Суперсимметричная квантовая механика и точные энергетические спектры

Медведев Алексей Сергеевич
208 группа.
Научный руководитель: кандидат физ.-мат. наук, с.н.с. ОТФ ИЯИ РАН Демидов Сергей Владимирович.

МГУ им. М.В.Ломоносова.
Физический факультет.

Москва, 2019 г.

Введение

Суперсимметрия

Это преобразования, которые превращают бозон в фермион и наоборот, причем гамильтониан системы инвариантен относительно таких преобразований. Также алгебра этой симметрии должна включать как коммутационные, так и антикоммутационные соотношения.

Цели работы:

- Найти спектры энергий для известных потенциалов с помощью знаний о суперсимметричной квантовой механике.
- Построить форминвариантный потенциал, с мультипликативной связью параметров и рассчитать спектр энергий для него.

Алгебра суперсимметрии

Рассмотрим простейшую систему: гармонический осциллятор с одной бозонной и одной фермионной степенью свободы.

$$H = \hbar\omega(a_b^+ a_b^- + a_f^+ a_f^-) \ . \tag{1}$$

Опираясь на определение суперсимметрии найдем вид генераторов суперсимметрии Q_+ и Q_-:

$$Q_+ = q a_b^- a_f^+ \ , \qquad Q_- = q a_b^+ a_f^- \ , \tag{2}$$

где q $\in \mathbb{R}$.
Введем пару операторов Q_1 и Q_2:

$$Q_1 = Q_+ + Q_- \ , \qquad Q_2 = -i(Q_+ - Q_-) \ . \tag{3}$$

Объединяя все коммутационные и антикоммутационные соотношения придем к простейшей супералгебре:

$$\begin{cases} \{Q_i, Q_j\} = 2H\delta_{ij} \ , \\ [H, Q_i] = 0 \ , \end{cases} \tag{4}$$

где i,j=1,2.

Свойства супералгебры

Отметим два ключевых свойства суперсимметричных теорий:

1) Неотрицательность спектра гамильтониана

Следует из того, что $H = Q_1^2 = Q_2^2$, а Q_1 и Q_2 – эрмитовы.

2) Двукратное вырождение отличных от нуля уровней гамильтониана

Если $|\lambda\rangle$ – собственный для Q_1, то есть

$$Q_1 |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle \ , \qquad H |\lambda\rangle = \lambda^2 |\lambda\rangle \ ,$$

то $|\psi\rangle = Q_2 |\lambda\rangle$ – собственный для Q_1 и H:

$$Q_1 |\psi\rangle = -\lambda |\psi\rangle \ , \qquad H |\psi\rangle = \lambda^2 |\psi\rangle \ . \tag{5}$$

Система с взаимодействием и суперпотенциал.

Рассмотрим обобщение системы рассмотренной ранее: бозонные операторы рождения и уничтожения заменим на некоторые функции от данных операторов.

$$\begin{cases} Q_+ = B^-(a_b^+, a_b^-)a_f^+ \ , \\ Q_- = B^+(a_b^+, a_b^-)a_f^- \ . \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что гамильтониан останется суперсимметричным, но будет включать некоторое взаимодействие. Гамильтониан такой системы:

$$H = \frac{1}{2}\left\{B^-, B^+\right\} + \frac{1}{2}\left[B^-, B^+\right]\sigma_3 \ . \tag{7}$$

Гамильтониан можно представить через фермионные операторы. Тогда он будет действовать на двукомпонентные волновые функции $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}$.

Зададим конкретный вид для $B^{\pm}$:

$$B^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp ip + W(x)\right) \ , \tag{8}$$

Система с взаимодействием и суперпотенциал

тогда для $H_{\pm}$:

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + W^2(x) + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial x} W(x)\right) \ . \qquad (9)$$

Переписывая H в виде матриц 2×2:

$$H = \begin{pmatrix} B^- B^+ & 0 \\ 0 & B^+ B^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \ . \qquad (10)$$

Тогда гамильтониан суперсимметричной квантовой механики можно представить в виде совокупности двух гамильтонианов:

$$H_{\pm} = \frac{1}{2}\left(p^2 + W^2(x) \pm W'(x)\right) \ . \qquad (11)$$

Отметим, что здесь и далее будем работать в системе $\hbar = m = 1$.

Система с взаимодействием и суперпотенциал

Встаёт вопрос: какие свойства для осциллятора сохранятся для этой системы?

1) Двукратное вырождение уровней

Действительно, ведь данное свойство обеспечивается выполнением условий на супералгебру.

2) Наличие нулевого уровня

Решая задачу по поиску состояния с нулевой энергией при помощи разрешения уравнения первого порядка получим две волновые функции:

$$\begin{cases} \psi_1 = C_1 exp\left\{ -\int\limits_{x_0}^{x} W(t)dt \right\} , \\ \psi_2 = C_2 exp\left\{ \int\limits_{x_0}^{x} W(t)dt \right\} . \end{cases} \tag{12}$$

Система с взаимодействием и суперпотенциал

Для того, чтобы эти функции были собственными для гамильтониана необходимо, чтобы ψ_1 и ψ_2 были квадратично интегрируемы. Для ψ_1:

$$\int_{x_0}^{x} W(t)dt \to \infty \, , x \to \pm\infty. \tag{13}$$

Для ψ_2:

$$\int_{x_0}^{x} W(t)dt \to -\infty \, , x \to \pm\infty. \tag{14}$$

Поэтому существует всего одна волновая функция и один гамильтониан, соответствующие состоянию с нулевой энергией. Но может сложиться ситуация, когда ни одна из функций не может быть нормируема.

Примеры

Суперсимметричную квантовую механику можно применять для аналитического нахождения точного спектра. Но пользоваться таким подходом можно лишь для ограниченного числа систем, суперсимметричные гамильтонианы которых удовлетворяют соотношению:

$$\begin{cases} H_+(a_2) = H_-(a_1) + G(a_1), \\ a_2 = a_1 + p. \end{cases} \tag{15}$$

Потенциалы, которые соответствуют таким гамильтонианам называются форминвариантными.

Примеры

Рассчёт спектра проводится следующим образом:

- Из вида суперпотенциала определяем, существует ли уровень с нулевой энергией. В случае положительного ответа, понять, какой из гамильтонианов H_+ или H_- им обладает.
- В силу наличия нулевого уровня, H_- имеет нулевой уровень при любых параметрах. Используя условие форминвариантности находим E_1 для H_+. Из-за двукратного вырождения уровней, такой же энергией обладает и H_-. Найденный уровень положим нулевым, и следующий будем считать от него.
- Делая на каждом шаге новую замену параметров, получаем значение энергии на каждом новом уровне.
- В конце сложим все значения энергий, полученных на различных уровнях, и найдем спектр энергий E_n.

Пользуясь данной схемой, можно найти уровни энергий для известных потенциалов.

Примеры

Гармонический осциллятор

$$E_n = \omega(n + \frac{1}{2}) \ . \tag{16}$$

Модифицированный потенциал Пёшля-Теллера: $V(x) = -\frac{a(a+1)}{2ch^2(x)}$

$$E_n = -\frac{(a-n)^2}{2} \ . \tag{17}$$

Кулоновский потенциал: $V(r) = -\frac{\gamma}{r}$

$$E_n = -\frac{\gamma^2}{2(l+n)^2} \ . \tag{18}$$

Форминвариантные потенциалы

При рассмотрении примеров мы отмечали , что все рассмотренные суперсимметричные гамильтонианы, а значит, и потенциалы представлялись в виде:

$$\begin{cases} V_{\pm}(x, a_2) = V_{\mp}(x, a_1) + G(a_1), \\ a_2 = a_1 + p, \end{cases} \tag{19}$$

Такие потенциалы – форминвариантные.
Произведём замену параметров по другому закону: $a_2 = q \times a_1$ ($q \in \mathbb{R}$). Поставим задачу: рассчитать уровни энергий для такого вида форминвариантного потенциала.

$$G(a_1) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i a_1^i, \ W(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) a_1^i, \tag{20}$$

где g_i – произвольные константы, а $f_i(x)$ – неизвестные функции.

Форминвариантные потенциалы

Чтобы использовать суперсимметричную квантовую механику необходимо явно найти вид суперпотенциала, то есть найти функции $f_n(x)$.

$$V_-(x, a_1) = W^2(x) - W'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_i(x) f_k(x) a_1^{i+k} - \sum_{i=0}^{\infty} f_i'(x) a_1^i.$$

Производя замену индексов $i + k = n$ получим:

$$V_-(x, a_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_1^n \left[\sum_{i=0}^{n} f_i(x) f_{n-i}(x) - f_n'(x) \right]. \qquad (21)$$

А из условия форминвариантности:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_1^n \left[\sum_{i=0}^{n} f_i(x) f_{n-i}(x) + f_n'(x) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_1^n \left[\sum_{i=0}^{n} f_i(x) f_{n-i}(x) - f_n'(x) + g_n \right].$$

Приравнивая коэффициенты при a_1 получим вид функций f_n:

Форминвариантные потенциалы

$$f_n(x) = \frac{1}{1+q^n} \sum_{i=0}^{n} \int [(1-q^n) f_i(x) f_{n-i}(x) + g_n] dx. \qquad (22)$$

Для дальнейших вычислений необходимо положить $f_0(x) = 0$. Также будем считать, что все константы интегрирования равны нулю. Отсюда видно, что суперпотенциал является рядом по нечётным степеням x. Этот факт подсказывает, что воспользоваться знаниями о суперсимметрии для рассчёта спектра возможно. Однако необходимо накладывать дополнительные условия на параметры g_n, a_1, q. Для упрощения рассчётов рассмотрим два случая: $g_1 \neq 0$ и $g_1, g_2 \neq 0$.

Форминвариантные потенциалы

$g_1 \neq 0$

$$f_0(x) = 0\ , \qquad (n = 0),$$

$$f_1(x) = \frac{g_1}{1+q}x\ , \qquad (n = 1),$$

$$f_2(x) = \frac{1-q^2}{1+q^2}\frac{g_1^2}{3(1+q)^2}x^3\ , \qquad (n = 2),$$

Далее по индукции:

$$f_n(x) = \frac{1-q^n}{1+q^n}\sum_{i=0}^{n}\int [f_i(x)f_{n-i}(x)]dx\ , \qquad (n \neq 1).$$

Суперпотенциал имеет вид: $W(x, a_1) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^{2n-1}$

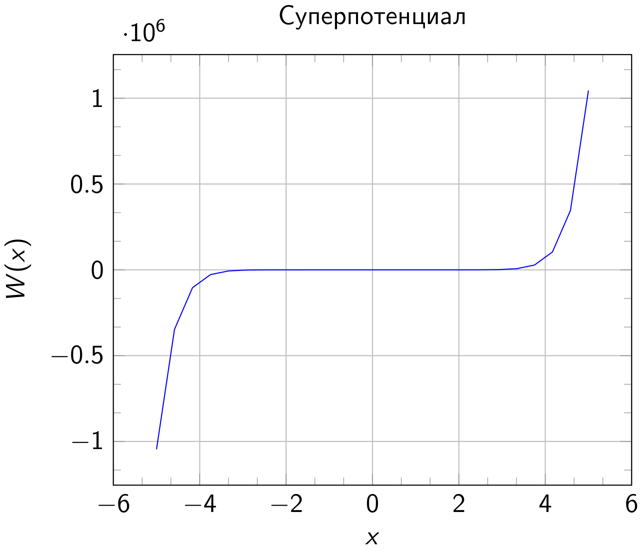
Форминвариантные потенциалы

$g_1 \neq 0$

Для того, чтобы при данном виде суперпотенциала существовало состояние с нулевой энергией, необходимо ограничить параметры g_1, a_1, q:

- a_1 и g_1 должны иметь одинаковые знаки.
- $q \in (0, 1)$.

Форминвариантные потенциалы



Вид суперпотенциала при $a = 0.5$, $a_1 = 1$, $g_1 = 1.5$, $n = 7$.

Форминвариантные потенциалы

$g_1 \neq 0$

Из вида суперпотенциала нулевой уровень имеет $H_-(a_1)$. Тогда:

$$H_+(a_2) = H_+(qa_1) = H_-(a_1) + g_1 a_1 \Rightarrow$$

$$H_+(a_1) = H_-\left(\frac{a_1}{q}\right) + \frac{g_1 a_1}{q}.$$

Таким образом, первый уровень для $H_+(a_1)$ равен $E_1 = \frac{g_1 a_1}{q}$. Этот же уровень будет и у $H_-(a_1)$.
Теперь положим найденный уровень нулевым, то есть сместим начало отсчёта по энергиям. В этом случае изменится и a_1: $a_1' = \frac{a_1}{q}$.

$$H_+(a_2') = H_+(qa_1') = H_-(a_1') + g_1 a_1'.$$

$$H_+(a_1') = H_-\left(\frac{a_1'}{q}\right) + \frac{g_1 a_1'}{q}.$$

Форминвариантные потенциалы

$g_1 \neq 0$

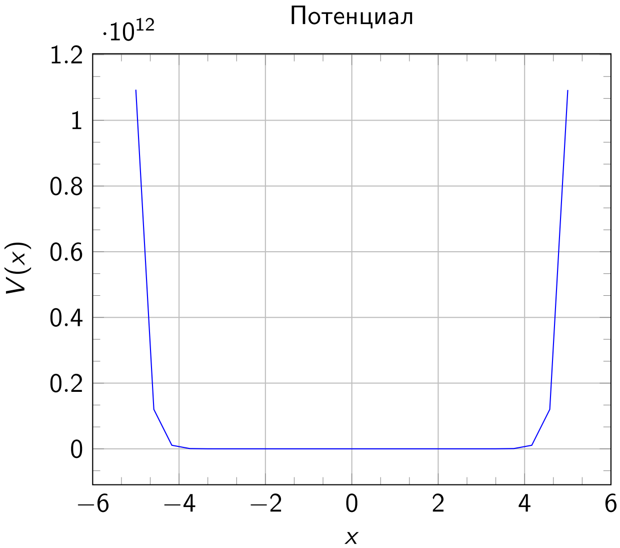
Получаем первый уровень для смещенного отсчёта: $E_1' = \frac{g_1 a_1'}{q}$.
Возвращаясь к первоначальным обозначениям и нулевому уровню:

$$E_2 = \frac{g_1 a_1}{q^2} + \frac{g_1 a_1}{q}.$$

В силу двукратного вырождения такой же энергией обладает $H_-(a_1)$.
Повторяя данные рассуждения получаем:

$$E_n = a_1 g_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q^j}. \tag{23}$$

Формінвариантные потенциалы



Вид потенциала при $q = 0.5$, $a_1 = 1$, $g_1 = 1.5$, $n = 7$.

Форминвариантные потенциалы

$g_1, g_2 \neq 0$

$$f_0(x) = 0\ , \qquad (n = 0),$$

$$f_1(x) = \frac{g_1}{1+q}x\ , \qquad (n = 1),$$

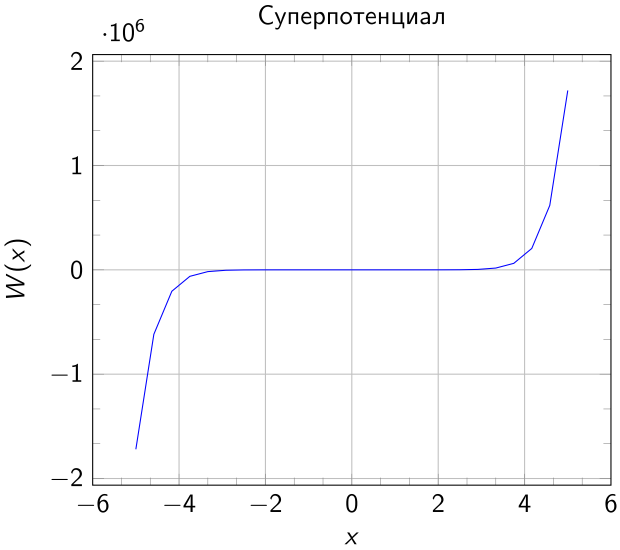
$$f_2(x) = \frac{1-q^2}{1+q^2}\frac{g_1^2}{3(1+q)^2}x^3 + \frac{g_2}{1+q^2}x\ , \qquad (n = 2),$$

Далее по индукции:

$$f_n(x) = \frac{1-q^n}{1+q^n}\sum_{i=0}^{n}\int[f_i(x)f_{n-i}(x)]dx\ , \qquad (n \neq 1, 2).$$

Для данного случая будут справедливы все те же ограничения на параметры, также необходимо, чтобы $g_2 > 0$.

Форминвариантные потенциалы



Суперпотенциал при $q = 0.5$, $a_1 = 1$, $g_1 = 1.5$, $g_2 = 0.75$, $n = 7$.

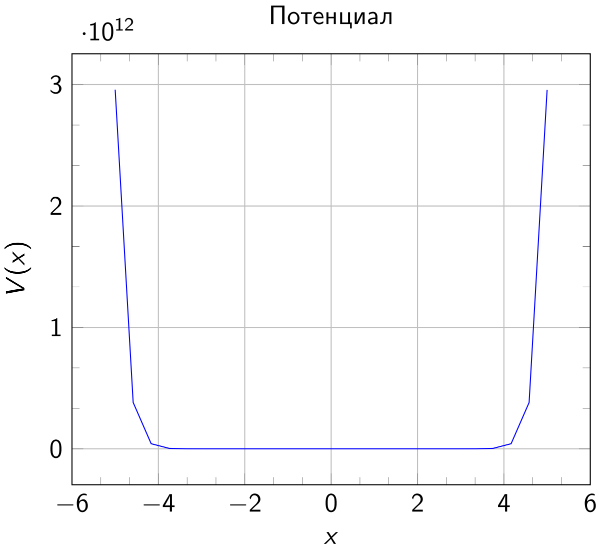
Форминвариантные потенциалы

$g_1, g_2 \neq 0$

Опять же нулевым уровнем обладает $H_-(a_1)$. Повторяя абсолютно те же рассуждения, что и в предыдущем случае можно получить спектр энергий:

$$E_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_1 g_1}{q^j} + \frac{a_1^2 g_2}{q^{2j}}. \tag{24}$$

Форминвариантные потенциалы



Потенциал при $q = 0.5$, $a_1 = 1$, $g_1 = 1.5$, $g_1 = 0.75$, $n = 7$.

Заключение

- Изучены основные свойства суперсимметричных теорий.
- Рассчитаны спектры для трёх известных потенциалов.
- Подробно изучен класс потенциалов, для которых параметры связаны мультипликативно. Получен спектр энергий при $g_1 \neq 0$ и $g_1, g_2 \neq 0$.

Дополнение №1

Ограничение на параметры

Проведем некоторые рассуждения для ограничения параметров g_1, a_1, q.
1)Все коэффициенты C_n должны иметь один знак (для наличия нулевого уровня).
2)Для различных q радиус сходимости равен бесконечности:

$$R^{-1} = \frac{Ka_1g_1}{q} > 0\ , \qquad q \to \infty,$$

$$R^{-1} = Ka_1g_1 > 0\ , \qquad q \to 0,$$

где K – некоторый числовой коэффициент. Можно показать, что $K = \frac{\alpha}{(2n-1)!!}$, α – число.
Отсюда получаем, что a_1 и g_1 имеют одинаковый знак.
3) Поскольку $C_n \sim \frac{1-q^n}{1+q^n}\frac{g_1^n a_1^n}{q^n}$ и из пункта 2) получаем, что для того, чтобы удовлетворить 1) необходимо: $q \in (0, 1)$.