Двумерная гравитация Джакива-Тейтельбойма в репером виде

Удалов Д. Г.

Физический факультет МГУ

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Алкалаев К. Б. (ОТФ ФИАН)

May 19, 2020

Введение

Интерес при рассмотрении двумерной теории гравитации представляет то, что она не может быть основана на обычном действие Гильберта-Эйнштейна , где R - скалярная кривизна, $g_{\mu\nu}$ - метрика на многообразие, $g = \det(g_{\mu\nu})$, Λ - космологическая постоянная, $(\mu, \nu = 0, 1)$:

$$S_{HE}[g] = \int d^2x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda). \tag{1}$$

Введение

Продемонстрируем это, анализируя уравнение движение , полученное из (1) варьированием по $g_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{2}$$

Можно показать, что на многообразии размерности 2, первые два слагаемых в выражение (2) равны нулю, тогда:

$$\Lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{3}$$

Выражение (3) равно нулю, когда:

$$g_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

что невозможно, так как метрика должна быть невырожденной, либо когда:

$$\Lambda = 0. \tag{5}$$

Но если мы хотим рассматривать теорию с ненулевой Λ, то действие (1) не подходит. При $\Lambda = 0$, S_{HE} - топологический инвариант.

Введение

Решить данную проблему можно путем введения скалярного поля N, которое называют дилатоном. Запишем действие, которое называют действием Джакива-Тейтельбойма [1],

$$\mathrm{S_{JT}}\left[\mathrm{g},\mathrm{N}\right]=\int \mathrm{d}^2\mathrm{x}\sqrt{-\mathrm{g}}(\mathrm{R}-2\Lambda)\mathrm{N}. \tag{6}$$

После варьирования по $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ и N, получаем систему уравнений [2]:

$$\begin{cases}\mathrm{R}=2\Lambda,\\ (\nabla_\mu\nabla_\nu-\mathrm{g}_{\mu\nu}\nabla^2)\mathrm{N}+\Lambda\mathrm{g}_{\mu\nu}=0,\end{cases} \tag{7}$$

где

$$\nabla_\nu\mathrm{N}=\partial_\nu\mathrm{N}, \tag{8}$$

$$\nabla_\mu\partial_\nu\mathrm{N}=\partial_\mu\partial_\nu\mathrm{N}-\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\partial_\sigma\mathrm{N}, \tag{9}$$

$$\nabla^2=\mathrm{g}^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu. \tag{10}$$

BF-теория

Начнем с описания алгебры анти-де Ситтера:

$$[\mathrm{J}, \mathrm{P_a}] = \epsilon_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{P_b}, \tag{11}$$

$$[\mathrm{P_a}, \mathrm{P_b}] = \Lambda \epsilon_{\mathrm{ab}} \mathrm{J}, \tag{12}$$

где $\mathrm{P_a}$ $(\mathrm{a}, \mathrm{b} = 0, 1)$ - генераторы трансляций, J - генератор лоренцевского буста,
ϵ_{ab} - символ Леви-Чивиты с нормировкой $\epsilon_{01} = 1$, а метрика Минковского имеет вид: $\eta_{\mathrm{ab}} = \mathrm{diag}(-1, 1)$.
Объединяя (11) и (12) в одно выражение и переобозначая генераторы, как: $(\mathrm{T_i}) = (\mathrm{T_0}, \mathrm{T_1}, \mathrm{T_2}) = (\mathrm{P_0}, \mathrm{P_1}, \mathrm{J})$, получаем:

$$[\mathrm{T_i}, \mathrm{T_j}] = \Lambda \epsilon_{\mathrm{ijk}} \mathrm{g}^{\mathrm{kl}} \mathrm{T_l}, \tag{13}$$

где $(\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}, \mathrm{l})$ пробегают значение от 0 до 2, тензор

$$\mathrm{g_{ij}} = \begin{pmatrix} \Lambda \eta_{\mathrm{ab}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

это метрика Киллинга.

BF-теория

Будем описывать величины лежащие в алгебре используя тетрадный формализм [3]. Тетрады вводятся, как некоторый эквивалент метрики, и по определению:

$$\mathrm{g}_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{\mathrm{a}}_{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{b}}_{\nu}\eta_{\mathrm{ab}}, \tag{15}$$

где $\mathrm{e}^{\mathrm{a}}_{\mu}$ - тетрада. Также можно ввести «обратную» тетраду:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{a}}_{\mu}\mathrm{e}^{\mu}_{\mathrm{b}} = \delta^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}}. \tag{16}$$

Можно поднимать и опускать латинские индексы используя η_{ab}:

$$\mathrm{e}_{\mathrm{a}\nu} = \mathrm{e}^{\mathrm{b}}_{\nu}\eta_{\mathrm{ab}}. \tag{17}$$

BF-теория

Тетрады имеют один тензорный индекс по отношению к группе общекоординатных преобразований и один тензорный индекс по отношению к локальной группе Лоренца. Поэтому нужно ввести такой объект как спиновая связность, который обладает таким же смыслом, как и символ Кристоффеля при построении определения ковариантной производной:

$$\omega^{\mathrm{ab}} = \omega_{\mu}^{\mathrm{ab}} \mathrm{dx}^{\mu}. \tag{18}$$

Латинские индексы у спиновой свзяности можно поднимать и опускать, также, как у тетрад. Выражение (18) антисимметрично при перестановке двух верхних индексов: $\omega^{\mathrm{ab}} = -\omega^{\mathrm{ba}}$ поэтому в размерности 2 можно записать:

$$\omega^{\mathrm{ab}} = \epsilon^{\mathrm{ab}} \omega, \tag{19}$$

где

$$\omega \equiv \omega_{\mu} \mathrm{dx}^{\mu}. \tag{20}$$

BF-теория

На множестве дифференциальных 1-форм определим следующие операторы:

$$\mathrm{dA} = (\partial_\mu \mathrm{A}_\nu - \partial_\nu \mathrm{A}_\mu)\mathrm{dx}^\mu \mathrm{dx}^\nu, \tag{21}$$

$$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} = (\mathrm{A}_\mu \mathrm{B}_\nu - \mathrm{A}_\nu \mathrm{B}_\mu)\mathrm{dx}^\mu \mathrm{dx}^\nu. \tag{22}$$

В алгебре определим следующие величины:

1. Калибровочная связность (1-форма):

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_\mu \mathrm{dx}^\mu = (\mathrm{e}^{\mathrm{a}}_\mu \mathrm{P}_\mathrm{a} + \mathrm{w}_\mu \mathrm{J})\mathrm{dx}^\mu. \tag{23}$$

2. Скалярное поле (0-форма):

$$\phi = \phi^\mathrm{i} \mathrm{T}_\mathrm{i} = \phi^0 \mathrm{T}_0 + \phi^1 \mathrm{T}_1 + \phi^2 \mathrm{T}_2. \tag{24}$$

3. Кривизна (2-форма) [2]:

$$\mathrm{F} = \mathrm{dA} + \frac{1}{2}[\mathrm{A} \wedge \mathrm{A}] = \frac{1}{2}\mathrm{F}^\mathrm{j}_{\mu\nu} \mathrm{T}_\mathrm{j} \mathrm{dx}^\mu \wedge \mathrm{dx}^\nu, \tag{25}$$

где

$$\mathrm{F}^\mathrm{j}_{\mu\nu} = (\mathrm{dA}^\mathrm{j})_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{2}\epsilon_{\mathrm{klm}}(\mathrm{A}^\mathrm{k} \wedge \mathrm{A}^\mathrm{l})_{\mu\nu} \mathrm{g}^{\mathrm{mj}}. \tag{26}$$

BF-теория

Выпишем компоненты (27):

$$\mathrm{F}^{\mathrm{j=0}}_{\mu\nu} = (\mathrm{de}^0)_{\mu\nu} + (\omega \wedge \mathrm{e}^1)_{\mu\nu}, \tag{27}$$

$$\mathrm{F}^{\mathrm{j=1}}_{\mu\nu} = (\mathrm{de}^1)_{\mu\nu} + (\omega \wedge \mathrm{e}^0)_{\mu\nu}, \tag{28}$$

$$\mathrm{F}^{\mathrm{j=2}}_{\mu\nu} = (\mathrm{dw})_{\mu\nu} + \Lambda(\mathrm{e}^0 \wedge \mathrm{e}^1)_{\mu\nu}. \tag{29}$$

Действие BF-теории имеет вид [2]:

$$\mathrm{S_{BF}}\,[\phi, \mathrm{A}] = \int \langle \phi \mathrm{F} \rangle, \tag{30}$$

где $\langle\rangle$ скалярное произведение, которое определяется метрикой Киллинга (14), как:

$$\langle \mathrm{T_i}, \mathrm{T_j} \rangle = \mathrm{g_{ij}}. \tag{31}$$

Тогда выражение (31) примет вид:

$$\mathrm{S_{BF}}\,[\phi, \mathrm{A}] = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^2\mathrm{x} \epsilon^{\mu\nu} \mathrm{g_{ij}} \phi^{\mathrm{i}} \mathrm{F}^{\mathrm{j}}_{\mu\nu}. \tag{32}$$

BF-теория

Тогда выражение (31) примет вид:

$$\mathrm{S_{BF}}\left[\phi, \mathrm{A}\right] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d^2 x}\epsilon^{\mu\nu}\mathrm{g_{ij}}\phi^{\mathrm{i}}\mathrm{F}^{\mathrm{j}}_{\mu\nu}. \tag{33}$$

Проварьируем действие (33) по ϕ и A: [4]
Уравнение нулевой кривизны:

$$\frac{\delta \mathrm{S_{BF}}\left[\phi, \mathrm{A}\right]}{\delta\phi^{\mathrm{i}}} = \mathrm{F^i} = 0, \tag{34}$$

Уравнение ковариантного постоянства:

$$\frac{\delta \mathrm{S_{BF}}\left[\phi, \mathrm{A}\right]}{\delta \mathrm{A^i}} = \mathrm{D}\phi^{\mathrm{i}} = 0, \tag{35}$$

BF-теория

Распишем действие (33) в компонентах:

$$\mathrm{S}_{\mathrm{BF}}\left[\phi, \mathrm{A}\right] = \frac{1}{2}\int (\phi^2(\partial_0\omega_1 - \partial_1\omega_0 + \Lambda(\mathrm{e}_0^0\mathrm{e}_1^1 - \mathrm{e}_1^0\mathrm{e}_0^1))$$
$$- \Lambda\phi^0(\partial_0\mathrm{e}_1^0 - \partial_1\mathrm{e}_0^0 + (\omega_0\mathrm{e}_1^1 - \omega_1\mathrm{e}_0^1))$$
$$+ \Lambda\phi^1(\partial_0\mathrm{e}_1^1 - \partial_1\mathrm{e}_0^1 + (\omega_0\mathrm{e}_1^0 - \omega_1\mathrm{e}_0^0)))\mathrm{dx}_0 \wedge \mathrm{dx}^1. \quad (36)$$

Используя (28), (29) и (34) получаем невырожденную линейную систему алгебраических уравнения на ω:

$$\begin{cases} \partial_0\mathrm{e}_1^0 - \partial_1\mathrm{e}_0^0 + (\omega_0\mathrm{e}_1^1 - \omega_1\mathrm{e}_0^1) = 0, \\ \partial_0\mathrm{e}_1^1 - \partial_1\mathrm{e}_0^1 + (\omega_0\mathrm{e}_1^0 - \omega_1\mathrm{e}_0^0) = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Из (37) получаем:

$$\omega_\mu = -\frac{1}{\det\ \mathrm{e}}\eta_{\mathrm{ab}}\epsilon^{\alpha\beta}\mathrm{e}_\mu^{\mathrm{a}}\partial_\beta\mathrm{e}_\alpha^{\mathrm{b}}. \quad (38)$$

BF-теория

Действие (36) примет вид:

$$S_{\mathrm{BF}}[\phi, \mathrm{A}] = \frac{1}{2}\int(\phi^2(\partial_0\omega_1 - \partial_1\omega_0 + \Lambda(\mathrm{e}_0^0\mathrm{e}_1^1 - \mathrm{e}_1^0\mathrm{e}_0^1))\mathrm{dx}_0 \wedge \mathrm{dx}^1. \qquad (39)$$

Рассмотрим выражение:

$$\partial_1\omega_0 - \partial_0\omega_1. \qquad (40)$$

Выпишем необходимую для (42) формулу:

$$\partial_\mathrm{a}(\det\mathrm{A}) = \det\mathrm{A}(\mathrm{A}^{-1})^\mathrm{c}_\mathrm{b}\partial_\mathrm{a}\mathrm{A}^\mathrm{b}_\mathrm{c}. \qquad (41)$$

Подставляя в (40) выражение (38) и используя (41), получаем:

$$\begin{aligned}\partial_1\omega_0 - \partial_0\omega_1 &= \partial_\nu\omega_\mu\epsilon^{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{\det\,\mathrm{e}}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu}(-\mathrm{e}^\mathrm{a}_\mu\partial_\beta\partial_\nu\eta_{\mathrm{ab}}\mathrm{e}^\mathrm{b}_\alpha - \partial_\nu\mathrm{e}^\mathrm{a}_\mu\partial_\beta\eta_{\mathrm{ab}}\mathrm{e}^\mathrm{b}_\alpha + \mathrm{e}^\sigma_\mathrm{c}\partial_\nu\mathrm{e}^\mathrm{c}_\sigma\mathrm{e}^\mathrm{a}_\mu\partial_\beta\eta_{\mathrm{ab}}\mathrm{e}^\mathrm{b}_\alpha),\end{aligned} \qquad (42)$$

где $\epsilon^{\mu\nu}$ - символ Леви-Чивиты с нормировкой $\epsilon^{01} = 1$

BF-теория

Введем новую величину:

$$\mathrm{R}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}} = \mathrm{d}\omega^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}} + \omega^{\mathrm{a}}_{\mathrm{c}} \wedge \omega^{\mathrm{c}}_{\mathrm{b}} \tag{43}$$

Используя (19):

$$\mathrm{R}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}} = \epsilon^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}}\mathrm{d}\omega + \epsilon^{\mathrm{a}}_{\mathrm{c}}\epsilon^{\mathrm{c}}_{\mathrm{b}}\omega \wedge \omega \tag{44}$$

Используя свойство внешнего умножения:

$$\omega \wedge \omega = 0, \tag{45}$$

$$\mathrm{R}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}} = \epsilon^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}}\mathrm{d}\omega, \tag{46}$$

$$\mathrm{R}^{\mathrm{a}}_{\mu\nu\mathrm{b}} = \epsilon^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}}(\mathrm{d}\omega)_{\mu\nu}. \tag{47}$$

Переходя к греческим индексам, можно показать, что:

$$\mathrm{R}^{\lambda}_{\sigma\mu\nu} = \mathrm{e}^{\lambda}_{\mathrm{a}}\mathrm{e}^{\mathrm{b}}_{\sigma}\epsilon^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}}(\mathrm{d}\omega)_{\mu\nu}, \tag{48}$$

это Риманова кривизна. Подставляя (38) в (48) и сравнивая с (42) можно показать:

$$\partial_\nu\omega_\mu\epsilon^{\mu\nu} = \frac{1}{\det \mathrm{e}}\frac{2\mathrm{Rg}}{4} = \frac{\mathrm{R}}{2}\sqrt{-\mathrm{g}}. \tag{49}$$

BF-теория

Тогда (39) примет вид:

$$S_{BF}\left[\phi, A\right] = -\frac{1}{4}\int \phi^2\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \tag{50}$$

Полагая по определению: $N \equiv -\frac{1}{4}\phi^2$, где ϕ^2 из (25) получаем:

$$S_{BF}\left[\phi, A\right] = \int d^2x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda)N. \tag{51}$$

Что соответствует действию Джакива Тейтельбома, т.е две модели полностью эквивалентны.

Заключение

В работе было показано, что теория гравитации, основанная на действии Гильберта-Эйнштейна, неоднородна относительно понижения размерности пространства до двух. Этот факт, связанный с особенностями двумерной геометрии, дал мотивацию искать другую теорию для гравитации, что привело нас к BF-теории, которая может стать новой возможностью для более глубокого изучения теории гравитации

Jackiw R. Gauge theories on a line.
Massachusets 02139 U.S.A.: Center for Theoretical Physics, Laboratory for Nuclear Science and Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1992.
19 p.

Isler K., Trugenberger C.A. A Gauge Theory of Two-dimensional Quantum Gravity.
1989.
T. 63.
c. 834.

Carroll Sean M. Spacetime and Geometry.
Cambridge University Press, 2019. 7.

Fukuyama Takeshi, Kamimura Kiyoshi. Gauge Theory of Two-dimensional Gravity // Phys. Lett. B.
1985.
T. 160.
C. 259–262.