m}\frac{\partial \psi_j^\dagger}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{g}{2}\psi_j^\dagger \psi_j^\dagger \psi_j \psi_j + (V(x) - \mu)\psi_j^\dagger \psi_j\right] - J\int dx \left[\psi_1^\dagger \psi_2 + \psi_2^\dagger \psi_1\right]\,, \tag{11}$$

где m - атомная масса, g - эффективная сила взаимодействия атомов в одном конденсате, $V(x)$ - потенциал захвата электронов, μ - химический потенциал, J - константа связи двух систем, $\hbar = 1$.

В пределе низких энергий модули волновых функций примерно одинаковы, и можно записать [5]: $\psi_m(z) = \exp[i\theta_m(z)]\sqrt{n_{1D}}$, $m = 1, 2$. Вводя симметричные и антисимметричные фазы $\varphi_a(z) = \theta_1(z) - \theta_2(z)$, $\varphi_s(z) = (\theta_1(z) + \theta_2(z))/2$, получим:

$$H = \int dz \left[\frac{n_{1D}}{4m}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\right)^2 - 2Jn_{1D}\cos\varphi_a + \frac{n_{1D}}{4m}\left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial z}\right)^2\right]\,, \tag{12}$$

что соответствует гамильтониану модели (10) для поля φ_a. Таким образом, всё дальнейшее справедливо, в частности, и для системы двух взаимодействующих бозе-конденсатов, находящихся под внешним воздействием.

Глава 1

Постановка задачи

Далее мы будем рассматривать модель (10) в статическом внешнем потенциале, который для простоты запишем в виде ряда δ-функций:

$$S_2 = \int d^2x \, \mathcal{L} = \int d^2x \, \left(\frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + (\cos\varphi - 1) - \varepsilon\varphi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \, \delta(x - nD) \right) . \tag{1.1}$$

В данной модели найдём хаотические солитоноподобные решения и исследуем их.

Уравнение на статические решения этой модели имеет вид, аналогичный уравнению физического маятника, на который действует внешняя сила:

$$\varphi'' = \sin\varphi + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(x - nD) \, , \tag{1.2}$$

где штрих означает производную по координате, а поле φ имеет смысл угла отклонения маятника от верхнего (нестабильного) положения. Полученное дифференциальное уравнение будем исследовать с помощью теории возмущений по параметру ε.

Глава 2

Статические решения в модели «синус-Гордон»

Рассмотрим модель (10). Статические уравнения поля в этом случае аналогичны уравнению классической механики: $\ddot{y} = \sin y$, где $y \equiv \varphi$, $t \equiv x$. Гамильтониан соответствующей механической системы есть:

$$H = \frac{\dot{y}^2}{2} + \cos y \,. \tag{2.1}$$

Это — уравнение математического маятника, где y - угол, который отсчитывается от наивысшего положения маятника. Существенно отличаются два случая: случай осцилляций маятника (при $-1 \leqslant H < 1$) и случай вращения (при $H > 1$), см. Рис. 2.1. Мы получим решения уравнения движения отдельно в каждом из случаев.

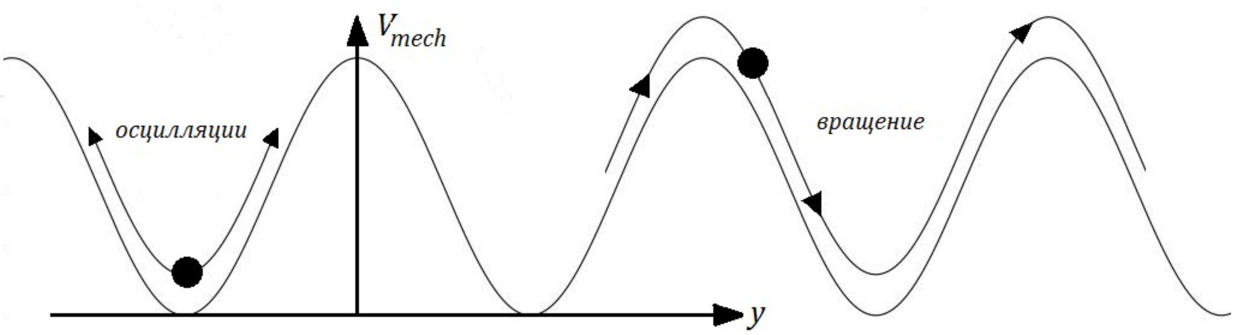

Рис. 2.1: Случаи движения маятника: осцилляции (слева) и вращение (справа)

2.1 Случай осцилляций

Пусть $H < 1$. Введем, следуя [6], удобные переменные:

$$\cos\frac{y}{2} = k \sin\psi, \qquad k = \sqrt{\frac{H+1}{2}} \,. \tag{2.2}$$

Отметим, что в данном случае $k < 1$. Тогда, дифференцируя (2.2), получим:

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{y}\,\sin\frac{y}{2}}{k\,\cos\psi} \,. \tag{2.3}$$

Отсюда, с учетом (2.1), получаем уравнение на $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi}^2 = \frac{1}{4}\dot{y}^2\,\frac{\sin^2\frac{y}{2}}{k^2\cos^2\psi} = \frac{1}{2}(H-\cos y)\frac{1-k^2\sin^2\psi}{k^2\cos^2\psi} = 1-k^2\sin^2\psi\,. \tag{2.4}$$

Интегрируя по t, получаем:

$$(t-t_\pi) = \pm\int\limits_0^{\psi}\frac{d\tilde{\psi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{\psi}}} = \pm F(\psi,k)\,, \tag{2.5}$$

где $F(\psi,k)$ — неполный эллиптический интеграл 1-го рода, а t_π — момент времени, когда осциллятор имеет координату π (т.е. находится в нижнем положении). В этой точке $k\sin\psi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, и $\psi = 0$. Обращая уравнение (2.5), получим:

$$\psi = \pm\,\mathrm{am}(t-t_\pi,k)\,, \tag{2.6}$$

где $\mathrm{am}(\psi,k)$ — эллиптическая амплитуда Якоби. Возвращаясь к переменной y, с учетом $\sin\mathrm{am}(\psi,k) = \mathrm{sn}(\psi,k)$, где sn — эллиптический синус, окончательно получим:

$$y(t) = 2\,\mathrm{Arccos}(k\,\sin\psi) = 2\,\mathrm{Arccos}(\pm k\;\mathrm{sn}(t-t_\pi,k))\,. \tag{2.7}$$

Чтобы получить решения для импульса $p = \dot{y}$, воспользуемся тем [7], что $(\mathrm{sn}\,u)' = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$ и $\mathrm{dn}^2\,u + k^2\,\mathrm{sn}^2\,u = 1$:

$$p \equiv \dot{y} = \mp\frac{2k\,\mathrm{cn}(t-t_\pi,k)\,\mathrm{dn}(t-t_\pi,k)}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(t-t_\pi,k)}} = \mp\,2k\,\mathrm{cn}(t-t_\pi,k)\,. \tag{2.8}$$

Возвращаясь к полевому языку, для $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ можем записать в случае $k^2(x) \equiv$ $\equiv \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\varphi'^2(x)+\cos\varphi(x)\right) < 1$:

$$\varphi(x) = 2\,\mathrm{Arccos}(\pm k\;\mathrm{sn}(x-x_\pi,k))\,, \tag{2.9}$$

$$\varphi'(x) = \mp\,2k\,\mathrm{cn}(x-x_\pi,k)\,. \tag{2.10}$$

Здесь x_π есть значение координаты x, при которой $\varphi = \pi$.

2.2 Случай вращения

Рассмотрим случай $H > 1$, тогда маятник свободно вращается. В данном случае удобные переменные можно выбрать другим способом: переменную k введем так же, $k = \dfrac{H+1}{2}$, а вместо переменной ψ введем переменную $\gamma = \dfrac{\pi-y}{2}$, так что $\cos\dfrac{y}{2} = \sin\gamma$. Тогда

$$\dot{\gamma}^2 = \frac{1}{4}\dot{y}^2 = \frac{1}{2}(H-\cos y) = \frac{1}{2}(H+1-2\cos^2\frac{y}{2}) = k^2-\sin^2\gamma\,. \tag{2.11}$$

Отсюда $\dot{\gamma} = \pm\sqrt{k^2-\sin^2\gamma}$, и $t-t_\pi = \pm\dfrac{1}{k}F\left(\gamma,\dfrac{1}{k}\right)$, поэтому $\gamma(t) = \mathrm{am}\left(\pm k(t-t_\pi),\dfrac{1}{k}\right)$, где при интегрировании учтено, что $\gamma(\pi) = 0$. Учитывая нечётность амплитуды Якоби am, а также связь γ и y, окончательно получим решение, описывающее вращение маятника:

$$y = \pi \pm 2\,\mathrm{am}\left(k(t-t_\pi),\,\frac{1}{k}\right)\,. \tag{2.12}$$

Получим выражение для $p = \dot{y}$, учитывая, что $(\operatorname{am} u)' = (\arcsin(\operatorname{sn} u))' = \dfrac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}} = \operatorname{dn} u$:

$$p = \dot{y} = \pm 2k \operatorname{dn}\left(k(t - t_\pi),\, \frac{1}{k}\right). \tag{2.13}$$

Возвращаясь опять к обозначениям теории поля, для $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ при $k^2(x) \equiv$
$\equiv \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\varphi'^2(x) + \cos\varphi(x)\right) > 1$, получим:

$$\varphi(x) = \pi \pm 2 \operatorname{am}\left(k(x - x_\pi),\, \frac{1}{k}\right), \tag{2.14}$$

$$\varphi'(x) = \pm 2k \operatorname{dn}\left(k(x - x_\pi),\, \frac{1}{k}\right). \tag{2.15}$$

Здесь, как и в случае, соответствующем механическим осцилляциям, x_π — пространственная координата, в которой $\varphi(x) = \pi$.

Глава 3

Учет внешнего воздействия

Теперь рассмотрим модель (1.1) при $\varepsilon \ll 1$. Механическая система, аналогичная статическим решениям в данной модели, будет испытывать δ-образные периодические во времени толчки разных знаков. Уравнение (1.2) на языке классической механики примет вид:

$$\ddot{y} = \sin y + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \, \delta(t - nD) \,, \tag{3.1}$$

где по-прежнему $y \equiv \varphi$, $t \equiv x$. Между толчками при $t = nD$ маятник $y(t)$ движется свободно.

Нам надо понять, как меняются характеристики системы в момент действия δ-функций в правой части. Обозначим $p = \dot{y}$, и запишем (3.1) в виде системы уравнений

$$\dot{y} = p \,, \tag{3.2}$$

$$\dot{p} = \sin y + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \, \delta(t - nD) \,. \tag{3.3}$$

Теперь рассмотрим δ-воздействие в момент времени $n_0 D$. Проинтегрировав (3.2)-(3.3) по t в пределах от $n_0 D - \epsilon$ до $n_0 D + \epsilon$ и устремив $\epsilon \to 0$, получим поведение y и $\dot{y} = p$ в момент действия δ-возмущения:

$$y(n_0 D + 0) - y(n_0 D - 0) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{n_0 D - \epsilon}^{n_0 + \epsilon} p(t) dt = 0 \,, \tag{3.4}$$

$$\dot{y}(n_0 D + 0) - \dot{y}(n_0 D - 0) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{n_0 D - \epsilon}^{n_0 D + \epsilon} \left(\sin y(t) + (-1)^{n_0} \, \varepsilon \, \delta(t - n_0 D) \right) dt = (-1)^{n_0} \, \varepsilon \,. \tag{3.5}$$

Отсюда видим, что эволюцию системы можно определить, воспользовавшись следующим алгоритмом.

1. Пусть после очередного δ-взаимодействия у нас координата и импульс есть y_i, p_i. По ним мы можем найти H_i, k_i и определить режим эволюции системы - осцилляций ($k < 1$) или вращения ($k > 1$).

2. Эволюция системы вплоть до следующего взаимодействия задаётся формулами (2.7)-(2.8) или (2.12)-(2.13). Параметр t_π мы находим, решая уравнения $y(t_i) = y_i$, $p(t_i) = p_i$.

3. При следующем взаимодействии координата $y \equiv y_{i+1}$ остается неизменной, а импульс изменяется на ε: $p_{i+1} = \tilde{p}_{i+1} + \varepsilon \, (-1)^{i+1}$

Для полевой модели справедливо всё то же самое, с точностью до замены y на φ, а времени t на координату x.

Глава 4

Статические решения

4.1 Вакуумное решение

Вакууму должно соответствовать решение с наименьшей энергией. Так как исследуемое поле находится под влиянием внешнего возмущения, то пребывать в вакууме невозмущенной задачи $\varphi = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, оно не может. С другой стороны, вакуумное решение должно быть инвариантным относительно трансляций $x \to x + 2D$ на период внешнего воздействия $2D$. Таким образом, это решение описывает малые осцилляции поля φ вокруг вакуумного значения невозмущенной модели $\varphi = 2\pi n$. Для определенности выберем $n = 0$.

Рассмотрим интервал на оси x от x_0 до $x_0 + 2D$. За это время система успевает провзаимодействовать с δ-возмущениями двух разных знаков (см. (3.1)). В результате $p = \varphi'$ дважды испытывает скачок (3.5). Если до первого скачка решение описывается функцией $\varphi_S(x)$, $\varphi'_S(x) \equiv p_S(x)$, то между первым и вторым скачками — $\varphi_C(x)$, $\varphi'_C(x) \equiv p_C(x)$, а после второго скачка — $\varphi_F(x)$ ($\varphi'_F(x) \equiv p_F(x)$). Для периодичности решения надо потребовать

$$\varphi_F(x_0 + 2D) = \varphi_S(x_0)\,, \qquad p_F(x_0 + 2D) = p_S(x_0). \tag{4.1}$$

Эти условия, а также выражения (2.14), (2.15), позволяют получить вакуумное решение.

4.1.1 Приближенное аналитическое решение

Приближенное решение можно найти аналитически. Для этого надо, воспользовавшись малостью осцилляций вокруг вакуума, в уравнении (1.2) положить $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда приближенное уравнение примет вид:

$$\varphi'' = \varphi + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(x - nD)\,, \tag{4.2}$$

Общее решение невозмущенной задачи можно записать в виде

$$\varphi_{approx} = Ae^x + Be^{-x}\,, \tag{4.3}$$

$$p_{approx} = \varphi'_{approx} = Ae^x - Be^{-x}\,. \tag{4.4}$$

При взаимодействии с δ-образным возмущением в точке $x = nD$, в соответствии с (3.2) и (3.3), решение изменится согласно уравнениям:

$$Ae^{nD} + Be^{-nD} = A'e^{nD} + B'e^{-nD}\,, \tag{4.5}$$

$$Ae^{nD} - Be^{-nD} + (-1)^n\,\varepsilon = A'e^{nD} - B'e^{-nD}\,, \tag{4.6}$$

откуда получим коэффициенты решения после взаимодействия:

$$A' = A + \frac{\varepsilon}{2}\,(-1)^n\,e^{-nD}\,, \qquad B' = B - \frac{\varepsilon}{2}\,(-1)^n\,e^{nD}\,. \tag{4.7}$$

Видно, что коэффициенты A и B меняются скачкообразно. Аналогично, после скачка в $(2n+1)D$ решение есть

$$\varphi(x) = \left(A + \frac{\varepsilon}{2}e^{-2nD} - \frac{\varepsilon}{2}e^{-(2n+1)D}\right) e^{x} + \left(B - \frac{\varepsilon}{2}e^{2nD} + \frac{\varepsilon}{2}e^{(2n+1)D}\right) e^{-x} .$$

Тогда условие равенства решений (и производных) до взаимодействий в точках $2nD$ и $(2n+2)D$ есть:

$$\left(A + \frac{\varepsilon}{2}e^{-2nD} - \frac{\varepsilon}{2}e^{-(2n+1)D}\right) e^{(2n+2)D} + \left(B - \frac{\varepsilon}{2}e^{2nD} + \frac{\varepsilon}{2}e^{(2n+1)D}\right) e^{-(2n+2)D} = Ae^{2nD} + Be^{-2nD}, \quad (4.8)$$

$$\left(A + \frac{\varepsilon}{2}e^{-2nD} - \frac{\varepsilon}{2}e^{-(2n+1)D}\right) e^{(2n+2)D} - \left(B - \frac{\varepsilon}{2}e^{2nD} + \frac{\varepsilon}{2}e^{(2n+1)D}\right) e^{-(2n+2)D} = Ae^{2nD} - Be^{-2nD}, \quad (4.9)$$

откуда

$$Ae^{(2n+2)D} \ + \ \frac{\varepsilon}{2}\left(e^{2D} - e^{D}\right) \ = \ Ae^{2nD}\,, \tag{4.10}$$

$$Be^{-(2n+2)D} - \frac{\varepsilon}{2}\left(e^{-2D} - e^{-D}\right) = Be^{-2nD}\,. \tag{4.11}$$

Тогда

$$A = -\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{1+e^{-D}}\,e^{-2nD}\,, \qquad B = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{1+e^{D}}\,e^{2nD}\,, \tag{4.12}$$

$$A' = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{1+e^{D}}\,e^{-2nD}\,, \quad B' = -\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{1+e^{-D}}\,e^{2nD}\,. \tag{4.13}$$

Таким образом, вакуумное решение можно записать в виде

$$\varphi(x) = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{1+e^{D}}\,e^{x-2nD} - \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{1+e^{-D}}\,e^{-(x-2nD)}, \qquad 2nD < x < (2n+1)D\,, \tag{4.14}$$

$$\varphi(x) = -\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{1+e^{-D}}\,e^{x-2nD} + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{1+e^{D}}\,e^{-(x-2nD)}, \quad (2n+1)D < x < (2n+2)D\,. \tag{4.15}$$

Это решение весьма точно аппроксимирует истинное вакуумное решение, которое будет найдено далее.

4.1.2 Численное решение

Численное решение полной задачи можно получить методом пристрелки. Так как вакуумное решение — периодическое, то величина $H = \dfrac{\varphi'^2}{2} + \cos\varphi$, соответствующая энергии в механической аналогии, не зависит от x. Поэтому мы ожидаем, что решение — антисимметричное: в точках $x = D(n+\frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$, поле φ равно 0. Действительно, в этом случае величина H не может изменяться в момент взаимодействия, тогда φ'^2 не меняется в точках δ-толчка, так как $\varphi(x)$ — непрерывна. Поэтому в качестве параметра пристрелки возьмём $\varphi'\left(\frac{D}{2}\right)$ и потребуем, чтобы $\varphi\left(\frac{3}{2}D\right) = 0$, т.е. найдем численно корень функции $\varphi_{x=\frac{3}{2}D}\left(\varphi'_{x=\frac{1}{2}D}\right)$. Найденное таким образом вакуумное решение показано на Рис. 4.1.

4.2 Одно- и многосолитонные решения

Рассмотрим статические возмущения над вакуумом: $\varphi(x) = \varphi_{vac}(x) + \theta(x)$. Подставляя $\varphi(x)$ в (1.2), получим однородное (по правой части) уравнение на $\theta(x)$:

$$\theta'' = \sin\theta\ . \tag{4.16}$$

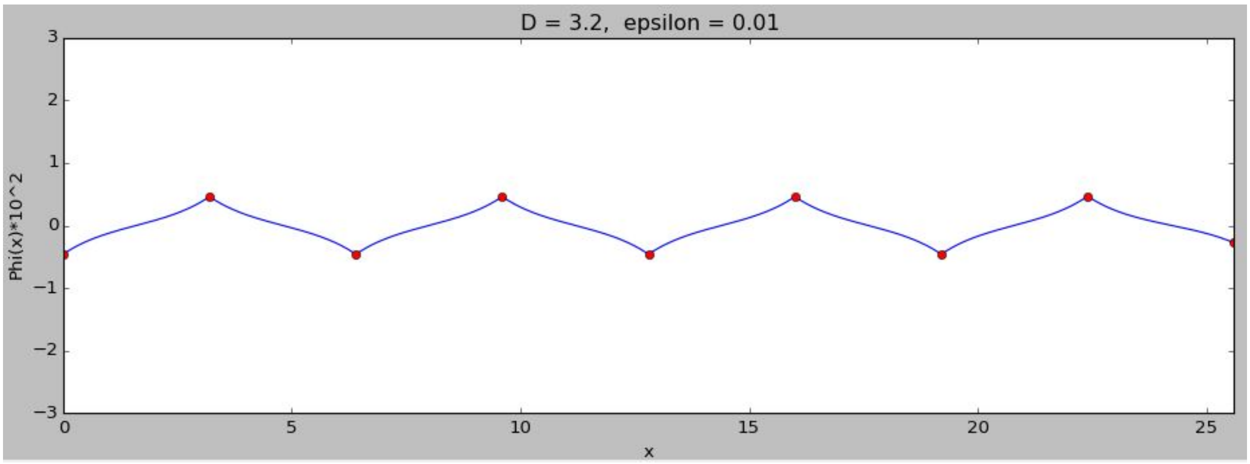

Рис. 4.1: Вакуумное решение при $D = 3.2$, $\varepsilon = 0.01$. Красными точками отмечены моменты внешних δ-возмущений.

Считая возмущение $\theta(x)$ малым, линеаризуя уравнение (4.16), можем записать общее статическое решение для малого возмущения в виде:

$$\theta(x) = A\,e^{x} + B\,e^{-x}. \tag{4.17}$$

Отметим, что в области $x \gg 1$, $x > 0$ второе слагаемое существенной роли не играет из-за падающей экспоненты, в то время как первое слагаемое существенно изменяет вакуумное решение.

Поиск многосолитонных решений будем производить с помощью анализа зависимости значения поля через большое число периодов $2D$ возмущения от параметра A, характеризующего отклонение от вакуумного решения.

Методом пристрелки ищем односолитонное решение, которое стартует из вакуума, испытывает одну осцилляцию маятника, и приходит в соседний вакуум. Это решение показано на Рис. 4.2.

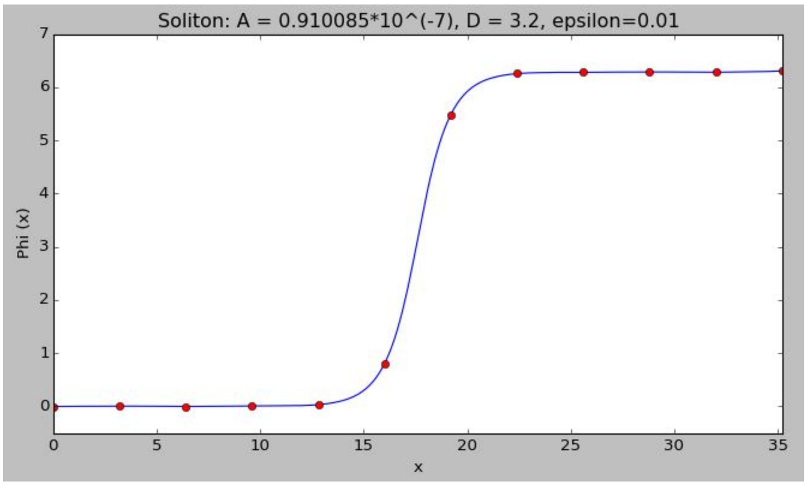

Рис. 4.2: Односолитонное решение, полученное при $A = 0.910085 \times 10^{-7}$, $D = 3.2$, $\varepsilon = 0.01$.

Аналогично ищем двухсолитонное решение вида «кинк-антикинк», показанное на Рис. 4.3.

Наконец, в общем случае мы имеем многосолитонные решения, содержащие динамический хаос. Примеры таких решений изображены на Рис. 4.4 и Рис. 4.5.

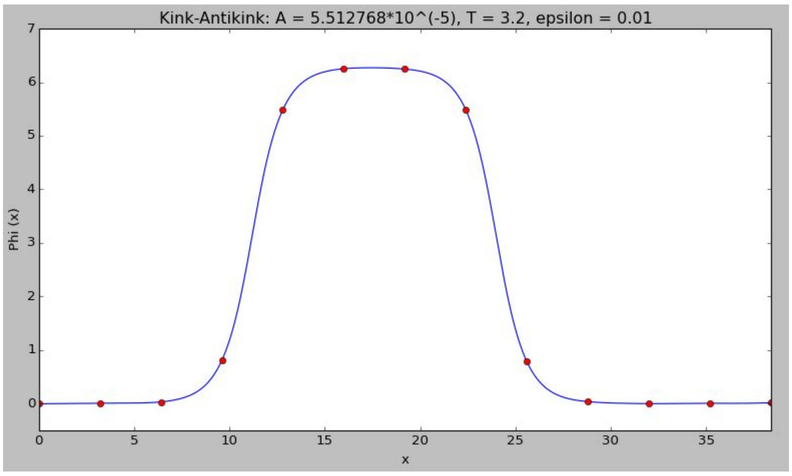

Рис. 4.3: Двухсолитонное решение (кинк-антикинк), полученное при $A = 5.512768\times10^{-5}$, $D = 3.2$, $\varepsilon = 0.01$. Красными точками отмечены моменты внешних δ-возмущений.

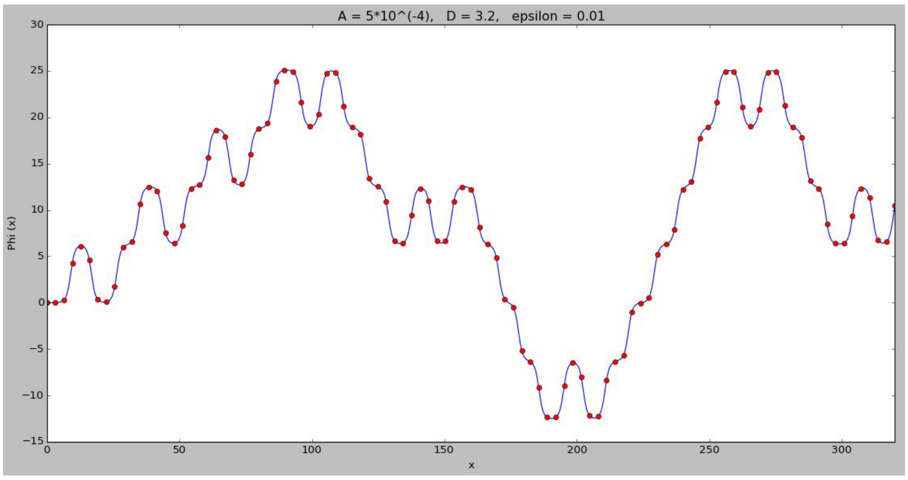

Рис. 4.4: Многосолитонное решение, полученное при $A = 5\times10^{-4}$, $D = 7.25$, $\varepsilon = 0.01$. Красными точками отмечены моменты внешних δ-возмущений.

Можно проклассифицировать полученные многосолитонные решения, рассмотрев зависимость значения поля через целое число периодов внешнего воздействия $X = 2DN$, $N \in \mathbb{Z}$, от параметра A величины возмущения над вакуумным решением. Эти графики для $X = 6D$, $X = 12D$ и $X = 20D$ представлены на Рис. 4.6, 4.7, 4.8.

При увеличении числа периодов мы получаем структуру, напоминающую фрактальную. Хаотичность системы проявляется в том, что состояние системы через большое число периодов внешнего воздействия кардинально меняется даже при самом незначительном изменении величины A возмущения над вакуумом. Это связано с тем, что любая неточность при попадании в вакуум порождает дополнительные ляпуновские экспоненты $Ae^{x} + Be^{-x}$, которые разрушают устойчивость по начальному значению.

Сопоставим каждому решению с конечной энергией целое число - порядковый номер. Будем говорить, что поле в данной точке обладает числом n, если оно находится между $2\pi n - \pi$ и $2\pi n + \pi$. Тогда каждое решение можно параметризовать набором чисел, каждое из которых соответствует одному периоду внешнего возмущения. Вакуумному решению тогда соответствует последовательность из нулей, односолитонному решению - последовательность $\ldots000111\ldots$,

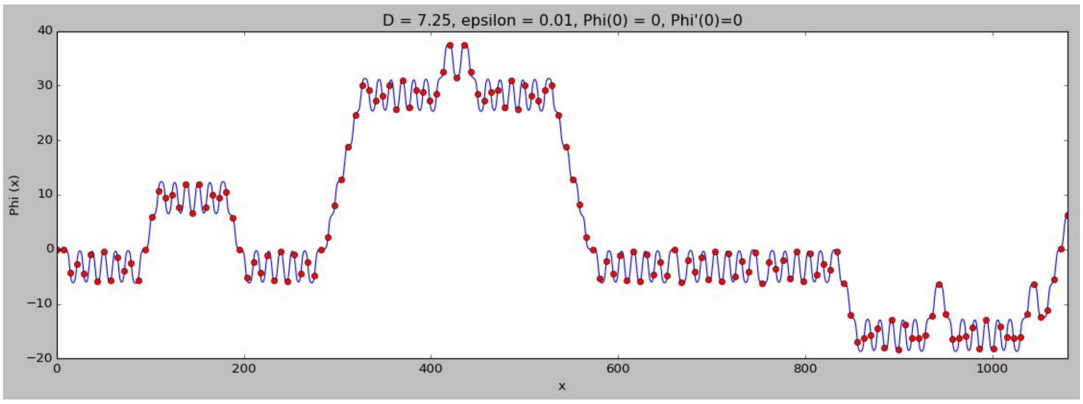

Рис. 4.5: Многосолитонное решение, полученное при $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $D = 7.25$, $\varepsilon = 0.01$. Красными точками отмечены моменты внешних δ-возмущений.

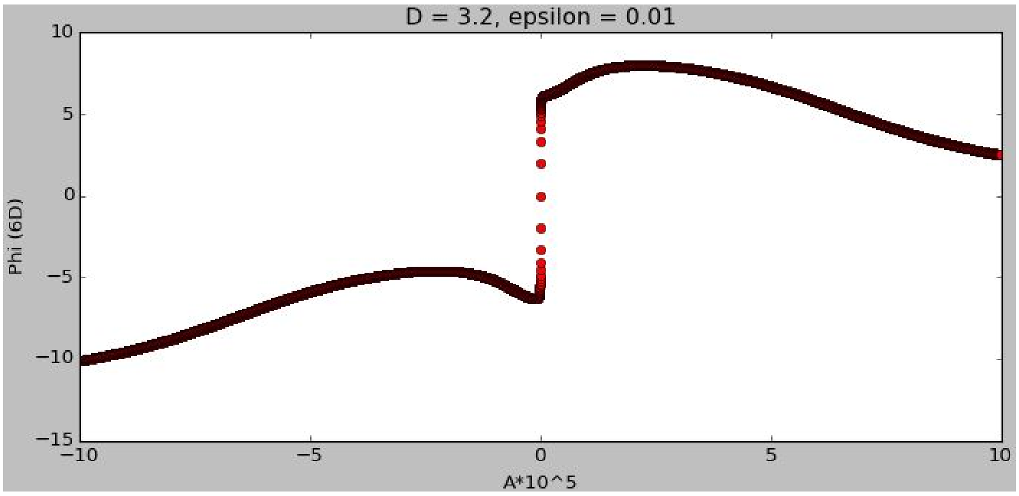

Рис. 4.6: Зависимость $\varphi(6D)$ от A

двухсолитонному (кинк-антикинк) - $\ldots 000111 \ldots 111000 \ldots$.

Наконец, чтобы перестать учитывать ранее произошедший сдвиг по фазе, а учитывать только её изменения, можно запараметризовать решение скачками числа n за период внешнего воздействия. Тогда вакууму по-прежнему будет соответствовать последовательность из нулей, односолитонному решению — $\ldots 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0 \ldots$, двухсолитонному —
$\ldots 0, 0, 1, 0, 0 \ldots 0, 0, -1, 0, 0 \ldots$, и т.д. При этом каждая область $\varphi(x) \approx 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ графиков на Рис. 4.6 — 4.8 соответствует статическому решению.

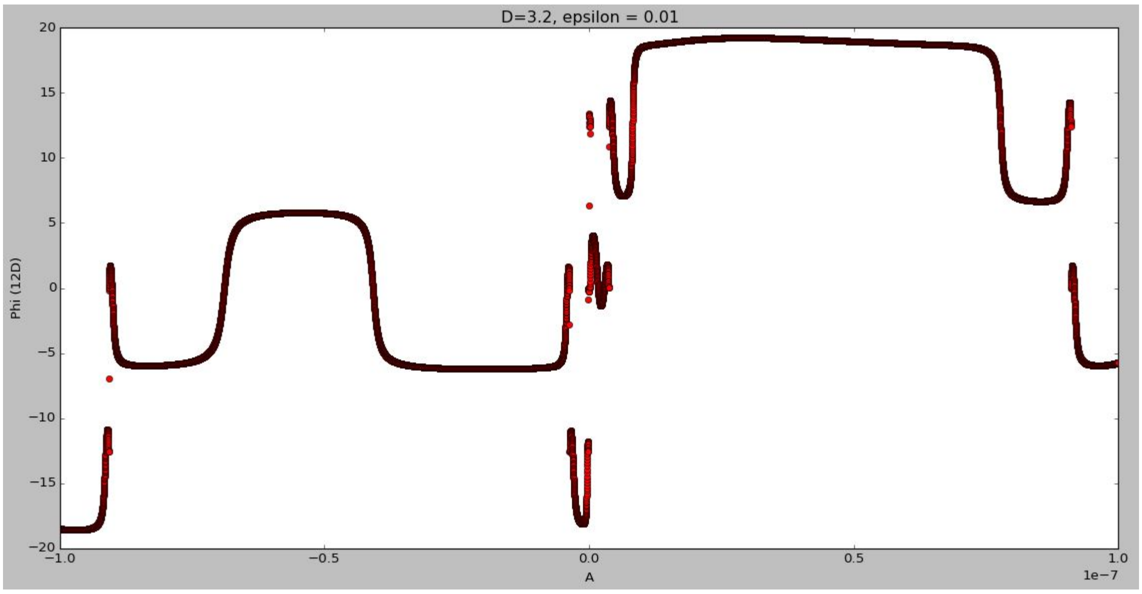

Рис. 4.7: Зависимость $\varphi(12D)$ от A

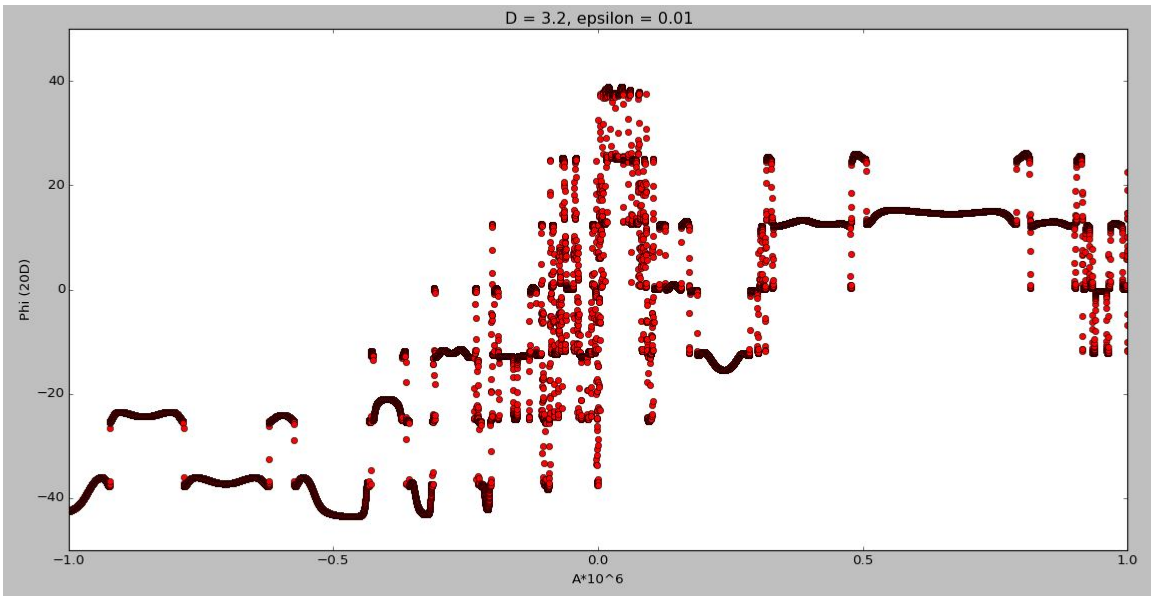

Рис. 4.8: Зависимость $\varphi(20D)$ от A

Заключение

В работе получены следующие результаты.

- Показано, что в однополевой модели «синус-Гордон» в периодическом δ-образном внешнем потенциале существует бесконечное количество многосолитонных решений.
- Показано, что солитонные решения в этой модели обладают хаотической зависимостью поля от пространственной координаты.
- Такое поведение поля обусловлено динамическим хаосом в механической аналогии.
- Благодаря этому свойству значение поля многосолитоннго решения значение поля вдали от начала координат слабо зависит от его значения вблизи начала координат из-за растущих ляпуновских экспонент.
- Обсуждена возможность применения полученных результатов в физике конденсированного состояния, в частности, в модели двух взаимодействующих одномерных бозе-конденсатов (при наличии соответствующего возмущения).

Автор выражает огромную благодарность Эмину Нугаеву за многочисленные обсуждения и ценные указания и Дмитрию Левкову за рецензирование работы.

Приложение А

Модель нескольких взаимодействующих полей с потенциалом вида φ^4 и φ^n

Рассмотрим два скалярных поля с потенциалом вида φ^4 и введем между ними взаимодействие $\varepsilon V(\varphi_1, \varphi_2)$, $\varepsilon \ll 1$. Пусть эти поля имеют одинаковую массу, которую без ограничения общности мы положим равной 1. Лагранжиан такой модели имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 - \frac{1}{2}\left(\varphi_1^2 - 1\right)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2 - \frac{1}{2}\left(\varphi_2^2 - 1\right)^2 - \varepsilon V(\varphi_1, \varphi_2)\,. \tag{A.1}$$

При $\varepsilon \ll 1$ вакуумы, являющиеся минимумами суммарного потенциала, сместятся относительно вакуумов невозмущённой задачи на величину порядка ε. Поэтому статические решения в такой модели являются «последовательностями» статических решений в невозмущенной модели, стабилизированные с помощью нашего возмущения. Простейшие топологические солитоны в однополевой теории φ^4 после обезразмеривания:

$$\varphi = \pm\,\mathrm{th}(x - x_0)\,, \tag{A.2}$$

где $\varphi = \varphi_1$ или φ_2, знак «+» соответствует кинку, «−» — антикинку, x_0 — положение центра кинка или антикинка.

Рассмотрим систему кинк-антикинк поля φ_1. Если бы не было поля φ_2, то они бы притягивались с силой, равной $F = 32e^{-2R}$, где R - расстояние между кинком и антикинком [3]. При больших R эта конфигурация близка к статической. Однако если между ними вдобавок есть кинк второго поля, и он отталкивается и от кинка, и от антикинка, то мы можем получить само статическое решение. Мы можем продлить эту цепочку дальше, поместив справа антикинк поля φ_2.

Таким образом, рассмотрим систему из двух кинков и двух антикинков разных полей (см. рис. А.1), находящихся на большом расстоянии друг от друга. Пусть координаты центров кинков полей φ_1 и φ_2 —- c_1 и c_2 соответственно, антикинков — c_3 и c_4, а потенциал взаимодействия имеет полиномиальный вид. Введем параметры $r_1 = c_2 - c_1$, $r_2 = c_3 - c_2$ и $r_3 = c_4 - c_3$, характеризующие расстояние между соседними солитонами. Так как кинки находятся на большом расстоянии друг от друга, то будем учитывать только взаимодействие между соседними солитонами как одного, так и разных полей. Энергия такого взаимодействия $W(|c_i - c_j|)$ зависит только от разности координат между кинками (антикинками), а потому взаимодействие каждой пары солитонов может быть охарактеризовано силой, с которой они друг на друга действуют:

$$F(|c_i - c_j|) = -\frac{\partial W}{\partial|c_i - c_j|}\,. \tag{A.3}$$

Применим этот подход для поиска статической конфигурации в указанной модели, а также в более общей модели взаимодействующих полей с потенциалом вида φ^n, $n \geqslant 3$. Поскольку вдали от центра статическое решение имеет экспоненициальную асимптотику, то энергия взаимодействия между солитонами как одного, так и разных полей будет пропорциональна $e^{-\alpha R}$, где R - расстояние между солитонами, а α - коэффициент, зависящий от их типа.

Поэтому можем положить силу, действующую между кинком и антикинком одного поля, равной $K_1 e^{-\alpha R}$, силы взаимодействия между кинками (антикинками) разных полей — $K_2 \varepsilon e^{-\beta R}$, а силу взаимодействия между кинком одного поля и антикинком другого поля — $K_3 \varepsilon e^{-\beta R}$. Здесь R - расстояние между (анти)кинками, на которые действует сила, $K_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Тогда в системе двух кинков и двух антикинков будут действовать силы изображенные на Рис. А.1.

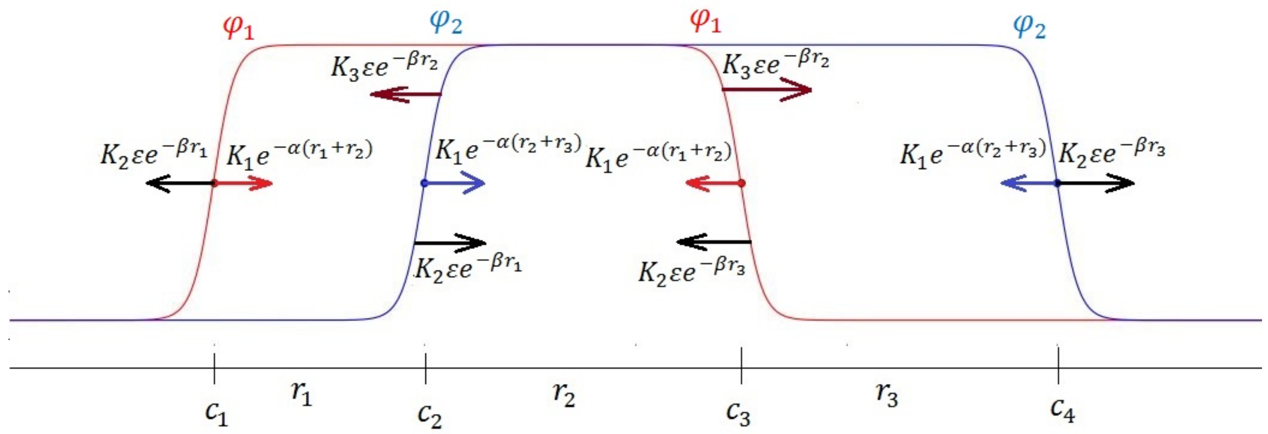

Рис. А.1: Система из двух кинков и двух антикинков в модели двух полей и силы, действующие на них. Красный график соответствует конфигурации поля φ_1, синий — φ_2

Для нахождения статического решения мы должны потребовать, чтобы суммарная сила, действующая на каждый солитон, была равна нулю. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)} = \varepsilon K_2 e^{-\beta r_1}\,, \\ \varepsilon K_3 e^{-\beta r_2} = K_1 e^{-\alpha(r_2+r_3)} + \varepsilon K_2 e^{-\beta r_1}\,, \\ \varepsilon K_3 e^{-\beta r_2} = K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)} + \varepsilon K_2 e^{-\beta r_3}\,, \\ K_1 e^{-\alpha(r_2+r_3)} = \varepsilon K_2 e^{-\beta r_3}\,. \end{cases} \tag{A.4}$$

Легко видеть, что эта система симметрична относительно замены r_1 на r_3. Поэтому статическое решение будет симметричным, и в нём $r_1 = r_3$. С учётом этого система уравнений (А.4) принимает вид:

$$\begin{cases} K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)} = \varepsilon K_2 e^{-\beta r_1}\,, \\ \varepsilon K_3 e^{-\beta r_2} = K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)} + \varepsilon K_2 e^{-\beta r_1} = 2\varepsilon K_2 e^{-\beta r_1}\,, \end{cases} \tag{A.5}$$

где последнее равенство в нижнем уравнении получено с помощью верхнего уравнения. Прологарифмировав уравнения, получим:

$$\begin{cases} (\beta - \alpha) r_1 - \alpha r_2 = \ln \varepsilon + \ln K_2 - \ln K_1\,, \\ \beta (r_1 - r_2) = \ln 2 + \ln K_2 - \ln K_3\,. \end{cases} \tag{A.6}$$

Отсюда следует, что в главном порядке по $|\ln \varepsilon| \gg 1$:

$$r_1 = r_3 \approxeq r_2 = -\frac{\ln \varepsilon}{2\alpha - \beta} + O(1)\,. \tag{A.7}$$

Так как $\varepsilon \ll 1$, то $\ln \varepsilon < 0$. Поэтому необходимое условие существования статического решения — это

$$2\alpha > \beta\,. \tag{A.8}$$

Далее будем использовать это условие, а также уравнения (A.5), которым удовлетворяет статическое решение.

Изучим стабильность полученного решения. Для этого надо найти область, в которой найденный экстремум потенциала является его минимумом. Этому соответствует положительная определённость матрицы вторых производных потенциальной энергии U.

U распадается на слагаемые: $U = U_1(r_1 + r_2) + U_2(r_2 + r_3) + V_1(r_1) + V_2(r_2) + V_3(r_3)$, где U_i - члены, отвечающие за взаимодействие солитонов одного и того же поля, V_i - члены, отвечающие за взаимодействие солитонов разных полей, расположенных на расстоянии r_1, r_2, r_3 соответственно. Зануляя первые производные, мы получим те же уравнения, что и раньше:

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} = \frac{\partial U_1(r_1 + r_2)}{\partial r_1} + \frac{\partial V_1(r_1)}{\partial r_1} = K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)} - \varepsilon\, K_2 e^{-\beta r_1} = 0\,, \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_2} = \frac{\partial U_1(r_1 + r_2)}{\partial r_2} + \frac{\partial U_2(r_2 + r_3)}{\partial r_2} + \frac{\partial V_2(r_2)}{\partial r_2} = K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)} + K_1 e^{-\alpha(r_2+r_3)} - \varepsilon\, K_3 e^{-\beta r_2} = 0\,, \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_3} = \frac{\partial U_2(r_2 + r_3)}{\partial r_3} + \frac{\partial V_3(r_3)}{\partial r_3} = K_1 e^{-\alpha(r_2+r_3)} - \varepsilon\, K_2 e^{-\beta r_3} = 0\,. \tag{A.11}$$

Тогда вторые производные равны:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} = -\alpha K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)} + \varepsilon\beta C_2 e^{-\beta r_1}\,, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial r_3^2} = -\alpha K_1 e^{-\alpha(r_2+r_3)} + \varepsilon\beta C_2 e^{-\beta r_3}\,, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} = -\alpha K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)} - \alpha K_1 e^{-\alpha(r_2+r_3)} + \varepsilon\beta K_3 e^{-\beta r_2}\,, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial r_2} = -\alpha K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)}\,, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial r_2 \partial r_3} = -\alpha K_1 e^{-\alpha(r_2+r_3)}\,, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial r_3} = 0\,.
\end{gathered} \tag{A.12}$$

Воспользовавшись уравнениями (A.5) и учитывая, что $r_1 = r_3$, мы можем выразить все производные через C_1, избавившись от ε, C_2 и C_3. Получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_3^2} = (\beta - \alpha) K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)}\,, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} = 2(\beta - \alpha) K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)}\,. \tag{A.13}$$

Тогда матрица вторых производных примет вид:

$$\mathcal{G} = K_1 e^{-\alpha(r_1+r_2)} \begin{pmatrix} \beta - \alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 2(\beta - \alpha) & -\alpha \\ 0 & -\alpha & \beta - \alpha \end{pmatrix}. \tag{A.14}$$

Множитель перед матрицей всегда положителен, поэтому стабильность решения определяется положительностью всех собственных значений оставшейся матрицы. Получим уравнение:

$$(\beta - \alpha - \lambda)^2 (2(\beta - \alpha) - \lambda) - 2\alpha^2 (\beta - \alpha - \lambda) = 0\,. \tag{A.15}$$

Один из корней — это $\lambda_1 = \beta - \alpha$, и он положителен при $\beta > \alpha$, а на оставшиеся два корня получаем уравнение:

$$\lambda^2 - 3(\beta - \alpha)\lambda + 2\beta(\beta - 2\alpha) = 0\,. \tag{A.16}$$

Для положительности обоих оставшихся корней надо, чтобы $-3(\beta - \alpha) < 0$, а $\beta(\beta - 2\alpha) > 0$. Но $\beta > 0$ по определению, а условие существования статических решений заключается в том, что $2\alpha > \beta$, поэтому второе условие никогда не будет для них достигнуто. Таким образом, найденные статические решения являются нестабильными.

Список литературы

[1] В.А.Рубаков «Классические калибровочные поля. Бозонные теории». URSS, 2014

[2] Р.Раджараман «Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля». Москва,«МИР», 1985.

[3] N.Manton, P.Sutcliffe «Topological solitons». Cambridge University Press, 2004.

[4] N.K.Whitlock, I.Bouchoule «Relative phase fluctuations of two coupled one-dimensional condensates». Physical Review A 68, 053609 (2003)

[5] V.Gritzev, A.Polkovnikov, E.Demler «Linear response theory for a pair of coupled one-dimensional condensates of interacting atoms». Physical Review B 75, 174511 (2007)

[6] Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев «Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса». Москва, Наука, 1988

[7] И.С.Градштейн, И.М.Рыжик «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений». Москва, Физматгиз, 1963.