Формирование первичных черных дыр

Мандрыгин Семён

13 мая 2019 г.

План работы

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучения влияния спектра начальных возмущений на вероятность образования первичных черных дыр

ПЛАН

- Формирование произвольных объектов на пылевидной стадии
- Формирование первичных черных дыр
- Влияние спектра на вероятность образования объектов
- Обсуждение результатов

Формирование произвольных объектов

Сглаженный контраст плотности

$$\delta_{r_1}(\mathbf{x}, t) = \int d^3 y \delta(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) W_{r_1}(y) \tag{1}$$

Функция окна

$$W_{r_1}(y) = \frac{3}{4\pi} \frac{a_e}{r_1^3} \theta\left(r_1 - a_e |y|\right) \tag{2}$$

Нормировка

$$\int W_{r_1}(y) d^3 y = 1 \tag{3}$$

Условие коллапса области размера r_1

$$\delta_{r_1} \geq \delta_c = 1,686 \tag{4}$$

При фиксированном t:

$$\delta(\mathbf{x}, t) - \text{ гауссова случайная величина } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_{r_1}(\mathbf{x}, t) - \text{ гауссова случайная величина}$$

Дисперсия $\delta_{r_1}(\mathbf{x}, t)$

$$\sigma^2_{r_1}(t) \equiv \langle \delta^2_{r_1}(\mathbf{x}, t) \rangle \tag{5}$$

Связь между Фурье-образами

$$\delta_{r_1}(\mathbf{k}, t) = \int d^3y W_{r_1}(y) e^{i\mathbf{ky}} \delta(\mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{k}, t) W_{r_1}(k) = \delta(\mathbf{k}, t) \frac{3 j_1(kr_1/a_e)}{kr_1/a_e} \tag{6}$$

$j_1(kr_1/a_e)$ - сферическая функция Бесселя первого порядка

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

Дисперсия

$$\sigma^2_{r_1}(t) = \int d^3k d^3k' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k'})\mathbf{x}} |W_{r_1}(k)|^2 \langle \delta(\mathbf{k}, t)\delta(\mathbf{k'}, t)\rangle \tag{7}$$

Двухточечный коррелятор:

$$\langle \delta(\mathbf{k}, t)\delta(\mathbf{k'}, t)\rangle = \frac{P(k)}{(2\pi)^3}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k'}) = \frac{\delta_i(k)}{4\pi k^3}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k'}) \tag{8}$$

$$\delta_i(k) = A\left(\frac{k}{k_e}\right)^{n_s-1} \tag{9}$$

$A = 5 \cdot 10^{-5}$ - Амплитуда скалярных возмущений
Дисперсия

$$\sigma_{r_1}^2(t) = \int\limits_{a_\times H_\times}^{a_e H_e} \frac{dk}{k} A \left(\frac{k}{k_e}\right)^{n_s - 1} \frac{9 j_1^2(k r_1/a_e)}{(k r_1/a_e)^2} \tag{10}$$

$k_e/a_e = H_e$ - первые зашедшие моды, $k_\times/a_\times = H_\times$ - последние зашедшие моды
На МД - стадии возмущения растут по закону:

$$\delta(\mathbf{k}, t) = \frac{a(t)}{a_\times}\delta_i \tag{11}$$

Экспериментальные ограничения

$$H_e < 10^{13}\ \text{ГэВ}$$

$$\sqrt{H_e M_{pl}} > 10\ \text{МэВ}$$

В рамках данной работы примем

$$H_e = 10^7\ \text{ГэВ}, H_{RD} = 1\ \text{ГэВ}$$

Вероятность достижения критического контраста δ_c

$$P_{\delta_c} = P\left(\delta_{r_1} \geq \delta_c\right) = \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{d\delta}{\sqrt{2\pi}\sigma_{r_1}} e^{-\dfrac{\delta}{2\sigma_{r_1}^2}} \tag{12}$$

Формирование ПЧД

На момент начала сжатия конфигурация характеризуется следующими величинами

- Средняя плотность конфигурации $\langle\rho\rangle$;
- Характерный размер конфигурации r_1: $M = \frac{4}{3}\pi\langle\rho\rangle r_1^3$;
- Степень отклонения конфигурации от сферической симметрии s: $s = max\{|\gamma_1 - \gamma_2|, |\gamma_1 - \gamma_3|, |\gamma_2 - \gamma_3|\}$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - главные значения тензора деформации рассматриваемой конфигурации;
- Неоднородность распределения плотности по конфигурации u: $u = (\rho_c - \langle\rho\rangle)/\langle\rho\rangle$, ρ_c - плотность в центре конфигурации.

Образование ПЧД означает сжатие до r_g. Плотность в этот момент

$$\rho_{BH} = \frac{M}{4/3\pi r_g^3} = \langle\rho\rangle \cdot \left(\frac{r_1}{r_g}\right)^3 = \langle\rho\rangle \cdot x^{-3} \tag{13}$$

$\triangle r \lesssim s \cdot R$ - характерная начальная сплюснутость конфигурации, τ_{com} - характерное время коллапса, $v \lesssim sR/\tau_{com}$ - характерное различие начальных скоростей сжатия по различным осям, то в ходе сжатия минимально достижимый размер конфигурации $r_{min} \gtrsim min[\tau_{com} \cdot \triangle v; \triangle r]$. Тогда максимально достижимая плотность с сохранением симметрии близкой к сферической:

$$\rho_{max} \sim \langle\rho\rangle s^{-3} \tag{14}$$

Получаем ограничение на величину s :

$$s \lesssim x \lesssim 1 \tag{15}$$

Не должно образовываться каустики

$$t_{form} < t_{caus} \tag{16}$$

Ограничение на u

$$u \lesssim x^{3/2} \Rightarrow P_u = P\left(u \lesssim x^{3/2}\right) \sim x^{3/2}, x = \frac{r_g}{r_1} \tag{17}$$

Вероятность обладания достаточной степенью сферической симметричности

$$P_s = P\left(s \lesssim x\right) = \frac{27}{8\sqrt{5}\pi} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{9}{10}\gamma_1^2} d\gamma_1 \int\limits_{\gamma_1 - \gamma_1 x}^{\gamma_1} \left(\gamma_1 - \gamma_2\right) d\gamma_2$$

$$\int\limits_{\gamma_1 - \gamma_1 x}^{\gamma_2} \left(\gamma_1 - \gamma_2\right)\left(\gamma_2 - \gamma_3\right) d\gamma_3 \approx 2 \cdot 10^{-2} x^5$$

Минимальная вероятность образования черной дыры из конфигурации, вступившей в нелинейную стадию развития возмущений

$$P_{PBH} = P_s \cdot P_u \approx 2 \cdot 10^{-2} x^{13/2} \tag{18}$$

Плотность черных дыр на МД-стадии

$$P = P_s \cdot P_u \cdot P_{\delta_c} \approx 2 \cdot 10^{-2} x^{13/2} \cdot P_{\delta_c} \tag{19}$$

Влияние спектра

В нелинейную стадию вступает

$$\lambda = \lambda_\times \frac{a(t)}{a_\times} \tag{20}$$

На МД-стадии

$$\delta(\mathbf{k}, t) = \frac{a(t)}{a_\times}\delta_i = \frac{a(t)}{a_\times} A \left(\frac{k}{k_e}\right)^{n_s - 1} \tag{21}$$

Величину x можно переписать в виде

$$x \sim \frac{GM}{\lambda} \sim GMH_\times \cdot A \left(\frac{k}{k_e}\right)^{n_s - 1} \tag{22}$$

где $H_\times^{-1} = \lambda_\times$

$$\langle x\rangle \sim \frac{\int\limits_{k_\times}^{k_e} x(k)dk}{k_e - k_\times} = \frac{\int\limits_{k_\times}^{k_e} GMH_\times \cdot A\left(\frac{k}{k_e}\right)^{n_s-1} dk}{k_e - k_\times} \tag{23}$$

- $n_s - 1 = 2$

$$\langle x\rangle \sim \frac{GMH_{RD}A\left(k_e^3 - k_{RD}^3\right)}{3k_e^2\left(k_e - k_{RD}\right)} \approx \frac{1}{3}GMH_{RD}A \tag{24}$$

- $n_s - 1 = 1$

$$\langle x\rangle \sim \frac{GMH_{RD}A\left(k_e^2 - k_{RD}^2\right)}{2k_e\left(k_e - k_{RD}\right)} \approx \frac{1}{2}GMH_{RD}A \tag{25}$$

- $n_s - 1 = 0$

$$\langle x \rangle \sim \frac{GMH_{RD}A\,(k_e - k_{RD})}{(k_e - k_{RD})} \approx GMH_{RD}A \tag{26}$$

- $n_s - 1 = -1$

$$\langle x \rangle \sim \frac{GMH_{RD}Ak_e}{(k_e - k_{RD})} \cdot ln\left(\frac{k_e}{k_{RD}}\right) \approx GMH_{RD}A \cdot 5,4 \tag{27}$$

Между $n_s - 1 = 2$ и $n_s - 1 = -1$ в P_{PBH} будет 8 ! порядков

Дисперсия

- $n_s - 1 = 2$:

$$\sigma^2_{r_1}(t) = \frac{9A}{H_e^2 r_1^2}\left(\frac{-2\eta^2 + 2\eta\sin 2\eta + \cos 2\eta - 1}{8\eta^4}\right)\Bigg|_{\eta_1}^{\eta_2} \tag{28}$$

Здесь была введена замена: $\eta = kr_1/a_e$. Тогда пределы выглядят следующим образом:

$$\eta_2 = H_e r_1 \tag{29}$$

$$\eta_1 = H_{RD} r_1 \frac{a_{RD}}{a_e} \tag{30}$$

На пылевидной стадии

$$H_{RD} = H_e \left(\frac{a_e}{a_{RD}}\right)^{3/2} \tag{31}$$

Тогда выражение для нижнего предела можно переписать в виде:

$$\eta_1 = \left(H_{RD} H_e^2\right)^{1/3} r_1 \tag{32}$$

Оценим величины η_1 и η_2, используя ранее принятые значение H_{RD} и H_e. Также учтем связь между см и ГэВ:

$$1 \text{ см} = 5 \cdot 10^{13} \text{ ГэВ}^{-1} \tag{33}$$

$$\eta_2 = 10^7 \text{ ГэВ } r_1 \tag{34}$$

$$\eta_1 = (1 \cdot 10^{14})^{1/3} \text{ ГэВ } r_1 \approx 4,64 \cdot 10^4 \text{ ГэВ } r_1 \tag{35}$$

Поэтому на масштабах длин 10^{-17} см и далее можно считать, что $\eta_1, \eta_2 \gg 1$, причем $\eta_2 \gg \eta_1$.

- $n_s - 1 = 1$

$$\sigma^2_{r_1}(t) = \frac{9A}{H_e r_1}\Big(\frac{4\eta^5 Si(2\eta) + \eta^3 \sin 2\eta - 5\eta^2}{30\eta^5} +$$

$$+ \frac{(2\eta^4 - \eta^2 + 3)\cos 2\eta + 6\eta \sin 2\eta - 3}{30\eta^5}\Big)\Big|_{\eta_1}^{\eta_2}$$

- $n_s - 1 = 0$

$$\sigma^2_{r_1}(t) = 9A\Big(\frac{8\eta^6 Ci(2\eta) - 4\eta^5 \sin 2\eta + 2\eta^3 \sin 2\eta - 9\eta^2 +}{72\eta^6} +$$

$$+ \frac{(2\eta^4 - 3\eta^2 + 6)\cos 2\eta + 12\eta \sin 2\eta - 6}{72\eta^6}\Big)\Big|_{\eta_1}^{\eta_2}$$

- $n_s - 1 = -1$

$$\sigma^2_{r_1}(t) = 9AH_e r_1\Big(\frac{-8\eta^7 Si(2\eta) - 2\eta^5 \sin 2\eta + 3\eta^3 \sin 2\eta - 14\eta^2}{140\eta^7} +$$

$$\frac{2(-2\eta^6 + \eta^4 + 5)\cos 2\eta + 20\eta \sin 2\eta - 10}{140\eta^7}\Big)\Big|_{\eta_1}^{\eta_2}$$

Выводы

- С уменьшением $n_s - 1$ растет вероятность образования первичных черных дыр

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!