Массивное скалярное поле в качестве тёмной материи

Агафонов Григорий
208 группа.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, член-корреспондент РАН, г.н.с. ОТФ ИЯИ РАН Горбунов Дмитрий Сергеевич.

Москва, 2019 г.

МГУ им. М.В.Ломоносова.
Физический факультет.

Введение

Известно, что тёмная материя составляет около 25% полной плотности энергии современной Вселенной. Вероятно, что она состоит из новых частиц, отсутсвующих в Стандартной модели. Из астрономических наблюдений следует, что эти частицы должны быть нерелятивистскими, слабо взаимодействующими как друг с другом, так и с обычным веществом.

В данной работе рассматривается простейшая модель массивного скалярного поля с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^* + \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi) - \frac{m}{2} |\phi|^2.$$

Физическим примером такой модели может являться аксион. Это гипотетическая частица, возникающая при решении проблемы CP-сохранения в сильных взаимодействиях.

Постановка задачи

Одним из интересных физических эффектов, возникающих в такой модели, является Бозе конденсация за счёт гравитационного взаимодействия.

Принято считать, что темп Бозе конденсации на MD стадии Γ пропорционален плотности энергии скалярного поля ρ_ϕ, т.е

$$\Gamma \propto \rho_\phi$$

Цель данной работы - показать, что темп Бозе конденсации на MD стадии Γ пропорционален неоднородности плотности энергии $\delta\rho_\phi$, а также обобщить данный результат на RD стадию при некоторых дополнительных условиях.

$$\Gamma \propto \delta\rho_\phi$$

Скалярное поле на MD стадии

Для скалярного поля можно получить уравнения движения, простой вариацией действия.

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi + m^2\phi = 0$$

где $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ – символы Кристоффеля, которые полностью определяются метрикой $g_{\mu\nu}$.

Взяв в качестве $g_{\mu\nu}$ возмущенную метрику Фридмана

$$g_{\mu\nu} = diag((1+2\Psi), -a^2(1-2\Phi), -a^2(1-2\Phi), -a^2(1-2\Phi))$$

где $\Psi = \Psi(\vec{x}, t), \Phi = \Phi(\vec{x}, t)$ и считая Ψ=Φ, что верно на MD стадии.

Скалярное поле на MD стадии

Получим уравнение движения для скалярного поля :

$$\boxed{(1-2\Phi)\ddot{\phi}+(3H-4\dot{\Phi}-6H\Phi)\dot{\phi}-\frac{1+2\Phi}{a^2}\Delta\phi+m^2\phi=0} \quad (1)$$

Из уравнений Эйнштейна можно получить :

$$\boxed{\Delta\Phi-3Ha^2(\dot{\Phi}+H\Phi)=4\pi Ga^2\delta\rho} \quad (2)$$

где $\delta\rho=\bar{\rho}_\phi-\rho_\phi$ - пространственная неоднородность полной плотности энергии.

Скалярное поле на MD стадии

На MD стадии основной вклад в неоднородности плотности энергии, как и в саму плотность энергии, вносит скалярное поле. Зная Лагранжиан скалярного поля, нетрудно найти канонический тензор энергии импульса, а следовательно и плотность энергии.

$$\rho_\phi = \frac{1-2\Psi}{2}|\dot{\phi}|^2 + \frac{1+2\Phi}{2a^2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}m^2|\phi|^2 \tag{3}$$

Пространственно однородная плотность энергии:

$$\bar{\rho}_\phi = \frac{1}{2}(|\dot{\bar{\phi}}|^2 + m^2|\bar{\phi}|^2) \tag{4}$$

Таким образом, по сути мы знаем чему равна неоднородность плотности энергии $\delta\rho = \bar{\rho}_\phi - \rho_\phi$.

Уравнение Шрёдингера-Пуассона на MD стадии

Будем искать решение уравнений (1)(2) в виде:

$$\phi = \frac{e^{-imt}}{a^{3/2}}\psi$$

где ψ - медленно меняющаяся функция по сравнению с фактором e^{-imt}.

Учитывая также соотношения для плотностей, полученные раньше (3)(4)

Уравнение Шрёдингера-Пуассона на MD стадии

Перепишем уравнение движения скалярного поля (1)

$$(1-2\Phi)(\ddot{\psi}-2im\dot{\psi})-4\dot{\Phi}(\dot{\psi}-im\psi)=\frac{1+2\Phi}{a^2}\Delta\psi-$$
$$2[m^2\Phi-\frac{3}{4}(\dot{H}+\frac{3}{2}H^2)(1-2\Phi)+3H\dot{\Phi}]\psi \quad (5)$$

Перепишем уравнение для гравитационного потенциала (2)

$$\Delta\Phi-3Ha^2(\dot{\Phi}+H\Phi)=\frac{4G\pi}{a}(\frac{1-2\Phi}{2}[|\dot{\psi}|^2-3HRe(\dot{\psi}\psi^*)-2mIm(\dot{\psi}\psi^*)]+$$
$$+\frac{1+2\Phi}{2a^2}|\nabla\psi|^2+m^2(|\psi|^2-|\bar{\psi}|^2)(1+\frac{9H^2}{8m^2})-m^2|\psi|^2\Phi[1+\frac{9H^2}{4m^2}]) \quad (6)$$

Уравнение Шрёдингера-Пуассона на MD стадии

Сделаем некоторые приближения :

1. Берём скалярное поле в качестве холодной тёмной материи, т.е как предел быстрых осциляций

$$\frac{H}{m} \ll 1, \quad \dot{H} \sim H^2$$

2. Рассматриваем характерные размеры неоднородностей l с масштабом:

$$\frac{1}{m} \ll l \ll \frac{1}{H}, \quad l \sim \frac{1}{\sqrt{Hm}}$$

Также, довольно естественным выглядит введение малого параметра $\epsilon = \frac{1}{ml}$

Уравнение Шрёдингера-Пуассона на MD стадии

Более подробный анализ позволяет оценить порядок малости членов, входящих в уравнения (5)(6)

- $\psi \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)\mathcal{M}_{Pl}$
- $\frac{\dot{\psi}}{m} \sim \mathcal{O}(\epsilon^4)\mathcal{M}_{Pl}$
- $\frac{\ddot{\psi}}{m^2} \sim \mathcal{O}(\epsilon^6)\mathcal{M}_{Pl}$
- $\frac{\Delta\psi}{m^2} \sim \mathcal{O}(\epsilon^4)\mathcal{M}_{Pl}$
- $\Phi \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$
- $\frac{\Delta\Phi}{m^2} \sim \mathcal{O}(\epsilon^4)$
- $\frac{\dot{\Phi}}{m} \sim \mathcal{O}(\epsilon^4)$
- $\frac{H}{m} \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$

где $\mathcal{M}_{Pl} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$

Уравнение Шрёдингера-Пуассона на MD стадии

Оставляя в уравнениях (5)(6) члены по порядку малости не выше ϵ^4, получаем систему уравнений Шрёдингера-Пуассона:

$$\begin{cases} i\dot{\psi} = -\frac{\Delta\psi}{2a^2 m} + \frac{m\Phi_0\psi}{a} \\ \Delta\Phi_0 = 4\pi G m^2(|\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2) \end{cases} \tag{7}$$

где $\Phi_0 \equiv \frac{\Phi}{a}$, а $\bar{\psi}$ - функция ψ усредненная по пространству

Уравнение Шрёдингера-Пуассона на MD стадии

Из уравнения типа Пуассона

$$\Phi_0(t, \vec{r}) = -\frac{Gm^2}{a} \int d^3y \frac{|\psi(t, \vec{y})|^2 - |\bar{\psi(t)}|^2}{|\vec{r} - \vec{y}|} \tag{8}$$

Подставляя (8) в уравнение Шрёдингера, находим Гамильтониан системы

$$H(t, \vec{r}) = -\frac{\Delta}{2ma^2} - \frac{Gm^3}{a^2} \int d^3y \frac{|\psi(t, \vec{y})|^2 - |\bar{\psi(t)}|^2}{|\vec{r} - \vec{y}|} \tag{9}$$

Второе слагаемое в гамилильтониане отвечает гравитационному взаимодействию поля

$$\boxed{H_g(t, \vec{r}) = -\frac{Gm^3}{a^2} \int d^3y \frac{|\psi(t, \vec{y})|^2 - |\bar{\psi(t)}|^2}{|\vec{r} - \vec{y}|}} \tag{10}$$

Уравнение Шрёдингера-Пуассона на MD стадии

Более подробный анализ показывает, что $|\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2 = \delta\rho_\phi$

Тогда из вида Гамильтониана следует, что темп релаксации комплексного скалярного поля пропорционален неоднородности плотности энергии

$$\boxed{\Gamma \propto \delta\rho_\phi} \tag{11}$$

Неоднородности на RD стадии

Оказывается, что на RD стадии можно получить полностью аналогичную ситуацию при некоторых дополнительных условиях.

Тут нам будет удобно пользоваться конформными координатами $(\eta, \vec{x})$.В этих координатах время меняется так, чтобы невозмущенная метрика Фридмана записывалась в виде

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^i dx^i) = a(\eta)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

На рассматриваемой нами RD стадии параметр Хаббла представим в виде:

$$H = \frac{1}{a\eta}$$

Неоднородности на RD стадии

Запишем уравнения Эйнштейна в случае возмущенной метрике, учитывая не только доминирующую радиацию, но и возмущение скалярного поля.Штрихом обозначается производная по конформному времени.

$$k^2\Phi + 3\frac{a^{'}}{a}\Phi^{'} + 3(\frac{a^{'}}{a})^2\Phi = -4\pi G a^2(\delta\rho_\gamma + \delta\rho_\phi) \tag{12}$$

$$\Phi^{''} + 3\frac{a^{'}}{a}\Phi^{'} + (2\frac{a^{''}}{a} - (\frac{a^{'}}{a})^2)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_\gamma \tag{13}$$

где $\delta\rho_\gamma$ - неоднородность плотности энергии радиации, $\delta\rho_\phi$ - неоднородность плотности энергии скалярного поля, δp_γ - неоднородность давления радиации

Неоднородности на RD стадии

Складывая уравнения (12) и (13), используя уравнение Фридмана, (ij) компоненты уравнений Эйнштейна для однородного случая, а также уравнение состояния, получаем

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta}\Phi' + \frac{1}{3}k^2\Phi = -\frac{4}{3}\pi G a^2 \delta\rho_\phi \tag{14}$$

Решение для мод глубоко под горизонтом $k\eta \gg 1$ ищем в виде $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$, где Φ_0 - часть потенциала, создаваемая радиацией, а $\delta\Phi$ - часть создаваемая скалярным полем, тогда решение :

Неоднородности на RD стадии

$$\Phi = -6\Phi_{(i)} cos(\frac{q}{\sqrt{3}H})\frac{H_{eq}^2}{q^2}\left(\frac{g_*^{\frac{1}{3}}(T)T}{g_*^{\frac{1}{3}}(T_{eq})T_{eq}}\right)^4 + \\ + \frac{27\Phi_{(i)}H_{eq}^2}{4q^2} ln(\frac{q}{\sqrt{3}H})\left(\frac{g_*^{\frac{1}{3}}(T)T}{g_*^{\frac{1}{3}}(T_{eq})T_{eq}}\right)^3 \quad (15)$$

где $\Phi_{(i)}$ - амплитуда моды, q - физический импульс, T - температура, $g_*(T)$ - число эффективных степеней свободы, а параметры с пометкой eq относятся к моменту перехода от RD к MD стадии

Неоднородности на RD стадии

Для заданной температуры можно выбрать достаточно большие импульсы так, чтобы потенциал Φ полностью определялся скалярным полем, т.е

$$\delta\Phi \gg \Phi_0$$

Это верно при

$$\boxed{q \gg \sqrt{3} H(T) exp\left(\left(\frac{g_*^{\frac{1}{3}}(T)T}{g_*^{\frac{1}{3}}(T_{eq})T_{eq}}\right)^{\frac{26}{27}}\right)} \tag{16}$$

Таким образом, выбирая достаточно малые размеры неоднородностей, мы получаем ситуацию полностью аналогичную MD стадии. В частности

$$\boxed{\Gamma \propto \delta\rho_\phi}$$

Список литературы

- Губарев К.А. - "Аксионы тёмной материи в расширяющейся вселенной: Выпускная работа"
- Рубаков В.А Горбунов Д.С - "Введение в теорию ранней вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория"
- L. Arturo Ureña López - "Non-relativistic approach for cosmological Scalar Field Dark Matter"
- P.Sikivie - "Dark matter axions."
- Рубаков В.А - "Классические калибровочные поля. Бозонные теории"
- Рубаков В.А Горбунов Д.С - "Введение в теорию ранней вселенной. Теория горячего Большого взрыва"
- Ландау Л.Д Лифшиц Е.М - "Теория поля"