

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ДИЛАТОННОЙ ГРАВИТАЦИИ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ГОЛОГРАФИИ»**

Выполнила студент
243М группы
Лысухина Анастасия Владимировна

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Белокуров Владимир Викторович

Научный консультант:
кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник
Агеев Дмитрий Сергеевич

Допущена к защите
Зав.кафедрой

Москва
2019

Содержание

1	Введение	2
2	Получение действия Шварциана как эффективного действия Джекива-Тейтельбойма на AdS_2	4
3	Дилатонная гравитация возмущенная, точечной частицей, и энтропия зацепленности	7
4	Энтропия зацепленности для теорий на левой и правой границе анти-де-Ситтера	14
5	Заключение	15
A	Пространство анти-де-Ситтера	16
A.1	Геометрия	16
A.2	Бусты	20
B	Получение действия Шварциана из AdS_2 для координат Пуанкаре	21
C	Энтропия зацепленности двух связанных осцилляторов	24
D	Термополевая двойка	25

1 Введение

Одной из основных проблем современной физики является построение теории квантовой гравитации. Объединение квантовой теории поля [1] и гравитации явилось нетривиальной задачей, не решенной до сих пор. Теория струн [2], несмотря на многочисленные успехи, не смогла решить все возникающие при построении квантовой гравитации трудности. Однако, в последнее время значительные успехи в понимании квантовой гравитации были достигнуты с использованием так называемого AdS/CFT-соответствия или голографической дуальности (см., например, обзор [3]).

В 1997 году Хуан Малдасена сформулировал AdS/CFT-соответствие [4] – описание одной и той же физической системы двумя различными способами, с помощью общей теории относительности и квантовой теории поля. С помощью AdS/CFT-соответствия возможно вычисление величин, трудно вычисляемых по теории возмущений в квантовой теории поля. Зачастую такие величины считаются сравнительно просто с помощью вычислений с гравитационной стороны в AdS/CFT-соответствии. Однако можно обратить данную логику – поведение различных наблюдаемых в квантовой теории поля может позволить прояснить различные непертурбативные аспекты гравитационной теории. Еще точно не доказано, что можно без противоречий объединить квантовую гравитацию и квантовую теорию поля, но благодаря AdS/CFT-соответствию есть основания полагать, что это будет возможно.

AdS/CFT-соответствие [4]- [6], или голографическая дуальность, сопоставляет гравитационные явления в пространстве анти-де-Ситтера и квантовую теорию в пределе сильной связи на асимптотической границе этого пространства. Размерность пространства анти-де-Ситтера на единицу больше чем размерность границы, где определена квантовая теория. Сначала AdS/CFT-соответствие было сформулировано как дуальность между конкретной теорией поля в четырехмерном пространстве и пятимерной теорией гравитации [4]- [6]. Затем изучение дуальности было расширено на теории с меньшей размерностью. Наименьшая размерность, где возможно определить гравитационную теорию – размерность пространства-времени $d = 2$ (см., например, [7]- [13]). Эйнштейновская гравитация является топологической в этой размерности (то есть у нее отсутствуют динамические степени свободы).

В данной дипломной работе пойдет речь о варианте голографической ду-

альности, известном как $NAdS_2/NCFT_1$ (почти-AdS/почти-CFT) [14], [15]. В качестве гравитационной теории в таком соответствии рассматривается двумерная дилатонная гравитация, а в качестве квантовой теории на границе – квантовомеханическая система с конформной симметрией (в пределе сильной связи) [14]- [18]. Можно показать, что эффективной теорией, двойственной такой гравитации, является теория специального вида – Шварциан [19]. Шварциан [20], также может быть получен взятием низкоэнергетическо предела теории, описывающей случайно взаимодействующие майоровские фермионы - теории Сачдева-Йе-Китаева(SYK) [21]- [25].

В дипломной работе приведен вывод действия двух копий Шварциана как эффективного действия дилатонной гравитации для модели Джекива-Тейтельбойма. Далее рассмотрена двумерная гравитация Алмхери-Полчинского [13], взаимодействующая с точечной массивной частицей, и получены ее решения. Проанализировано поведение дилатона, и изучен процесс образования или исчезновения черной дыры в зависимости от энергии статической частицы [18], [26]- [28]. Получен вид решения для массивной частицы, двигающейся с произвольной скоростью. С точки зрения дуальности такое решение можно интерпретировать как две копии теории Шварциана, связанные некоторым взаимодействием. Рассмотрена энтропия зацепленности между этими двумя копиями квантовой теории, определенными на левой и правой границе двумерного анти-де-Ситтера [29]- [38].

Дипломная работа организована следующим образом. Во второй главе рассмотрен вывод действия Шварциана как эффективного действия Джекива-Тейтельбойма. В третьей главе рассмотрено взаимодействие дилатонного поля с точечной частицей. В четвертой главе вычислена энтропия зацепленности для теорий на левой и правой границе анти-де-Ситтера. Диплом содержит несколько приложений, в которых приведен различный вспомогательный справочный материал.

В приложении А приведены представления пространства анти-де-Ситтера, бусты в разных системах координат. Разобрано получение действия Шварциана из действия Джекива-Тейтельбойма в координатах Пуанкаре (Приложение В). В приложении С даны необходимые определения и приведен пример вычисления энтропии зацепленности для системы двух связанных осцилляторов. Также в приложении D приведено описание температурной теории в виде «термополевой двойки» (thermofield double).

Результаты, представленные в данной дипломной работе, опубликованы

в [39].

2 Получение действия Шварциана как эффективного действия Джекива-Тейтельбойма на AdS_2

Рассмотрим евклидово пространство анти-де-Ситтера в глобальных координатах (описание пространства анти-де-Ситтера в разных координатах в приложении A.1):

$$ds^2 = \frac{d\tau^2 + d\sigma^2}{\sin^2(\sigma)}, \quad \text{где } 0 < \sigma < \pi, \quad -\infty < \tau < +\infty \quad (1)$$

Действие Джекива-Тейтельбойма, поддерживающее такое решение записывается в виде:

$$S_{JT} = -\frac{1}{16\pi G} \left(\int dt dz \phi \sqrt{g} (R + 2) + 2 \int_{bdy_1} du \sqrt{g_{bdy_1}} \phi_{bdy_1} K + 2 \int_{bdy_2} du \sqrt{g_{bdy_2}} \phi_{bdy_2} K \right) \quad (2)$$

где второй интеграл – это граничный член Гиббонса-Хокинга-Йорка, необходимый для определения вариационного принципа, когда мы хотим поставить граничные условия Дирихле на границе многообразия. K – внешняя кривизна, R – скаляр Риччи, u – координата на границе, g_{bdy} – детерминант индуцированной на границе метрики.

Рассмотрим одну из границ $\sigma = 0$ пространства (на второй границе вкладки аналогичные). «Отрежем» пространство вдоль траектории, параметризованной в виде $(\tau(u), \sigma(u))$. Фиксируем точную длину кривой с помощью маленького параметра $\epsilon \rightarrow 0$:

$$g|_{bdy} = \frac{1}{\epsilon^2}, \quad \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{\tau'^2 + \sigma'^2}{\sin^2(\sigma)}, \quad (3)$$

Также необходимо учесть, что ϕ расходится вблизи границы (явные формулы будут приведены в следующей главе). Введем условие на поведение

дилатона

$$\phi_{bdy} = \phi|_{bdy} = \frac{\phi_r(u)}{\epsilon} \quad (4)$$

Из уравнений движения дилатона $R = -2$, и поэтому первый интеграл в действии (2) обнуляется. Граничный член в действии с учетом (3), (4) можно переписать в виде:

$$S_{TJ} \rightarrow -\frac{1}{8\pi G} \int \frac{du}{\epsilon} \frac{\phi_r(u)}{\epsilon} K. \quad (5)$$

Чтобы разрешить уравнение (3) относительно переменной σ , воспользуемся анзацем вида (более подробно в приложении В):

$$\sigma = \sigma_1(u)\epsilon + \sigma_2(u)\epsilon^2 + \sigma_3(u)\epsilon^3 + \dots, \quad (6)$$

Тогда, используя теорию возмущений, $\sigma(u)$ можно представить в виде:

$$\sigma(u) = \epsilon\tau' \left(1 + \frac{\epsilon^2}{6} \frac{\tau'^4 + 3\tau''^2}{\tau'^2} \right) + \dots \quad (7)$$

Вычислим внешнюю кривизну K . Для этого, воспользуемся определением K в виде:

$$K = -\frac{h(T, \nabla_T n)}{h(T, T)}, \quad (8)$$

$$h(X, Y) = h_{ab}X^a X^b, \quad (9)$$

или расписав явно скалярные произведения:

$$K = \frac{T^\mu}{(T)^2} \nabla_T n_\mu \quad (10)$$

$$T^a = (\tau', \sigma'), \quad (11)$$

$$T_a = \left(\frac{\tau'}{\sin^2(\sigma)}, \frac{\sigma'}{\sin^2(\sigma)} \right) \quad (12)$$

$$h(T, n) = 0, \quad h(n, n) = 1. \quad (13)$$

где n^a – нормаль, T^a – касательный вектор. Из системы уравнений (13) получаем явное выражение для нормального вектора в глобальных координатах:

$$n^a = \frac{\sin(\sigma)}{\sqrt{\sigma'^2 + \tau'^2}} (-\sigma', \tau'), \quad (14)$$

$$n_a = \frac{1}{\sin(\sigma)\sqrt{\sigma'^2 + \tau'^2}} (-\sigma', \tau') \quad (15)$$

Для вычисления внешней кривизны нам понадобятся символы Кристоффеля для метрики анти-де-Ситтера в глобальных координатах:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad (16)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{\sin(\sigma)}, \quad (17)$$

$$\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{\sin(\sigma)}. \quad (18)$$

Используя (10)-(13), (14)-(18), внешняя кривизна вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} K &= \frac{T^\mu}{(T)^2} \nabla_T n_\mu = \frac{T^\mu}{(T)^2} \left(\frac{\partial n_\mu}{\partial u} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho n_\rho T^\nu \right) = \\ &= \frac{T^1}{(T)^2} \left(\frac{\partial n_1}{\partial u} - \Gamma_{11}^1 n_1 T^1 - \Gamma_{12}^1 n_1 T^2 - \Gamma_{11}^2 n_2 T^1 - \Gamma_{12}^2 n_2 T^2 \right) + \\ &+ \frac{T^2}{(T)^2} \left(\frac{\partial n_2}{\partial u} - \Gamma_{21}^1 n_1 T^1 - \Gamma_{22}^1 n_1 T^2 - \Gamma_{21}^2 n_2 T^1 - \Gamma_{22}^2 n_2 T^2 \right) = \\ &= -\frac{\tau'(\tau'^2 + \sigma'^2 + \sin(\sigma)\sigma'') - \sin(\sigma)\sigma'\tau''}{(\tau'^2 + \sigma'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (7) в (19), получаем:

$$K = -1 + \epsilon^2 \frac{3(\tau''(u))^2 - 2\tau'(u)\tau'''(u)}{2(\tau'(u))^2} = -1 - \epsilon^2 S(\tau(u), u) + O(\epsilon^4) \quad (20)$$

В итоге мы получим, что эффективное действие дилатонной гравитации описывается двумя копиями Шварцциана (каждая соответствует границе при $\sigma = 0$ или $\sigma = \pi$)

$$S_{eff} = \frac{1}{8\pi G} \int du [\phi_{r1}(u)S(\tau_1(u), u) + \phi_{r2}(u)S(\tau_2(u), u)]. \quad (21)$$

Получается теория с двумя невзаимодействующими динамическими переменными $\tau_1(u)$ и $\tau_2(u)$. В следующей главе мы рассмотрим дилатонную гравитацию, взаимодействующую с материей. С точки зрения двойственной теории это соответствует введению взаимодействия $O(\tau_1(u))O(\tau_2(u))$ между левой и правой теорией.

3 Дилатонная гравитация возмущенная, точечной частицей, и энтропия зацепленности

Рассмотрим модель двумерной гравитации – модель Алмхери-Полчинского. Действие модели имеет вид:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int dx^2 \sqrt{-g} [\phi(\tau, \sigma) (R + 2) - 2A] + S_{matter}, \quad (22)$$

где $\phi(\tau, \sigma)$ – скалярное поле дилатона, R – скаляр Риччи, S_{matter} – действие полей материи. Ищем решение для метрики в виде (лоренцева сигнатура):

$$ds^2 = b(\sigma)(-d\tau^2 + d\sigma^2) \quad (23)$$

Первое уравнение движения получается варьированием действия по полю:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = -b(\sigma)b''(\sigma) + b'^2(\sigma) + 2b^3(\sigma) = 0. \quad (24)$$

Остальные три уравнения получаются варьированием действия по компонентам метрики $g_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} b'(\sigma)\phi_\sigma(\tau, \sigma) - 2b(\sigma)(\phi_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma) + b(\sigma)(A - \phi(\tau, \sigma))) &= T_{\tau\tau}(\tau, \sigma), \\ b'(\sigma)\phi_\tau(\tau, \sigma) - 2b(\sigma)\phi_{\tau\sigma}(\tau, \sigma) &= T_{\sigma\tau}(\tau, \sigma), \\ b'(\sigma)\phi_\sigma(\tau, \sigma) - 2b(\sigma)(b(\sigma)(\phi(\tau, \sigma) - A) + \phi_{\tau\tau}(\tau, \sigma)) &= T_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (25)$$

где, $T_{\alpha\beta}$ – тензор энергии импульса:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{matter}}{\delta g^{\alpha\beta}}. \quad (26)$$

Для начала найдем решение системы уравнений движения в случае отсутствия полей материи. Мы имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$-b(\sigma)b''(\sigma) + b'^2(\sigma) + 2b^3(\sigma) = 0, \quad (27)$$

$$2b(\sigma)(\phi_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma) + b(\sigma)(A - \phi(\tau, \sigma))) - b'(\sigma)\phi_\sigma(\tau, \sigma) = 0, \quad (28)$$

$$b'(\sigma)\phi_\tau(\tau, \sigma) - 2b(\sigma)\phi_{\tau\sigma}(\tau, \sigma) = 0, \quad (29)$$

$$b'(\sigma)\phi_\sigma(\tau, \sigma) - 2b(\sigma)(b(\sigma)(\phi(\tau, \sigma) - A) + \phi_{\tau\tau}(\tau, \sigma)) = 0,$$

Одно из частных решений первого уравнения системы имеет вид:

$$b(\sigma) = \frac{1}{\sin^2 \sigma}, \quad 0 < \sigma < \pi, \quad (30)$$

это решение задает двумерную метрику анти-де-Ситтера в глобальных координатах (τ, σ) . Подставив анзац (30) во второе уравнение системы, получаем:

$$\frac{1}{\sin(\sigma)} \left(\frac{1}{\sin^2(\sigma)} (A - \phi(\tau, \sigma)) + \phi_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma) + \cot(\sigma) \phi_{\sigma}(\tau, \sigma) \right) = 0 \quad (31)$$

В это уравнение входят производные только по переменной σ . Решение уравнения имеет вид:

$$\phi(\tau, \sigma) = A + \frac{1}{\sin(\sigma)} (C_1(\tau) - iC_2(\tau) \cos(\sigma)) \quad (32)$$

Это решение должно удовлетворять всем уравнениям системы. Чтобы найти неизвестные множители $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$, подставим найденное решение в третье и четвертое уравнения системы. Учитывая, что решение для метрики имеет вид (30), мы получаем систему уравнений для нахождения неизвестных функций $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$:

$$\begin{aligned} C_2'(\tau) &= 0, \\ -i \cos(\sigma) C_2''(\tau) + C_1''(\tau) + C_1(\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Решение системы уравнений (33) имеет вид:

$$\begin{aligned} C_1(\tau) &= C_3 \cos(\tau) + C_4 \sin(\tau), \\ C_2(\tau) &= C_5. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, решение системы уравнений движения поля дилатона для метрики в глобальных координатах принимает вид:

$$\phi(\tau, \sigma) = A + c_1 \frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} + c_2 \frac{\sin \tau}{\sin \sigma} + c_3 \frac{\cos \tau}{\sin \sigma}, \quad \sigma \in (0, \pi), \quad (35)$$

где c_1 , c_2 , c_3 – произвольные константы.

Рассмотрим точечную частицу, которая покоится в центре пространства анти-де-Ситтера в точке $\sigma = \frac{\pi}{2}$, заданного в глобальных координатах. Тензор энергии-импульса точечной покоящейся частицы в центре пространства имеет вид:

$$T_{\tau\sigma} = T_{\sigma\sigma} = 0, \quad (36)$$

$$T_{\tau\tau}(\sigma) = \frac{E}{\sqrt{b_G(\sigma)}\sqrt{-g}} \delta\left(\sigma - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E}{b_G^{3/2}(\sigma)} \delta\left(\sigma - \frac{\pi}{2}\right), \quad (37)$$

где E – энергия частицы. Тогда система уравнений для поля дилатона принимает вид:

$$\begin{aligned} b'(\sigma)\phi_\sigma(\tau, \sigma) - 2b(\sigma)(\phi_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma) + b(\sigma)(A - \phi(\tau, \sigma))) &= \frac{E}{b_G^{3/2}(\sigma)}\delta\left(\sigma - \frac{\pi}{2}\right), \\ b'(\sigma)\phi_\tau(\tau, \sigma) - 2b(\sigma)\phi_{\tau\sigma}(\tau, \sigma) &= 0, \\ b'(\sigma)\phi_\sigma(\tau, \sigma) - 2b(\sigma)(b(\sigma)(\phi(\tau, \sigma) - A) + \phi_{\tau\tau}(\tau, \sigma)) &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

Аналогично случаю в отсутствии полей материи, решаем систему уравнений движения, используя подстановку (30). Первое уравнение системы принимает вид:

$$\frac{1}{\sin^2(\sigma)}(\sin^2(\sigma)(\phi(\tau, \sigma) - A) - \phi_{\sigma,\sigma}(\tau, \sigma) - \cot(\sigma)\phi_\sigma(\tau, \sigma)) = E\delta(\pi - 2\sigma) \quad (39)$$

Решая уравнение относительно дилатона получаем:

$$\phi(\tau, \sigma) = A - iC_2(\tau)\cot(\sigma) + C_1(\tau)\frac{1}{\sin(\sigma)} + \frac{1}{2}E\theta(2\sigma - \pi)\cot(\sigma) - \frac{1}{2}E\cot(\sigma), \quad (40)$$

где $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ – некоторые неизвестные функции. Подставляя это решение в другие уравнения системы получаем систему уравнений на неизвестные функции $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$:

$$\begin{aligned} C_2'(\tau) &= 0, \\ -i\cos(\sigma)C_2''(\tau) + C_1''(\tau) + C_1(\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Урвнения в случае вакуумной теории и теории с неподвижной частицей совпадают, поэтому константы c_1 , c_2 , c_3 , которые войдут в выражение для поля дилатона совпадают для обеих теорий.

Таким образом в присутствии покоящейся точечной частицы решение уравнений движения (35) поля дилатона модифицируется как:

$$\phi(\tau, \sigma) = A + \theta(2\sigma - \pi)\frac{E\cos\sigma}{2\sin\sigma} + \left(c_1 - \frac{E}{2}\right)\frac{\cos\sigma}{\sin\sigma} + c_2\frac{\sin\tau}{\sin\sigma} + c_3\frac{\cos\tau}{\sin\sigma} \quad (42)$$

Асимптотики решения дилатона на двух границах¹ пространства анти-де-Ситтера:

$$\begin{aligned} \phi &= A + \frac{c_1 - E/2 + c_2\sin\tau + c_3\cos\tau}{\sigma} + O(\sigma), \quad \sigma \rightarrow 0 \\ \phi &= A + \frac{c_2\sin\tau + c_3\cos\tau - c_1}{\pi - \sigma} + O(\pi - \sigma), \quad \sigma \rightarrow \pi. \end{aligned} \quad (43)$$

¹В данном тексте под словом "граница" понимается "конформная граница".

Рассмотрим инвариантные относительно трансляций по времени конфигурации скалярного поля дилатона, когда $c_2 = c_3 = 0$:

$$\phi(\tau, \sigma) = A + \theta(2\sigma - \pi) \frac{E \cos \sigma}{2 \sin \sigma} + \left(c_1 - \frac{E}{2} \right) \frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \phi &= A + \frac{c_1 - E/2}{\sigma} + O(\sigma), \quad \sigma \rightarrow 0 \\ \phi &= A + \frac{-c_1}{\pi - \sigma} + O(\pi - \sigma), \quad \sigma \rightarrow \pi. \end{aligned} \quad (45)$$

Из выражений для асимптотик (45) видно, что при отрицательной энергии $E < 0$ можно так подобрать константы A и c_1 , что дилатон принимает положительные значения на обеих границах пространства анти-де-Ситтера. На Рис.1 построены несколько графиков дилатонного поля (44) для различных значений энергии и фиксированных значениях констант c_1 и A :

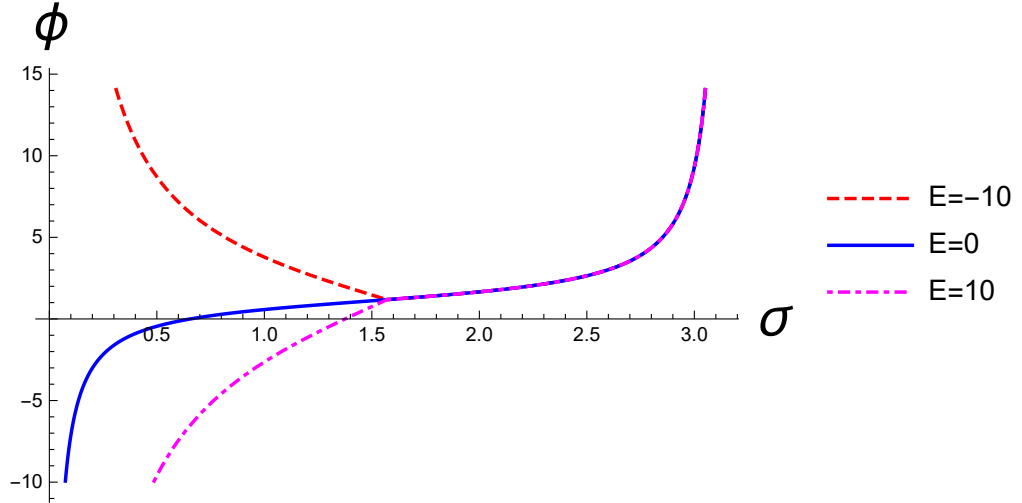


Рис. 1: Зависимость скалярного поля дилатона от σ при $c_2 = c_3 = 0$ и $c_1 = -1$. Пунктирная линия соответствует значению энергии $E = -10$, сплошная – $E = 0$, точка-пунктир – $E = 10$. $A = 1$

Рассмотрим внимательней точки пространства-времени, где скалярное поле дилатона ϕ обращается в ноль. Известно, что гравитационную теорию Джекива-Тейтельбойма можно получить размерной редукцией некоторой черной дыры высшей размерности, например, редукцией почти экстремальной черной дыры Рейснера-Нордстрема [31] или БТЗ-черной дыры [32]. После редукции, сингулярность черной дыры соответствует нулям поля дилатона. Используя такую интерпретацию в терминах пространств большей

размерности, будем в дальнейшем называть точки τ_0 , σ_0 , где поле дилатона обращается в ноль $\phi(\tau_0, \sigma_0) = 0$, точками сингулярности.

Для общего решения системы уравнений движения с произвольными коэффициентами c_1 , c_2 , c_3 существует несколько конфигураций дилатона (35) в отсутствии частицы, которые изображены на Рис.2.

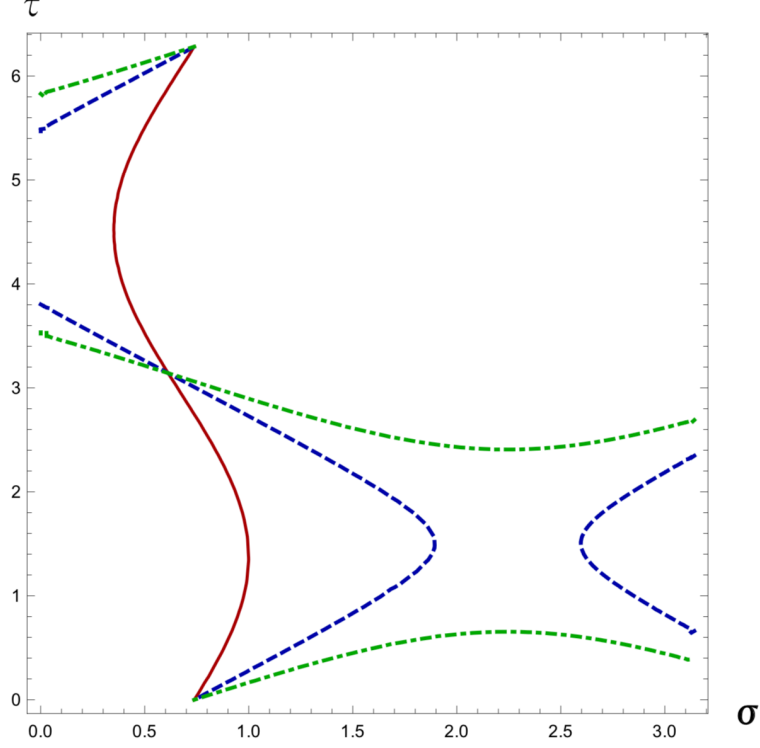


Рис. 2: Нули поля дилатона (35) при $A = 1$, $c_1 = -0.2$, $c_3 = 0.02$. Красная сплошная линия соответствует $c_2 = 0.1$, пунктирная синяя – $c_2 = 0.3$, точка-пунктир зеленая – $c_2 = 0.5$

Сплошная волнистая линия, обозначающая сингулярность, разделяет две границы, пунктирная – только части двух границ. Нули, обозначенные линией-точка-пунктир, «запирают» двумерный анти-де-Ситтер для трансляций времени во всем пространстве.

Проанализируем поведение дилатона (35) в окрестности границ пространства в отсутствии полей материи. Разрешим уравнение на сингулярные точки (нули дилатона) относительно переменной σ_0 . Решение уравнения:

$$\phi(\tau_0, \sigma_0) = A + c_1 \frac{\cos \sigma_0}{\sin \sigma_0} + c_2 \frac{\sin \tau_0}{\sin \sigma_0} + c_3 \frac{\cos \tau_0}{\sin \sigma_0} = 0, \quad (46)$$

имеет вид:

$$\sigma_0 = \arctan \left[\frac{2c_1\sqrt{F} - 2A(c_2 \sin(\tau_0) + c_3 \cos(\tau_0))}{-A\sqrt{F} - 4c_1(c_2 \sin(\tau_0) + c_3 \cos(\tau_0))} \right],$$

$$F = A^2 + 4c_1^2 - 4(c_2 \sin(\tau_0) + c_3 \cos(\tau_0))^2. \quad (47)$$

Точка экстремума функции $F(\tau)$ задается выражением:

$$\tau_{extr} = \arctan \left(\frac{c_2}{c_3} \right). \quad (48)$$

Условие возникновения «запертых» по времени областей анти-де-Ситтера – $F = 0$. Подставляя τ_{extr} в F , получаем, что трансляция возможна при:

$$c_3 = \sqrt{A^2 + c_1^2 - c_2^2}. \quad (49)$$

Условие проходимости (условие, когда нули дилатона отсутствуют) для системы, возмущенной статической точечной частицей, задается как:

$$\text{проходимость : } c_1 < \sqrt{c_2^2 + c_3^2}, \quad E = 2c_1 + \sqrt{c_2^2 + c_3^2} \quad (50)$$

Теперь рассмотрим точечную частицу, движущуюся в пространстве анти-де-Ситтера со скоростью v , меньшей скорости света. После буста, явный вид которого в глобальных координатах (см. Приложение А.2):

$$\sigma \rightarrow \operatorname{arccot} \left[\gamma \left(v \frac{\cos(\tau)}{\sin(\sigma)} + \cot(\sigma) \right) \right]$$

$$\tau \rightarrow \arccos \left[\frac{\gamma \left(\frac{\cos(\tau)}{\sin(\sigma)} + v \cot(\sigma) \right)}{\sqrt{1 + \gamma^2 \left(v \frac{\cos(\tau)}{\sin(\sigma)} + \cot(\sigma) \right)^2}} \right], \quad (51)$$

где:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (52)$$

Метрика остается той же, а траектория точечной частицы теперь имеет форму:

$$\sigma = \arccos (\pm v \cos \tau) \quad (53)$$

Вакуумная независящая от времени ($c_2 = c_3 = 0$) конфигурация дилатона после буста:

$$\phi = A + c_1 \gamma \cot(\sigma) + c_1 v \gamma \frac{\cos \tau}{\sin \sigma} \quad (54)$$

Из-за наличия частицы конфигурация дилатона меняется. С правой стороны от траектории (53) она имеет вид (54), а с левой стороны:

$$\phi = A + \left(c_1 - \frac{E}{2}\right) \gamma \cot(\sigma) + \left(c_1 - \frac{E}{2}\right) v \gamma \frac{\cos \tau}{\sin \sigma}. \quad (55)$$

На рис.3 представлены эти конфигурации для разных значений энергии E .

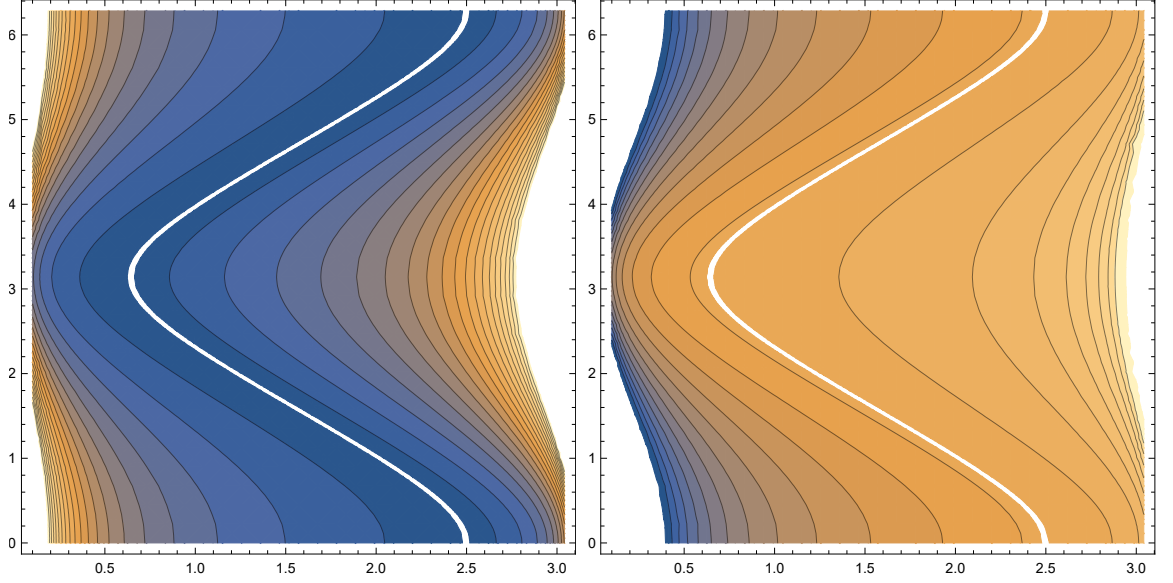


Рис. 3: Контурный график взаимодействия дилатона с массивной забустованной частицей. Скорость частицы $v = 0.8$, на правом графике $E = 3$, на левом – $E = -3$. Здесь $c_2 = c_3 = 0$ и $c_1 = -1$, $A = 0.5$ Белая кривая соответствует мировой линии частицы.

4 Энтропия зацепленности для теорий на левой и правой границе анти-де-Ситтера

Теперь рассмотрим эволюцию энтропии зацепленности (см. приложение С) в системе, которая является дуальной двумерному глобальному анти-де-Ситтеру, деформированному массивной частицей с конечным импульсом. Рассмотрим зацепленность между степенями свободы, живущими на левой и правой границах пространства. В $\text{AdS}_{d+1}/\text{CFT}_d$ -соответствии энтропия зацепленности соответствует площади минимальной гиперповерхности с ко-размерностью равной двум. В $\text{AdS}_2/\text{CFT}_1$ -соответствии это соответствие вырождается [35, 36]. Подробные детали соответствия в данном случае недостаточно изучены. Однако в случае глобального AdS_2 энтропия зацепленности [29] в фиксированный момент времени между левой и правой теориями задается минимальным значением дилатона:

$$S_{ent}(\tau) = \phi(\sigma, \tau) \Big|_{\sigma=\sigma_m}, \quad (56)$$

где σ_m – точка, в которой дилатон принимает свое минимальное значение ϕ_{\min} при фиксированном времени τ (см. также аналогичный случай для зацепленных черных дыр в [30]). На рис.5 продемонстрирована эволюция энтропии зацепленности для различных импульсов и энергии частиц.

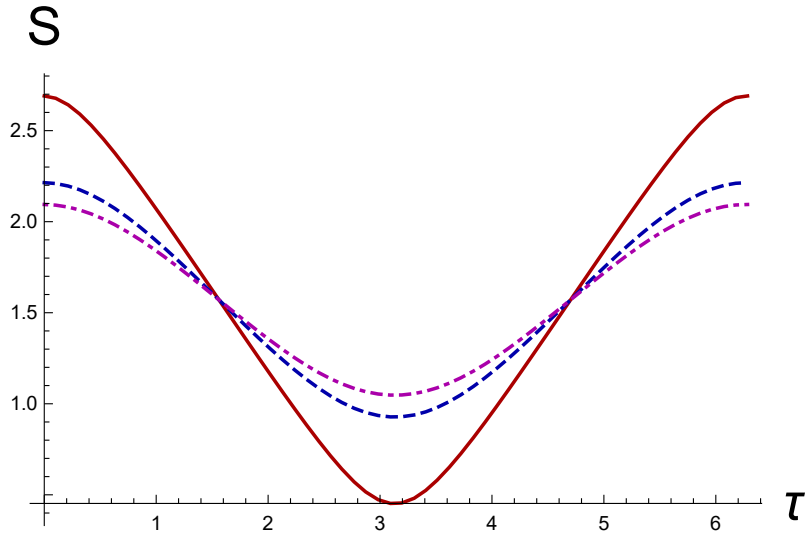


Рис. 4: Энтропия зацепленности для двумерного анти-де-Ситтера, возмущенного точечной частицей с различными значениями скорости буста v . Сплошная красная линия соответствует $v = 0.9$, пунктирная синяя – $v = 0.6$, точка-пунктир красная – $v = 0.5$

5 Заключение

Рассмотрена модель Алмхери-Полчинского двумерной гравитации с присутствием полей материи. Найдены решения уравнений движения для случая взаимодействия поля дилатона с точечной массивной частицей, двигающейся с произвольной скоростью. Получено условие на энергию статической частицы, когда кротовая нора становится проходимой. Изучена эволюция энтропии зацепленности для двух копий квантовых теорий, живущих на двух разных границах глобального анти-де-Ситтера, возмущенного точечной частицей. Рассмотрен вывод действия Шварцциана с помощью теории возмущения как эффективного действия дилатонной гравитации модели Джекива-Тейтельбойма.

Выражаю глубокую признательность своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук, профессору Белокурову Владимиру Викторовичу и научному консультанту кандидату физ.-мат. наук Агееву Дмитрию Сергеевичу за помощь на всех этапах выполнения дипломной работы. Особую благодарность хотелось бы выразить доктору физ.-мат. наук, профессору Арефьевой Ирине Ярославне и участникам её научного семинара за конструктивные замечания в ходе подготовки дипломной работы. Отдельная благодарность сотрудникам кафедры физики частиц и космологии за теплую атмосферу и возможность подготовить и защитить дипломную работу.

А Пространство анти-де-Ситтера

А.1 Геометрия

Рассмотрим двумерное пространство анти-де-Ситтера AdS_2 – максимально симметричное двумерное пространство с постоянной отрицательной скалярной кривизной R .

Двумерными пространствами постоянной кривизны являются: плоскость (когда кривизна тождественно равна нулю), сфера (кривизна больше нуля) и гиперболическая плоскость (кривизна меньше нуля).

Пространство анти-де-Ситтера AdS_2 имеет вид гиперboloида, вложенного в плоское трехмерное пространство $\mathbb{R}^{1,2}$. Дополнительная размерность соответствует дополнительной координате времени. Чтобы в плоском трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 вырезать двумерное пространство анти-де-Ситтера AdS_2 нужно наложить одно дополнительное условие на координаты. Зададим координаты трехмерного плоского пространства в виде $Z = (Z^0, Z^1, Z^2)$. Такие координаты называются координатами вложения. Метрика плоского пространства имеет вид:

$$ds^2 = \eta_{AB} dZ^A dZ^B \quad (57)$$

, где $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1)$ для евклидова пространства анти-де-Ситтера и $\eta = \text{diag}(-1, -1, 1)$ – для Лоренцева анти-де-Ситтера. Зададим скалярное произведение:

$$Z_1 \cdot Z_2 = \eta_{AB} Z_1^A Z_2^B \quad (58)$$

Тогда дополнительное условие на координаты имеет вид:

$$Z \cdot Z = -1 \quad (59)$$

– это уравнение задает гиперboloид, вложенный в трехмерное пространство. Евклидовый анти-де-Ситтер имеет вид двуполостного гиперboloида, лоренцевый анти-де-Ситтер – однополостного гиперboloида.

Рассмотрим также представление пространства анти-де-Ситтера в так называемых Пуанкаре координатах (t, z) . Метрика AdS_2 в координатах Пуанкаре имеет вид:

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} (\pm dt^2 + dz^2) \quad (60)$$

где, $z > 0$, $-\infty < t < \infty$ – координаты задают верхнюю полуплоскость. Координаты Пуанкаре покрывают половину пространства AdS_2 . $z = 0$ – конформная граница анти-де-Ситтера, $z = \infty$ – горизонт анти-де-Ситтера. Замена переменных от координат вложения Z к координатам Пуанкаре (t, z) :

$$Z = \pm \left(\frac{1 + t^2 + z^2}{2z}, \frac{t}{z}, \frac{1 - t^2 - z^2}{2z} \right) \quad (61)$$

Координаты, которые покрывают всё пространство-время анти-де-Ситтера, называются глобальными координатами. Метрика пространства анти-де-Ситтера в таких координатах (τ, σ) имеет вид:

$$ds^2 = \frac{\pm d\tau^2 + d\sigma^2}{\sin^2(\sigma)} \quad (62)$$

Эта метрика задает пространство анти-де-Ситтера в виде полосы $0 < \sigma < \pi$, $-\infty < \tau < \infty$ с двумя границами : $\sigma = 0$, $\sigma = \pi$.

Метрику глобального анти-де-Ситтера можно получить заменой координат из метрики в координатах Пуанкаре:

$$t = \frac{1}{2} \left(\tan \left(\frac{\tau + \sigma}{2} \right) + \tan \left(\frac{\tau - \sigma}{2} \right) \right), \quad (63)$$

$$z = \frac{1}{2} \left(\tan \left(\frac{\tau + \sigma}{2} \right) - \tan \left(\frac{\tau - \sigma}{2} \right) \right) \quad (64)$$

Вся поверхность гиперboloида двумерного анти-де-Ситтера, вложенного в плоское трехмерное пространство, параметризуется следующим образом:

$$Z_0 = -\frac{\cos(\tau)}{\sin(\sigma)}, \quad (65)$$

$$Z_1 = -\cot(\sigma), \quad (66)$$

$$Z_2 = -\frac{\sin(\tau)}{\sin(\sigma)} \quad (67)$$

Обратные преобразования от глобальных координат к Пуанкаре координатам имеют вид:

$$\tau = \arctan(t + z) + \arctan(t - z), \quad (68)$$

$$\sigma = \arctan(t + z) - \arctan(t - z), \quad (69)$$

и обратные преобразования от глобальных координат к координатам плоского трехмерного пространства:

$$\sigma = \pi - \operatorname{arccot} \tan(Z_1), \quad (70)$$

$$\tau = \arccos \frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_1^2}}, \quad (71)$$

$$\text{или } \tau = \arcsin \frac{Z_2}{\sqrt{1 + Z_1^2}} \quad (72)$$

Рассмотрим метрику в координатах Риндлера (ρ, t_r) (они покрывают только часть пространства анти-де-Ситтера):

$$ds^2 = -M^2 \sinh^2(\rho) dt_r^2 + d\rho^2 \quad (73)$$

После замены переменных $\rho = \operatorname{arccosh} \frac{R}{M}$, $t_r = t_{shc}$ метрика в координатах Шварцшильда (t_{shc}, R) имеет вид:

$$ds^2 = -(R^2 - M^2) dt_{sch}^2 + \frac{dR^2}{R^2 - M^2}. \quad (74)$$

Таким образом риндлеровские координаты описывают черную дыру. Отметим, что в такой метрике отсутствует сингулярность, свойственная многомерным черным дырам. Сингулярность черной дыры в решениях дилатонной гравитации понимается в смысле поведения дилатона (точки сингулярности отождествляются с точками, где дилатон обращается в ноль). Преобразования переменных от Пуанкаре координат к Риндлеровским имеет вид:

$$z_{\pm} = z \pm t = \frac{(1 \pm \cosh(\rho))e^{Mt_r/2} \mp \sinh(\rho)e^{-Mt_r/2}}{(1 \pm \cosh(\rho))e^{Mt_r/2} \pm \sinh(\rho)e^{-Mt_r/2}} \quad (75)$$

Метрику в риндлеровских координатах можно также получить с помощью параметризации координат трехмерного плоского пространства $Z = (Z^0, Z^1, Z^2)$, в которое вложен гиперболоид пространства анти-де-Ситтера:

$$Z_0 = \frac{1}{2} (\sinh(\rho)e^{t_r} - \sinh(\rho)e^{-t_r}) \quad (76)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} (\sinh(\rho)e^{t_r} + \sinh(\rho)e^{-t_r}) \quad (77)$$

$$Z_2 = \cosh(\rho) \quad (78)$$

Заменой координат $r = \tanh(\rho/2)$ из евклидовой метрики в риндлеровских координатах (ρ, t_r) получается метрика модели диска Пуанкаре, описываемой метрикой:

$$ds^2 = \frac{4}{(1-r^2)^2} (dr^2 + M^2 r^2 dt_r^2) \quad (79)$$

К метрике Пуанкаре диска переход от координат вложения имеет вид:

$$Z = \left\{ \frac{r^2 + 1}{1 - r^2}, -\frac{2r \cos(M\tau)}{r^2 - 1}, -\frac{2r \sin(M\tau)}{r^2 - 1} \right\} \quad (80)$$

$$\text{если } M = 1 : \pm \left(\frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}, \frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} \right) \quad (81)$$

Напомним, что AdS_2 -черную дыру определяют как двумерное пространство анти-де-Ситтера с выделенным направлением времени. Все двумерные пространства отрицательной кривизны локально эквивалентны AdS_2 . Черная дыра соответствует специальному выбору времени t_{Sch} так, что $-\infty < t_{Sch} < \infty$ не покрывает полностью AdS_2 . Горизонтом черной дыры является поверхность, из-под которой геодезические не могут попасть в область $-\infty < t_{Sch} < \infty$.

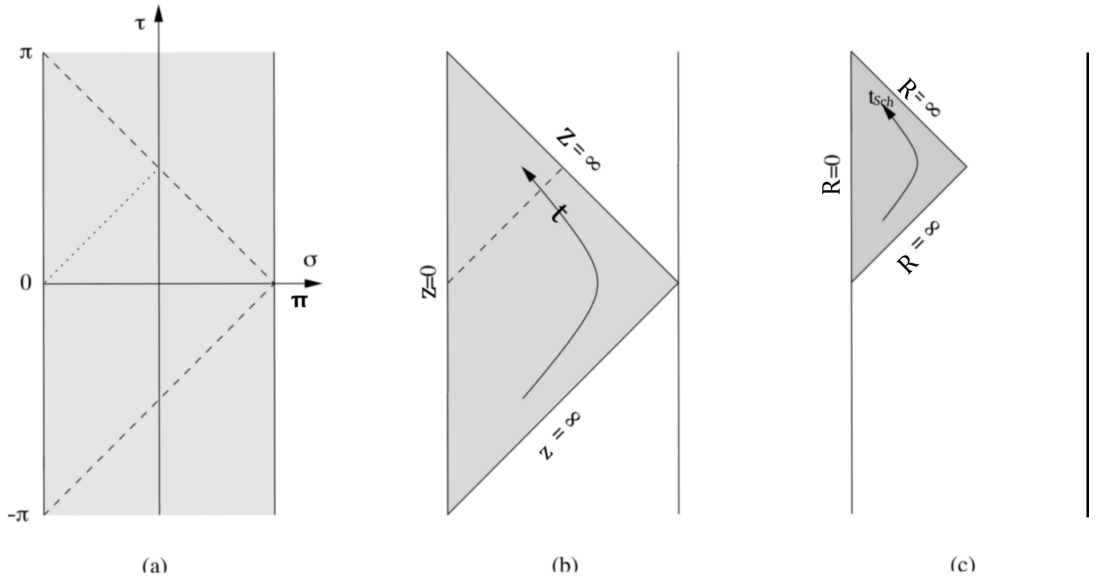


Рис. 5: (a)– AdS_2 в глобальных координатах, (b)– координаты Пуанкаре, (c)– координаты Шварцшильда

А.2 Бусты

Буст переводит гиперboloид, заданный в координатах Z , в гиперboloид в координатах Y :

$$Z_0 = \gamma(Y_0 + vY_1), \quad (82)$$

$$Z_1 = \gamma(vY_0 + Y_1), \quad (83)$$

$$Z_2 = Y_2, \quad (84)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (85)$$

v -скорость.

Буст в Пуанкаре координатах (t, z) имеет вид:

$$t^2 = \frac{\tilde{t}^2(1 - v)}{1 + v} \quad (86)$$

$$z = \frac{\sqrt{1 - v}\tilde{z}}{\sqrt{1 + v}} \quad (87)$$

Буст в глобальных координатах задается выражениями:

$$\sigma = \operatorname{arccotan} \left[\gamma \left(v \frac{\cos(\tilde{\tau})}{\sin(\tilde{\sigma})} + \cot(\tilde{\sigma}) \right) \right] \quad (88)$$

$$\tau = \arccos \left[\frac{\gamma \left(\frac{\cos(\tilde{\tau})}{\sin(\tilde{\sigma})} + v \cot(\tilde{\sigma}) \right)}{\sqrt{1 + \gamma^2 \left(v \frac{\cos(\tilde{\tau})}{\sin(\tilde{\sigma})} + \cot(\tilde{\sigma}) \right)^2}} \right] \quad (89)$$

Буст в риндлеровских координатах (ρ, t_r) выглядит:

$$\rho = -\arcsin(\sin(\tilde{\rho})) \quad (90)$$

$$T = \pm \operatorname{arccosh} \left(-\frac{\cosh(\tilde{T}) + v \sinh(\tilde{T})}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \quad (91)$$

или

$$\rho = \arcsin(\sin(\tilde{\rho})) \quad (92)$$

$$T = \pm \operatorname{arccosh} \left(\frac{\cosh(\tilde{T}) + v \sinh(\tilde{T})}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \quad (93)$$

В Получение действия Шварцциана из AdS_2 для координат Пуанкаре

Рассмотрим пространство анти-де-Ситтера в евклидовых Пуанкаре координатах:

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(dt^2 + dz^2) \quad (94)$$

Проанализируем уравнения движения в теории Джекив-Тейтельбойма. Действие такой теории имеет вид:

$$S_{JT} = -\frac{1}{16\pi G} \left(\int dt dz \phi \sqrt{g}(R + 2) + 2 \int_{bdy} dy \sqrt{g_{bdy}} \phi_{bdy} K \right) \quad (95)$$

где K – внешняя кривизна, R – скаляр Риччи. Отрежем пространство по траектории, параметризованной в виде $(t(u), z(u))$. Фиксируем точную длину кривой с помощью маленького параметра $\epsilon \rightarrow 0$:

$$g|_{bdy} = \frac{1}{\epsilon^2}, \quad (96)$$

$$\frac{1}{\epsilon^2} = \frac{t'^2 + z'^2}{z^2}, \quad (97)$$

Чтобы разрешить уравнение (97) относительно переменной z воспользуемся анзацем вида:

$$z = z_1(u)\epsilon + z_2(u)\epsilon^2 + z_3(u)\epsilon^3 + \dots, \quad (98)$$

Подстановка анзаца в уравнение позволяет найти коэффициент при первой степени ϵ :

$$1 - \frac{t'^2(u)}{z_1^2(u)} = 0, \quad (99)$$

$$z_1(u) = t'(u) \quad (100)$$

Теперь в уравнение (97) подставляем анзац в виде:

$$z = t'(u)\epsilon + z_2(u)\epsilon^2 + z_3(u)\epsilon^3 + \dots, \quad (101)$$

получаем ответ для коэффициента при второй степени ϵ :

$$z_2(u) = 0 \quad (102)$$

Анзац принимает вид:

$$z = t'(u)\epsilon + z_3(u)\epsilon^3 + \dots, \quad (103)$$

и после его подстановки в уравнение получаем:

$$z_3(u) = \frac{1}{2} \frac{t''^2(u)}{t'(u)} \quad (104)$$

Итоговый ответ с точностью до ϵ^3 включительно можно записать в виде:

$$z = \epsilon t' \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{t''}{t'} \right)^2 \right) + \dots \quad (105)$$

Таким образом, мы можем написать еще одно граничное условие:

$$\phi_{bdy} = \phi|_{bdy} = \frac{\phi_r(u)}{\epsilon} \quad (106)$$

Граничный член в действии можно переписать в виде:

$$S_{TJ} \rightarrow -\frac{1}{8\pi G} \int \frac{du}{\epsilon} \frac{\phi_r(u)}{\epsilon} K, \quad (107)$$

где K —внешняя кривизна. Вычислим K . Для этого воспользуемся определением K в виде:

$$K = -\frac{h(T, \nabla_T n)}{h(T, T)}, \quad (108)$$

$$h(X, Y) = h_{ab} X^a X^b, \quad (109)$$

или расписав явно скалярные произведения:

$$K = \frac{T^\mu}{(T)^2} \nabla_T n_\mu \quad (110)$$

$$T^a = (t', z'), \quad (111)$$

$$T_a = \left(\frac{t'}{z^2}, \frac{z'}{z^2} \right), \quad (112)$$

$$h(T, n) = 0, \quad h(n, n) = 1. \quad (113)$$

где n^a —нормаль, T^a — тангенсальный вектор. Из системы уравнений (113) получаем явное выражение для нормального вектора в Пуанкаре координатах:

$$n^a = \frac{z}{\sqrt{z'^2 + t'^2}} (-z', t'), \quad (114)$$

$$n_a = \frac{1}{z\sqrt{z'^2 + t'^2}} (-z', t') \quad (115)$$

Для вычисления внешней кривизны нам понадобятся символы Кристоффеля для метрики анти-де-Ситтера в Пуанкаре координатах:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad (116)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{z}, \quad (117)$$

$$\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{z}. \quad (118)$$

Используя (110)-(112), (114)-(118) внешняя кривизна вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} K &= \frac{T^\mu}{(T)^2} \nabla_T n_\mu = \frac{T^\mu}{(T)^2} \left(\frac{\partial n_\mu}{\partial u} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho n_\rho T^\nu \right) = \\ &= \frac{T^1}{(T)^2} \left(\frac{\partial n_1}{\partial u} - \Gamma_{11}^1 n_1 T^1 - \Gamma_{12}^1 n_1 T^2 - \Gamma_{11}^2 n_2 T^1 - \Gamma_{12}^2 n_2 T^2 \right) + \\ &+ \frac{T^2}{(T)^2} \left(\frac{\partial n_2}{\partial u} - \Gamma_{21}^1 n_1 T^1 - \Gamma_{22}^1 n_1 T^2 - \Gamma_{21}^2 n_2 T^1 - \Gamma_{22}^2 n_2 T^2 \right) = \\ &= \frac{t'}{(t'^2 + z'^2)/z^2} \left(\frac{\partial n_1}{\partial u} + \frac{1}{z} n_1 z' - \frac{1}{z} n_2 t' \right) + \\ &+ \frac{z'}{(t'^2 + z'^2)/z^2} \left(\frac{\partial n_2}{\partial u} + \frac{1}{z} n_1 t' + \frac{1}{z} n_2 z' \right) = \\ &= -\frac{t'(t'^2 + z'^2 + zz'') - zz't''}{(t'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (119)$$

Подставим найденное выше выражение для z в K и оставим второй порядок по ϵ :

$$K = -1 + \epsilon^2 \frac{3(t''(u))^2 - 2t'(u)t'''(u)}{2(t'(u))^2} = -1 - \epsilon^2 S(t(u), u) + O(\epsilon^4), \quad (120)$$

где $S(t(u), u)$ – производная Шварца:

$$S(t(u), u) = \frac{2t't''' - 3t''^2}{2t'^2}. \quad (121)$$

В итоге мы получим, что эффективное действие дилатонной гравитации описывается Шварцианом:

$$S_{eff} = \frac{1}{8\pi G} \int du \phi_r(u) S(t(u), u). \quad (122)$$

С Энтропия зацепленности двух связанных осцилляторов

Мы хотим посчитать энтропию зацепленности для двух связанных осцилляторов по формуле:

$$S = -\text{Tr}(\rho \log \rho) \quad (123)$$

Обозначим волновые функции двух несвязанных друг с другом систем, состоящие каждая из одного осциллятора, соответственно $|A\rangle \in H_A$ —для первой системы, $|B\rangle \in H_B$ —для второй. А состояние составной системы из двух связанных осцилляторов

$$|\Psi\rangle \in H_{AB} = H_A \otimes H_B \quad (124)$$

Матрица плотности связанной системы задается формулой:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (125)$$

Определение приведенной матрицы плотности:

$$\rho_A = \sum_j \langle j|_B |\Psi\rangle\langle\Psi| |j\rangle_B = \text{Tr}_B \rho \quad (126)$$

Рассмотрим гамильтониан системы двух связанных осцилляторов:

$$H = \frac{1}{2}[p_1^2 + p_2^2 + k_0(x_1^2 + x_2^2) + k_1(x_1 - x_2)^2], \quad (127)$$

где k_1, k_2 —константы. Решая задачу на собственные вектора и собственные значения, можно найти нормированную волновую функцию основного состояния системы:

$$\psi_0(x_1, x_2) = \pi^{-1/2}(w_+ w_-)^{1/4} \exp[-(w_+ x_+^2 + w_- x_-^2)/2], \quad (128)$$

где $x_{\pm} = (x_1 \pm x_2)/\sqrt{2}$, $w_+ = k_0^{1/2}$, и $w_- = (k_0 + 2k_1)^{1/2}$.

Тогда приведенную матрицу плотности можно найти проинтегрировав матрицу плотности по координате x_1 :

$$\begin{aligned} \rho_A(x_2, x'_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \psi_0(x_1, x_2) \psi_0^*(x_1, x'_2) \\ &= \pi^{-1/2}(\gamma - \beta)^{1/2} \exp[-\gamma(x_2^2 + x_2'^2)/2 + \beta x_2 x_2'] , \end{aligned} \quad (129)$$

где $\beta = \frac{1}{4}(w_+ - w_-)^2/(w_+ + w_-)$ и $\gamma - \beta = 2w_+w_-/(w_+ + w_-)$.

Чтобы посчитать энтропию зацепленности (123) удобно найти собственные значения p_n приведенной матрицы плотности $\rho_A(x_2, x'_2)$. Тогда формула для расчета энтропии зацепленности упрощается:

$$S = - \sum_n p_n \log(p_n) \quad (130)$$

Задача на собственные значения матрицы записывается в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \rho_A(x, x') f_n(x') = p_n f_n(x) \quad (131)$$

И ее решения (методом подбора):

$$\begin{aligned} p_n &= (1 - \xi) \xi^n \\ f_n(x) &= H_n(\alpha^{1/2} x) \exp(-\alpha x^2/2) \end{aligned} \quad (132)$$

где H_n – полиномы Эрмита, $\alpha = (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} = (w_+ w_-)^{1/2}$, $\xi = \beta/(\gamma + \alpha)$, $0 < n < \infty$. Выражения (132) подразумевают, что ρ_A эквивалентна тепловой матрице плотности одиночного гармонического осциллятора с частотой α и температурой $T = \alpha/\log(\frac{1}{\xi})$. Тогда энтропия выглядит:

$$S(\xi) = -\log(1 - \xi) - \frac{\xi}{1 - \xi} \log \xi \quad (133)$$

где ξ – функция, зависящая только от отношения k_1/k_0 .

D Термополевая двойка

Вечная черная дыра в анти-де-Ситтере (максимально расширенное пространство AdS) имеет две границы, каждая из которых соответствует одной копии конформной теории поля. Другими словами, вечная черная дыра дуальна двум копиям конформной теории поля. Связь между теорией теплового поля и этим удвоением степеней свободы называется «термополевой двойкой».

Рассмотрим систему с гамильтонианом H_1 , которая может находиться в нескольких состояниях, обозначаемых $|n\rangle_1$:

$$H_1 |n\rangle_1 = E_{n_1} |n\rangle_1 \quad (134)$$

Пусть у нас есть смешанное состояние системы с матрицей плотности в виде:

$$\rho_1 = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_1} \quad (135)$$

Посмотрим как из этого смешанного состояния можно получить чистое состояние для большей по числу состояний системы. Для этого удвоим число степеней свободы первоначальной системы. Мы рассматриваем две одинаковых копии квантовомеханической системы, которые живут в разных пространствах-времени. Они не связаны друг с другом, и состояние удвоенной системы записывается в виде:

$$|\Psi\rangle = |m\rangle_1 |n\rangle_2 \quad (136)$$

Каждое смешанное состояние системы, принадлежащее конечномерному Гильбертову пространству, может быть получено как приведенное состояние из некоторого чистого состояния. Эта процедура получила название «очищение смешанного квантового состояния». Иными словами, если верно утверждение:

$$\text{Tr}_2 (|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \rho_1, \quad (137)$$

то говорят, что $|\Psi\rangle$ очищает ρ_1 . Таким образом, любое смешанное состояние может быть очищено путем добавления достаточного количества вспомогательных состояний и взятие следа по ним.

Теперь в удвоенной системе рассмотрим «термополеву двойку». Для её определения необходимо ввести статистическую сумму. В квантовомеханической системе с дискретным спектром энергии статистическая сумма определяется как:

$$Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}) \quad (138)$$

Тогда «термополевая двойка» $|\Phi\rangle$ в двойной системе записывается в виде:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n\rangle_1 |n\rangle_2 \quad (139)$$

Запишем матрицу плотности двойной квантовомеханической системы в этом состоянии:

$$\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi| \quad (140)$$

Вычислим приведенную матрицу плотности по формуле (126):

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_2 \rho &= \\
&= \sum_m \langle m|_2 \left(\sum_{n,n'} e^{-\beta E_n/2} |n\rangle_1 |n\rangle_2 \langle n'|_2 \langle n'|_2 e^{-\beta E_{n'}/2} \right) |m\rangle_2 \\
&= \sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle_1 \langle n|_1 = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_1} \\
&\equiv \rho_1 \quad (141)
\end{aligned}$$

Таким образом чистое состояние в двойной системе неотлично от термического состояния. Рассмотрим, например, локальный оператор $O_1 = \phi_1(x_1)\chi_1(y_1) \cdots$ действующий на первую систему с гамильтонианом H_1 . Тогда:

$$\langle \Phi | O_1 | \Phi \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}_{H_1} e^{-\beta H_1} O_1 \quad (142)$$

Хотя первая и вторая система не связаны в лагранжиане двойной системы они коррелируют в состоянии. Если рассмотреть еще один локальный оператор O_2 , действующий только на вторую систему, получим, что выражение:

$$\langle \Phi | O_1 O_2 | \Phi \rangle \quad (143)$$

может не равняться нулю.

Для удобства определим гамильтониан двойной системы следующим способом:

$$H_{total} = H_1 - H_2 \quad (144)$$

При таком выборе гамильтониана «термическая двойка» не зависит от времени, так как фазовые множители сократятся:

$$|\Phi(t)\rangle \equiv e^{-iH_{total}t} |\Phi\rangle = \sum_n e^{-\beta E_n/2} e^{-i(H_1 - H_2)t} |n\rangle_1 |n\rangle_2 = |\Phi\rangle \quad (145)$$

Список литературы

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. «Введение в теорию квантованных полей»
2. Б.Цвибах «Начальный курс теории струн», 2011
3. Aref'eva, I. Ya. "Holographic approach to quark–gluon plasma in heavy ion collisions." *Physics-Uspekhi* 57.6 (2014): 527.
4. J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999) [*Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998)] doi:10.1023/A:1026654312961, 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1 [hep-th/9711200].
5. S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from noncritical string theory,” *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998) doi:10.1016/S0370-2693(98)00377-3 [hep-th/9802109].
6. E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998) doi:10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2 [hep-th/9802150].
7. Jackiw, R. (1985). Lower dimensional gravity. *Nuclear Physics B*, 252, 343-356. doi:10.1016/0550-3213(85)90448-1
8. Teitelboim, C. (1983). Gravitation and Hamiltonian structure in two spacetime dimensions. *Physics Letters B*, 126(1-2), 41-45. doi:10.1016/0370-2693(83)90012-6
9. Frolov, V. P. (1992). Two-dimensional black hole physics. *Physical Review D*, 46(12), 5383. doi:10.1103/PhysRevD.46.5383
10. M. Spradlin and A. Strominger, “Vacuum states for AdS(2) black holes,” *JHEP* **9911**, 021 (1999) doi:10.1088/1126-6708/1999/11/021 [hep-th/9904143].
11. M. O. Katanaev, W. Kummer and H. Liebl, “Geometric interpretation and classification of global solutions in generalized dilaton gravity,” *Phys. Rev. D* **53**, 5609 (1996) doi:10.1103/PhysRevD.53.5609 [gr-qc/9511009].
12. M. O. Katanaev, “Effective action for scalar fields in two-dimensional gravity,” *Annals Phys.* **296**, 1 (2002) doi:10.1006/aphy.2001.6259 [gr-qc/0101033].

13. A. Almheiri and J. Polchinski, “Models of AdS_2 backreaction and holography,” JHEP **1511**, 014 (2015) doi:10.1007/JHEP11(2015)014 [arXiv:1402.6334 [hep-th]].
14. J. Maldacena, D. Stanford and Z. Yang, “Conformal symmetry and its breaking in two dimensional Nearly Anti-de-Sitter space,” PTEP **2016**, no. 12, 12C104 (2016) doi:10.1093/ptep/ptw124 [arXiv:1606.01857 [hep-th]].
15. I. Kourkoulou and J. Maldacena, “Pure states in the SYK model and nearly- AdS_2 gravity,” arXiv:1707.02325 [hep-th].
16. K. Jensen, “Chaos in AdS_2 Holography,” Phys. Rev. Lett. **117**, no. 11, 111601 (2016) doi:10.1103/PhysRevLett.117.111601 [arXiv:1605.06098 [hep-th]].
17. J. Engelsoy, T. G. Mertens and H. Verlinde, “An investigation of AdS_2 backreaction and holography,” JHEP **1607**, 139 (2016) doi:10.1007/JHEP07(2016)139 [arXiv:1606.03438 [hep-th]].
18. J. Maldacena and X. L. Qi, “Eternal traversable wormhole,” arXiv:1804.00491 [hep-th].
19. D. Bagrets, A. Altland and A. Kamenev, Nucl. Phys. B **911**, 191 (2016) doi:10.1016/j.nuclphysb.2016.08.002 [arXiv:1607.00694 [cond-mat.str-el]].
20. V. V. Belokurov and E. T. Shavgulidze, “Exact solution of the Schwarzian theory,” Phys. Rev. D **96**, no. 10, 101701 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.96.101701 [arXiv:1705.02405 [hep-th]].
21. Subir Sachdev and Jinwu Ye, "Gapless spin-fluid ground state in a random quantum Heisenberg magnet" Phys. Rev. Lett. 70, 3339 – Published 24 May 1993 doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.3339
22. A. Kitaev, “A simple model of quantum holography,” <http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/> (2015)
23. J. Maldacena and D. Stanford, “Remarks on the Sachdev-Ye-Kitaev model,” Phys. Rev. D **94**, no. 10, 106002 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.94.106002 [arXiv:1604.07818 [hep-th]].
24. I. Aref’eva and I. Volovich, “Spontaneous symmetry breaking in fermionic random matrix model,” arXiv:1902.09970 [hep-th].

25. I. Aref'eva, M. Khramtsov, M. Tikhonovskaya and I. Volovich, "Replica-nondiagonal solutions in the SYK model," arXiv:1811.04831 [hep-th].
26. P. Gao, D. L. Jafferis and A. Wall, "Traversable Wormholes via a Double Trace Deformation," JHEP **1712**, 151 (2017) doi:10.1007/JHEP12(2017)151 [arXiv:1608.05687 [hep-th]].
27. J. Maldacena, D. Stanford and Z. Yang, "Diving into traversable wormholes," Fortsch. Phys. **65**, no. 5, 1700034 (2017) doi:10.1002/prop.201700034 [arXiv:1704.05333 [hep-th]].
28. D. Bak, C. Kim and S. H. Yi, "Transparentizing Black Holes to Eternal Traversable Wormholes," JHEP **1903**, 155 (2019) doi:10.1007/JHEP03(2019)155 [arXiv:1901.07679 [hep-th]].
29. Y. Chen and P. Zhang, "Entanglement Entropy of Two Coupled SYK Models and Eternal Traversable Wormhole," arXiv:1903.10532 [hep-th].
30. A. Goel, H. T. Lam, G. J. Turiaci and H. Verlinde, "Expanding the Black Hole Interior: Partially Entangled Thermal States in SYK," JHEP **1902**, 156 (2019) doi:10.1007/JHEP02(2019)156 [arXiv:1807.03916 [hep-th]].
31. J. Navarro-Salas and P. Navarro, "AdS(2) / CFT(1) correspondence and near extremal black hole entropy," Nucl. Phys. B **579**, 250 (2000) doi:10.1016/S0550-3213(00)00165-6 [hep-th/9910076].
32. A. Achucarro and M. E. Ortiz, "Relating black holes in two-dimensions and three-dimensions," Phys. Rev. D **48**, 3600 (1993) doi:10.1103/PhysRevD.48.3600 [hep-th/9304068].
33. S. Ryu and T. Takayanagi, "Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT," Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006) doi:10.1103/PhysRevLett.96.181602 [hep-th/0603001].
34. V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, "A Covariant holographic entanglement entropy proposal," JHEP **0707**, 062 (2007) doi:10.1088/1126-6708/2007/07/062 [arXiv:0705.0016 [hep-th]].
35. A. Castro and F. Larsen, "Near Extremal Kerr Entropy from AdS(2) Quantum Gravity," JHEP **0912**, 037 (2009) doi:10.1088/1126-6708/2009/12/037 [arXiv:0908.1121 [hep-th]].

- 36. T. Azeyanagi, T. Nishioka and T. Takayanagi, “Near Extremal Black Hole Entropy as Entanglement Entropy via $\text{AdS}(2)/\text{CFT}(1)$,” *Phys. Rev. D* **77**, 064005 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.77.064005 [arXiv:0710.2956 [hep-th]].
- 37. N. Callebaut and H. Verlinde, “Entanglement Dynamics in 2D CFT with Boundary: Entropic origin of JT gravity and Schwarzian QM,” arXiv:1808.05583 [hep-th].
- 38. J. Lin, “Entanglement entropy in Jackiw-Teitelboim Gravity,” arXiv:1807.06575 [hep-th].
- 39. Агеев Д.С., Арефьева И.Я., Лысухина А.В., "О кротовых норах в гравитации Джекива-Тейтельбойма, Теоретическая и математическая физика, 2019