

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В.  
ЛОМОНОСОВА

---

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

## Курсовая работа

Основные принципы гравитационного  
линзирования и его применение для поиска темной  
материи.

Студентка 206 группы  
Куклева Екатерина Алексеевна  
Научный руководитель:  
член-корр. РАН,  
доктор физ.-мат. наук,  
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва, 2020.

## **Оглавление**

1. Введение .....	3
2. Отклонение светового луча гравитационным полем .....	3
3. Приближение тонкой линзы .....	8
4. Влияние aberrаций на искривление лучей и рассуждения о формировании изображений.....	10
5. Понятия скалярного потенциала, сдвига и сходимости. ....	14
6. Временные задержки. Принцип Ферма. Каустики. ....	16
7. Методы получения оценки и профиля массы по результатам сильного и слабого линзирования.....	18
8. Использования гравитационного линзирования для обнаружения и исследования темной материи. ....	22
9. Заключение.....	24
10. Список литературы .....	25

## 1. Введение.

Данная работа посвящена изучению гравитационных линз – объектов, искривляющих пространство вокруг себя и отклоняющих свет. Этот эффект позволяет получать искаженные изображения фоновых объектов, что позволяет изучать, как далекие галактики, так и саму линзу, что наиболее интересно. С помощью эффекта гравитационного линзирования можно восстановить массовое распределение вещества линзы и детектировать клампы темной материи.

## 2. Отклонение светового луча гравитационным полем.

Под действием гравитационного поля массивных объектов различной природы, таких как галактические кластеры и облака темной материи, прямолинейно распространяющийся свет изменяет свою траекторию на гиперболическую. Гравитационная линза, как и обычная, обладает свойством фокусировки лучей, однако угол преломления зависит от прицельного параметра  $r$  (кратчайшего расстояния от центра линзы до луча). Гравитационная линза не имеет точки, в которой сходятся все параллельные лучи. [Рис.2.1]

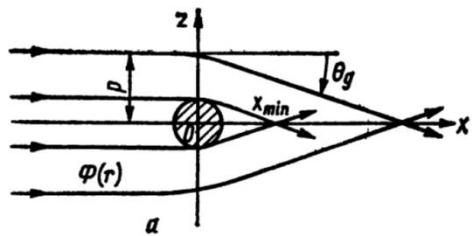


Рис.2.1 Преломление лучей света в поле тяготения [1]

Можно провести рассуждения, приводящие к получению выражения для угла отклонения светового луча, основываясь на принципе эквивалентности двух систем, одна из которых находится в однородном поле тяжести, а другая движется с постоянным ускорением. [Рис.2.2.]

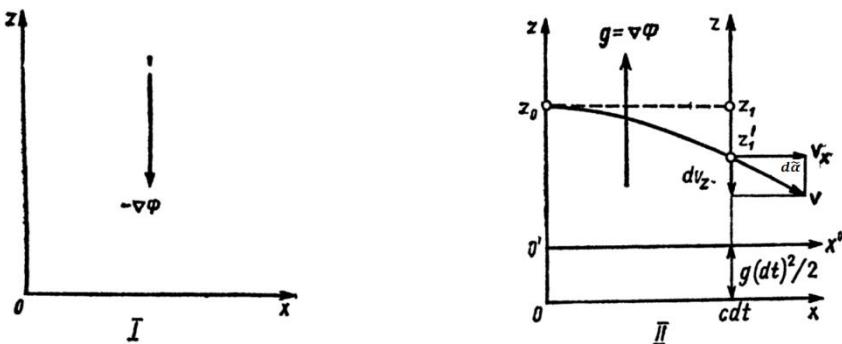


Рис.2.2. Покоящаяся система отсчета в однородном гравитационном поле (I). Система отсчета движется с постоянным ускорением (II).[1]

В покоящейся системе без гравитационного поля луч прямолинеен, а в равноускоренной представляет собой ветвь параболы. При малых углах  $d\tilde{\alpha} = -\frac{dv_z}{dv_x}$ . Для компонент скорости имеем:  $v_x = c$ ;  $v_y = 0$ ;  $dv_z = -gdt$ . Тогда для угла:  $d\tilde{\alpha} = \frac{gdt}{c} = \frac{gdx}{c^2}$ ;  $\frac{d\tilde{\alpha}}{dx} = \frac{g}{c^2} = c^{-2} \frac{d\Phi}{dz}$ .

Для произвольной ориентации луча относительно гравитационного поля получаем уравнение:

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{ds} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial N} = \frac{\sin \nu}{c^2} \frac{d\Phi}{dz} \quad (2.1)$$

Здесь  $\nu = \nu_0 + \alpha_1$  – угол между направлением луча и ускорением,  $s$  – расстояние вдоль луча. Нормаль направлена так, чтобы луч искривлялся к центру тяжести. [Рис.2.3.]

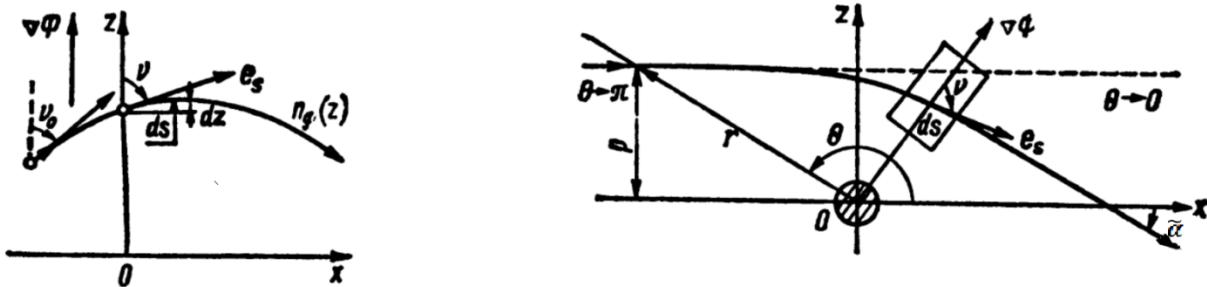


Рис.2.3. Отклонение луча гравитационным полем. Слева – точечный источник; справа – бесконечно удаленный. [1]

Далее будем интегрировать 2.1 по не искривленному лучу.

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial z} dx$$

Рассмотрим центрально-симметричное поле  $\Phi = -\frac{MG}{r}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sin \theta \frac{d\Phi}{dr}$  и заменим переменную интегрирования  $x = p \operatorname{ctg} \theta$ ,  $dx = -\frac{pd\theta}{\sin^2 \theta}$ .

В итоге получаем выражение для угла отклонения светового луча:

$$\tilde{\alpha} = \frac{GM}{pc^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2GM}{pc^2} \quad (2.2)$$

Теперь введем удобную для описания происходящего величину – эффективный показатель преломления. Запишем закон Снеллиуса для среды с переменным показателем преломления. В качестве модели можно взять плоскослоистую среду.

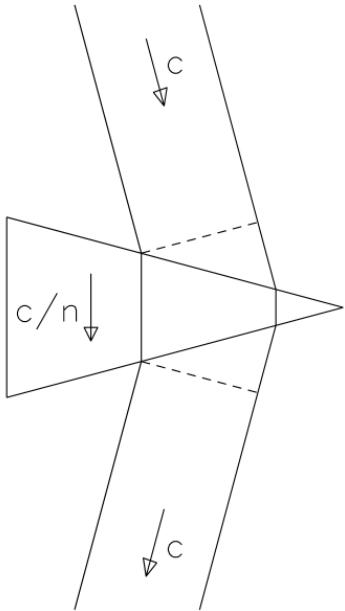
$$n_g \sin v = const$$

$$\frac{dn_g}{dz} \sin v + n_g \cos v \frac{dv}{dz} = 0$$

Учтем, что  $\cos v \frac{dv}{dz} = \frac{dv}{ds}$  и получим уравнение:

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{ds} = - \frac{\sin v}{n_g} \frac{dn_g}{dz} \quad (2.3)$$

Тогда, приравнивая правые части уравнений 2.1 и 2.3 и интегрируя, получаем выражения для эффективного показателя преломления  $n_g = 1 - \frac{\Phi}{c^2}$  и соответствующей эффективной скорости света  $c_g = \frac{c}{n_g} \approx \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)$ . Поскольку потенциал при нашей нормировке отрицателен,  $n_g > 0$ , а  $c_g < c$ .



*Рис.2.4. Отклонение светового луча призмой. [2]*

Однако формула 2.2 дает заниженные в два раза значения. Для того чтобы получить верный результат, необходимо обратиться к теории относительности и учесть искривление пространства вокруг массивного тела. В пространстве Минковского в инерциальных системах отсчета квадрат четырехмерного

расстояния между двумя близкими событиями записывается виде  $ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (cdt)^2 - dl^2$ . А в неинерциальной системе отсчета интервал дается квадратичной формой  $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ . Здесь  $x^0 = ct; x^{1,2,3} = x, y, z$ . Коэффициенты  $g_{ik}$  зависят от массы и отвечают за метрику, то есть за геометрию пространства-времени.

Для сферически-симметричного гравитационного поля квадрат интервала приобретает вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.4)[1]$$

Здесь  $r_g$  – гравитационный радиус. Эту формулу можно получить, записав квадрат интервала в обычных сферических координатах и воспользовавшись принципом эквивалентности и преобразованиями Лоренца, а также считая поле слабым. На самом деле формула 2.4. свободна от этих ограничений и может применяться в любых полях. Рассмотрев отдельно, пространственную часть интервала и записав выражение для расстояния между двумя точками на плоскости и в пространстве, можно получить уравнения для поверхностей вращения с одинаковой метрикой.

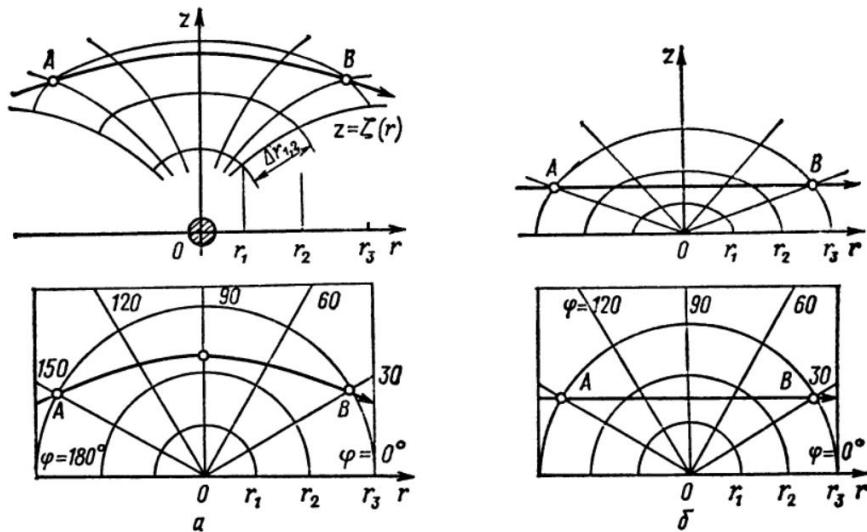


Рис.2.5. Поверхность вращения  $z = \zeta(r)$ , имеющая ту же метрику, что и кривая на плоскости (а); та же поверхность в отсутствии гравитационного поля (б).[1]

Из рисунка видно, как искривленное пространство вносит свой вклад в изменение траектории луча. Линии, соединяющие точки А и В, показывают

кратчайший путь между ними в пространстве, искаженном гравитационном полем [рис.2.5(а)], и в пространстве без массы [рис.2.5(б)]. Данные линии можно было бы воспринимать как луч, если бы их построение учитывало искривление времени. Коэффициенты  $g$  перед слагаемыми, связанными с временной и пространственной частью интервала, равны  $1 - \frac{r_g}{r}$  и вносят одинаковый вклад в искривление луча.

Вернемся к модели, использующей эффективный показатель преломления и изменяющуюся в гравитационном поле скорость света.

$$c_g = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} c = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c$$

Это выражение можно получить, приравняв нулю квадрат интервала и зафиксировав  $\theta$  и  $\varphi$  в 1.4. А также учитя, что  $r_g = \frac{2GM}{r}$ ,  $|\Phi| = \frac{GM}{r}$ .

Для эффективного показателя преломления имеем  $n_g \simeq 1 - \frac{2\Phi}{c^2}$ . А для угла отклонения:

$$\tilde{\alpha} = \frac{4GM}{pc^2} \quad (2.5)$$

Таким образом, для получения правильного выражения для угла отклонения луча гравитационным полем точечной массы необходимо прибегнуть к ОТО. Нельзя ограничиться Ньютоновской механикой или кинематическим подходом, так как они не учитывают искривления пространства. Формула 2.5 была подтверждена экспериментально.

Введение эффективного показателя преломления позволяет упростить рассмотрение геометрической оптики гравитационной линзы и не обращать внимания на изменения метрики пространства-времени вблизи тела, создающего сильное гравитационное поле.

Так можно получить уравнение траектории луча в сферически-слоистой среде:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{n_{gm} r_m} \left( \cos \theta + \frac{r_g}{n_{gm} r_m} \right) \quad (2.1)$$

Здесь  $r_m$  - минимальное расстояние от луча до гравитационного центра, а  $n_{gm}$  – соответствующий показатель преломления. Из уравнения видно, что

траектория представляет собой гиперболу. Однако из-за того, что массивное тело изменяет метрику значительно в ограниченной области пространства, можно использовать приближение, в котором луч распространяется по асимптотам этой гиперболы  $\cos \theta = -\frac{r_g}{n_{gm} r_m}$ . Данное уравнение имеет два корня  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{r_g}{n_{gm} r_m}$  и  $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{r_g}{n_{gm} r_m}$ . Угол между асимптотами совпадает с углом отклонения, полученным ранее. [Рис.2.6.]

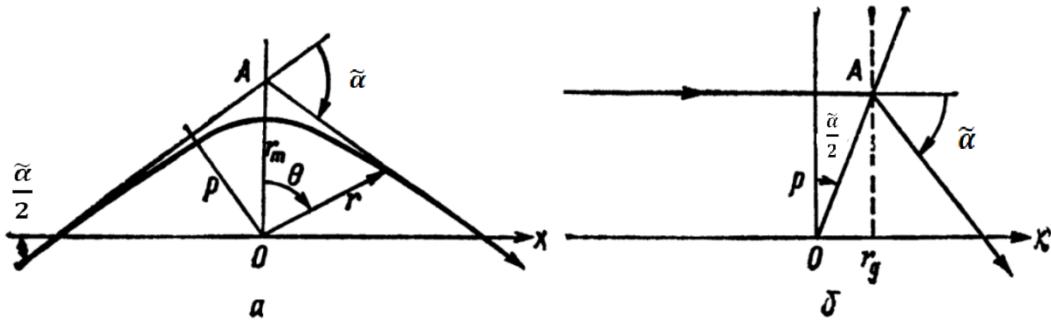


Рис.2.6. Замена истинной траектории луча (a) ее прямолинейными асимптотами. [1]

### 3. Приближение тонкой линзы.

Для наблюдаемых гравитационных линз хорошо подходит модель тонкой линзы со спроектированной на плоскость линзы плотностью  $\Sigma = \int \rho(\vec{\xi}, x) dx$ . Здесь  $\vec{\xi}$ - вектор в плоскости линзы,  $x$  первоначальное направление распространения луча, а  $\rho(\vec{\xi}, x)$  - объемная плотность линзы. Такое приближение справедливо, так как существенное воздействие поля на траекторию луча проявляется на малых расстояниях вдоль линии распространения света, а характерные расстояния между телами гораздо больше. Выражение для угла отклонения светового луча тонкой линзой представляет собой суперпозицию отклонений от всех элементов массы плоскости:

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \Sigma(\vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2 \xi' \quad (3.1)$$

Рассмотрим геометрию тонкой линзы, определяющую формирование изображений. Получим уравнение тонкой линзы.

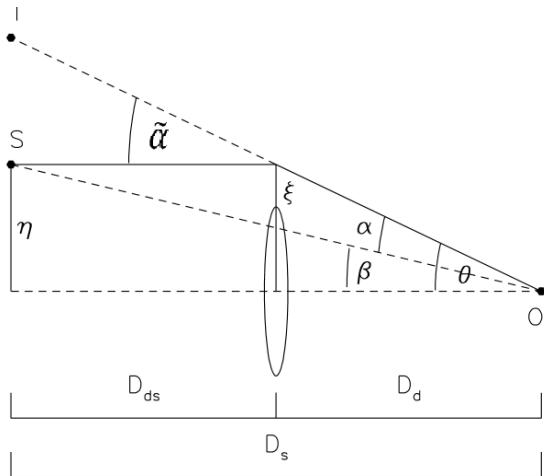


Рис. 3.1. Схема, иллюстрирующая приближение тонкой линзы.[2]

Световой луч, двигаясь от источника  $S$ , отклоняется на угол  $\tilde{\alpha}$ , пройдя сквозь гравитационную линзу, и приходит к наблюдателю  $O$ . Угол между оптической осью линзы и направлением на истинное положение источника  $\beta$ , а угол между оптической осью и изображением –  $\theta$ .  $D_d$ - расстояние от наблюдателя до линзы,  $D_{ds}$ - между линзой и источником, а  $D_s$ - между источником и наблюдателем. Для данной модели справедливо приближение малых углов. Удобно ввести угол между направлениями на источник и на изображение  $\vec{\alpha} = \frac{D_{ds}}{D_s} \vec{\tilde{\alpha}}$ , а также векторные углы, направленные параллельно линзе в сторону оптической оси. Тогда справедливо уравнение, выражающее расстояние от оптической оси до изображения:  $\vec{\theta} D_s = \vec{\beta} D_s + \vec{\alpha} D_{ds}$ . Его можно переписать в виде:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}) \quad (3.2)$$

Уравнение 3.2 будем называть уравнением гравитационной линзы. В общем случае оно нелинейно, и заданному положению источника  $\vec{\beta}$  может соответствовать несколько изображений  $\vec{\theta}$ .

Рассмотрим линзу с постоянной поверхностной плотностью  $\Sigma$ . Используя формулу 3.1, получаем  $\alpha(\theta) = \frac{4G}{c^2 \xi} \frac{D_{ds}}{D_s} (\Sigma \pi \xi^2) = \frac{4\pi G \Sigma}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \theta$ . Теперь можно ввести величину критической поверхностной плотности  $\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G D}$ , где  $D = \frac{D_d D_{ds}}{D_s}$ . Очевидно, что для линзы с постоянной поверхностной плотностью  $\vec{\beta} = 0$ , то есть реализуется маловероятный случай расположения источника строго за гравитационной линзой. Можно справедливо предположить, что для формирования изображения с другой стороной линзы необходимо, чтобы  $\alpha$  был больше  $\theta$ , а это условие выполняется при  $\Sigma > \Sigma_{cr}$ .

#### 4. Влияние aberrаций на искривление лучей и рассуждения о формировании изображений.

В оптической тонкой линзе с правильно подобранными параметрами aberrации не сильно влияют на формирование изображения. Однако в гравитационной линзе угол отклонения луча сильно зависит от прицельного параметра, таким образом, параллельно идущие лучи не пересекаются в одной точке.

Рассмотрим лучи, идущие в какой либо плоскости, проходящей через центр линзы. Введем вектора  $\mathbf{p}$ ,  $\rho$  и  $\theta_g$ , направления которых указаны на рисунке. Здесь  $\rho$  определяет смещение наблюдателя от оси  $x$ . [Рис. 4.1]

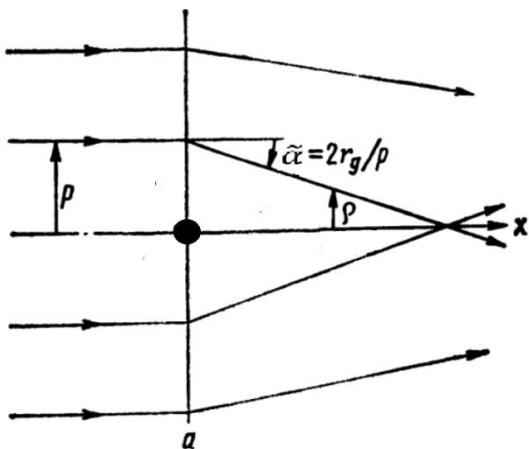


Рис.4.1. Преломление лучей гравитационной линзой. [1]

Теперь можем записать уравнение, связывающее введенные нами векторные величины:  $\rho(\mathbf{p}, x) = \mathbf{p} + x\theta_g(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - \frac{2r_g x}{p^2}\mathbf{p}$ . Отсюда найдем прицельные параметры, соответствующие фиксированному положению наблюдателя:

$$\mathbf{p}_{1,2}(\rho) = \mathbf{p} \left( \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \pm \frac{2r_g x}{\rho^2}} \right) \quad (4.2)$$

Из формулы 4.2 видно, что лучи с разными прицельными параметрами, пройдя с разных сторон от гравитационной линзы, в итоге сходятся в одной точке [Рис.4.2.]. Таким образом, проведя рассуждения, основываясь на предположениях о сферически-симметричном поле точечной гравитационной линзы, уже можно наблюдать возможность формирования нескольких изображений одного объекта, что соответствует сильному гравитационному линзированию. Однако следует заметить, что для слабого линзирования, при

котором обычно наблюдается сильное смещению от оси  $x$ , будет только одно изображение.

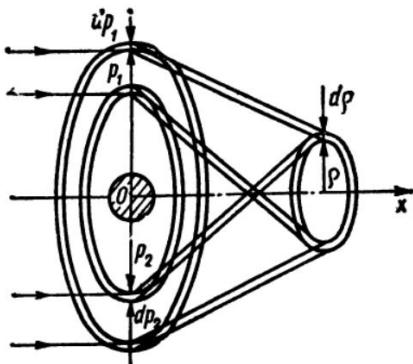


Рис.4.2. Связь между входными и выходными и выходными апертурами в гравитационной линзе.[1]

Произведя замену переменных, можно получить формулу, абсолютно аналогичную 4.2 и для точечного источника, не удаленного на бесконечность [Рис.4.3.].

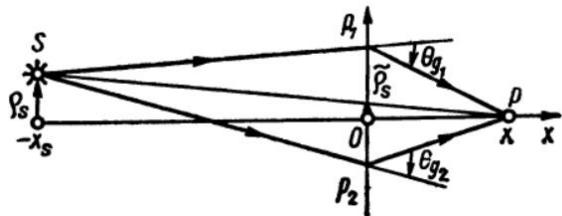


Рис.4.3. Траектория лучей, идущих от источника, находящегося на конечном расстоянии от гравитационной линзы. Ось  $x$  совмещена с наблюдателем.[1]

Корни aberrационного уравнения примут вид:

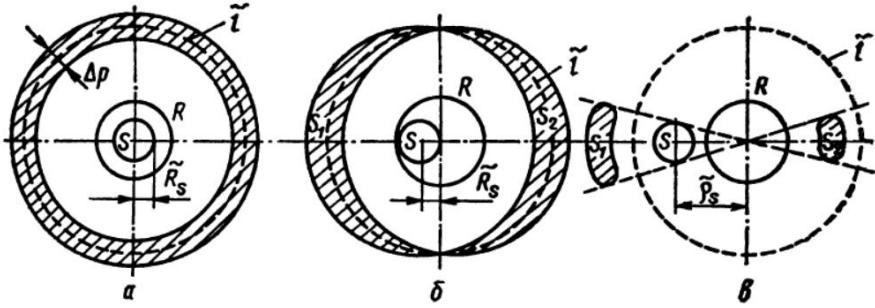
$$p_{1,2}(\rho) = \tilde{\rho}_s \left( \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \pm \frac{\tilde{l}^2}{\tilde{\rho}_s^2}} \right) \quad (4.3)$$

Здесь  $\tilde{l} = \sqrt{\frac{4GMxx_s}{c^2(x+x_s)}}$  – радиус Эйнштейна. Отметим, что средняя

поверхностная плотность внутри круга, задаваемого радиусом Эйнштейна, в модели тонкой линзы равна критической.

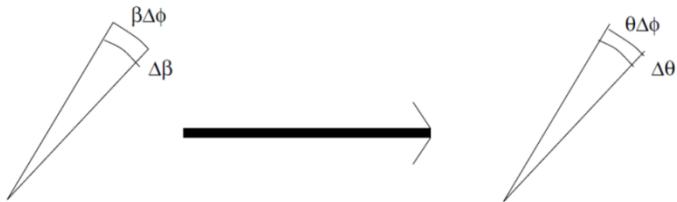
Далее будем рассуждать о формировании изображения протяженного объекта, границы которого задаются уравнением  $\tilde{\rho}_s = \tilde{\rho}_s(\varphi)$ . А угол  $\varphi$  – полярный угол в плоскости перпендикулярной оси [Рис.4.4.]. Если размеры источника и прицельный параметр малы, то уравнение 4.3 можно упростить  $p_{1,2}(\rho) = \tilde{\rho}_s \left( \frac{1}{2} \pm \frac{\tilde{l}}{\tilde{\rho}_s} \right)$ . Пусть источник имеет форму диска с радиусом  $R$ . Тогда изображением будет кольцо ширины  $\Delta p = p_1 - p_2$ . При этом средний радиус кольца будет равен радиуса Эйнштейна. Далее при постепенном смещении источника от оси  $x$  мы будем последовательно наблюдать две лунки с

соприкасающимися краями, а затем два изогнутых эллипса, один из которых постепенно выродится в расположенную в центре точку, а второй приближается к истинному положению источника. Последний случай соответствует расположению источника вне радиуса Эйнштейна и слабому гравитационному линзированию.



*Рис. 4.4. Изображение кругового источника радиуса  $R_s$  при различных смещениях его центра от оси линзы – наблюдатель.[1]*

Важной характеристикой получаемых изображений является их увеличение. [3] Чтобы увидеть, что по крайней мере одно из изображений получается увеличенным, нужно сравнить элементы площадей источника и изображения [Рис.3.5.].



*Рис.4.5. Преобразование элемента площади при линзировании.[3]*

$dS = \beta\Delta\phi\Delta\beta$  – площадь элемента источника;

$dS' = \theta\Delta\phi\Delta\theta$  – площадь элемента изображения.

Следовательно, увеличение задается формулой  $\mu = \left| \frac{\theta\Delta\theta}{\beta\Delta\beta} \right| = \left| \frac{\theta d\theta}{\beta d\beta} \right|$ .

Запишем уравнение линзы 4.2. в другом виде:  $\beta = \theta - \frac{\theta_E}{\theta}$ , где  $\theta_E$  - угловой радиус Эйнштейна. Решением уравнения является пара корней  $\theta_{1,2} =$

$\frac{1}{2} \left( \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$ . Тогда  $\frac{d\theta}{d\beta} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} \right)$ . В итоге для коэффициента увеличения получаем:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{4} \left( 1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} + \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{\beta} \pm 2 \right) \quad (4.4)$$

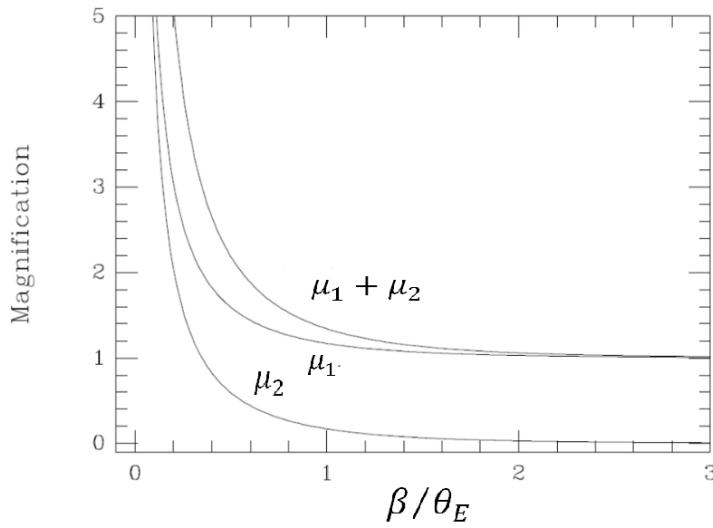


Рис.4.6. График зависимости увеличения изображений от приведенного углового направления на истинное положение источника.[3]

Заметим, что при  $\beta \rightarrow \infty$ , линзирование не наблюдается, а при  $\beta \rightarrow 0$ , увеличение бесконечно. Также обратим внимание на то, что изменение размеров происходит только в одном направлении, а значит, изображение получается искаженным.

Теперь перейдем к еще одной важной характеристике получаемого изображения – коэффициенту усиления  $q$ . На рисунке обозначены все важные для нас величины [Рис.4.7.].

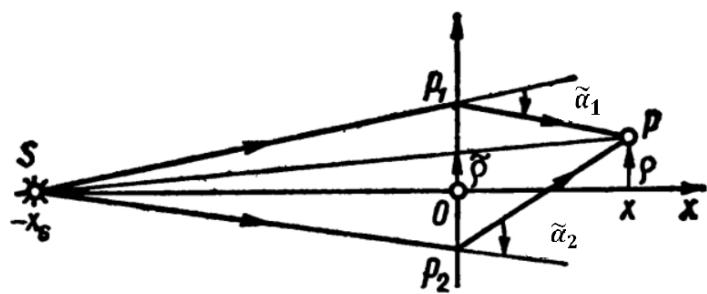


Рис.4.7. Траектория лучей, идущих от источника, находящегося на конечном расстоянии от гравитационной линзы. Ось  $x$  совмещена с источником.[1]

Мы можем определить видимую интенсивность из закона сохранения энергии внутри лучевой трубы  $J_0 \Sigma_{\text{вх}} = J(x, \rho) 2\pi \rho d\rho$ . Здесь  $J_0$ - интенсивность излучения источника,  $\Sigma_{\text{вх}} = 2\pi p_1 dp_1 + 2\pi p_2 |dp_2|$ - площадь входной апертуры, соответствующая положению наблюдателя. Тогда с использованием aberrационного уравнения в данной системе координат (аналогичное 4.3) получаем выражение для коэффициента усиления:

$$q(x, \rho) = \frac{J(x, \rho)}{J_0} = \sum_{i=1}^2 \frac{p_i}{\rho} \left| \frac{dp_i}{d\rho} \right| = \frac{l}{\rho} \frac{\frac{\rho^2}{2l^2} + 1}{\sqrt{\frac{\rho^2}{4l^2} + 1}} \quad (4.5)$$

Здесь  $l = \sqrt{2r_g x}$ . Из формулы 4.5 видно, что при удалении от линзы яркость изображения только увеличивается, это объясняется возрастанием апертуры. Имеет смысл рассмотреть коэффициенты усиления для отдельных изображений.

$$q_{1,2}(x, p) = \frac{l}{2p} \frac{\frac{\rho^2}{2l^2} + 1}{\sqrt{\frac{\rho^2}{4l^2} + 1}} \pm \frac{1}{2} \quad (4.6)$$

Благодаря формулам 3.3, 3.4 и 3.6 можно сделать вывод о характере изображений при разных положениях источника от оси линза – наблюдатель. При сильном удалении одно из изображений приближается к истинному положению на небе, его коэффициенты увеличения и усиления стремятся к 1 сверху. Второе изображение приближается к оси линза – наблюдатель, уменьшается и становится более тусклым. То есть в пределе, при  $\rho \rightarrow \infty$ , останется одно неискаженное изображение, как и ожидалось. При слабом линзировании будет одно несколько увеличенное и усиленное изображение, пригодное для изучения. При сильном линзировании – несколько усиленных, увеличенных изображений, форма и количество, которых будет определяться положением относительно каустик.

## 5. Понятия скалярного потенциала, сдвига и сходимости.

Для того чтобы продолжить анализ наблюдаемых изображений и перейти к восстановлению распределения плотности вещества по данным линзирования, надо ввести несколько характеристик. [2],[4]

Определим скалярный потенциал:

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{2}{c^2} \int \Phi(\xi(\vec{\theta}), x) dx \quad (5.1)$$

Производные скалярного потенциала по  $\vec{\theta}$  связаны с параметрами системы. Так градиент равен углу отклонения луча:

$$\vec{\nabla}_\theta \psi = D_d \vec{\nabla}_\xi \psi = \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \frac{2}{c^2} \int \vec{\nabla}_\perp \psi \Phi d = \vec{\alpha} \quad (5.2)$$

А лапласиан пропорционален поверхностной плотности линзы:

$$\Delta_\theta \psi = \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \frac{2}{c^2} \int \Delta_\xi \Phi dx = \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \frac{2}{c^2} 4\pi G \Sigma = 2 \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{cr}} = 2\kappa(\vec{\theta}) \quad (5.3)$$

Здесь используется уравнение Пуассона для связи Ньютоновского потенциала с плотностью. Тут же вводим параметр сходимости  $\kappa(\vec{\theta}) = \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{cr}}$ . Очевидно, что скалярный потенциал теперь можно переписать в терминах сходимости:

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'| d^2 \theta' \quad (5.4)$$

Следовательно, выражение для угла имеет вид:

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\nabla}_\theta \psi = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} d^2 \theta' \quad (5.5)$$

Локальные свойства изображения, получаемого при линзировании, выражаются матрицей Якоби  $A$ .

$$A \equiv \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\vec{\theta})}{\partial \theta_j} \right) = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial \psi^2(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) = M^{-1} \quad (5.6)$$

Введем обозначение:  $\frac{\partial \psi^2(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \psi_{ij}$ .

Тогда для сходимости имеем:

$$\kappa = \frac{1}{2} (\psi_{11} + \psi_{22}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \psi_{ij} \quad (5.7)$$

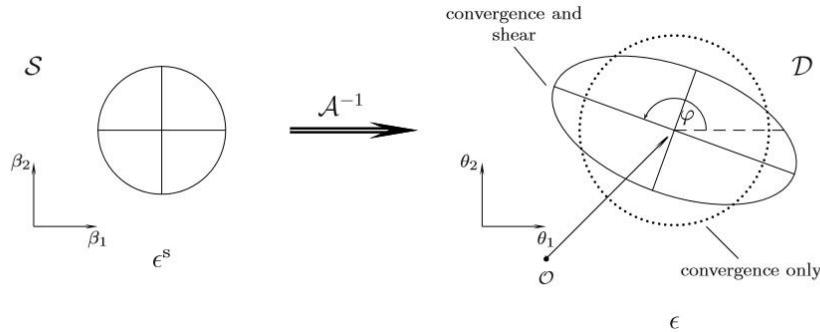
Также важны еще две линейные комбинации  $\psi_{ij}$ , являющиеся компонентами тензора сдвига:

$$\gamma_1(\vec{\theta}) = \frac{1}{2} (\psi_{11} - \psi_{22}) \equiv \gamma(\vec{\theta}) \cos(2\varphi(\vec{\theta})) \quad (5.8)$$

$$\gamma_2(\vec{\theta}) = \psi_{12} = \psi_{21} \gamma(\vec{\theta}) \sin(2\varphi(\vec{\theta})) \quad (5.9)$$

Учитывая определения только что введенных величин, можем записать матрицу Якоби в таком виде:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \quad (5.10)$$



*Рис. 5.1. Вклад сходимости и сдвига в искажение изображения кругового источника.[4]*

Сходимость отвечает за изотропное увеличение изображения, а сдвиг – за искажение [Рис.4.1.]. Величина  $\gamma = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{\frac{1}{2}}$  определяет модуль сдвига, а  $\varphi$  – ориентацию. Таким образом, источник круглой формы отображается гравитационной линзой в эллипс.

## 6. Временные задержки. Принцип Ферма. Каустики.

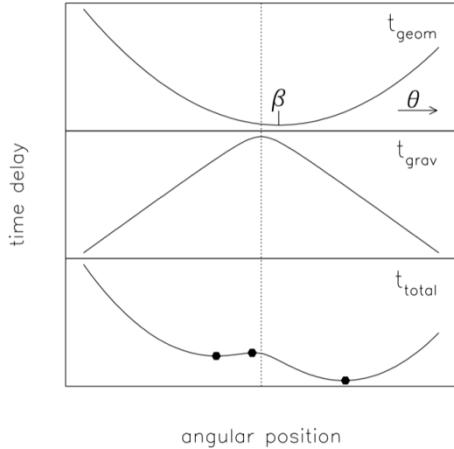
Принцип Ферма в геометрической оптике утверждает, что траектория, по которой движется световой луч, такова, что время прохождения света неизменно относительно соседних траекторий. Значит справедливо утверждение:  $\vec{\nabla}_\theta t(\vec{\theta}) = 0$ . Исходя из этого, можно сделать выводы о том, под какими углами можно наблюдать изображения и какими они будут. [2]

Используя уравнение гравитационной линзы и равенство угла отклонения луча градиенту скалярного потенциала, произведем выкладки.

$$\begin{aligned} (\vec{\theta} - \vec{\beta}) - \vec{\nabla}_\theta \psi &= 0 \\ \vec{\nabla}_\theta \left( \frac{1}{2} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \psi(\vec{\theta}) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Выражение во внешних скобках с точностью, до константы, описывает временную задержку, вызванную геометрическим увеличением пути и прохождением фотонов через потенциал [Рис.6.1.].

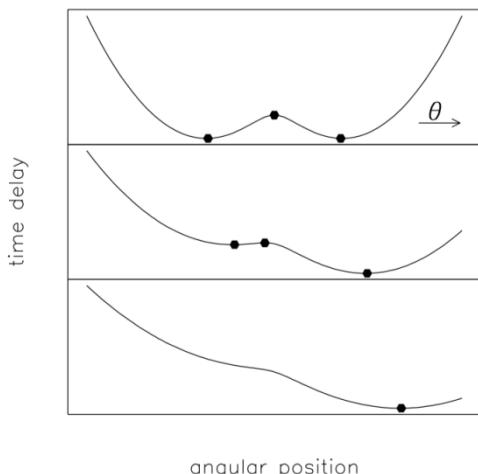
$$t(\vec{\theta}) = \frac{(1 + z_d) D_d D_{ds}}{c} \left( \frac{1}{2} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \psi(\vec{\theta}) \right)$$



*Рис.6.1. Графики временных задержек, соответствующие сферически-симметричному полю линзы. Точками обозначены положения изображений.[2]*

Для более сложных потенциалов нужно рассматривать всю плоскость  $\theta$ .

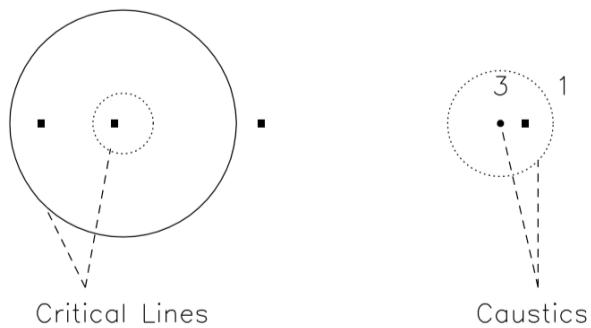
Матрица  $T$  описывает кривизну поверхности  $t(\theta)$ . Существует три типа стационарных точек двумерной поверхности: минимумы, седловые точки и максимумы. Тип можно определить по знакам собственных значений матрицы  $T \propto A$ . Если оба собственных значения положительны – это минимум (поверхность искривляется вверх), если разного знака – седловая точка, если отрицательны – максимум. Поскольку увеличение обратно  $\det A$ , изображения, соответствующие точкам минимума и максимума, получается увеличенными, а для седловидной точки характерно отрицательное увеличение.



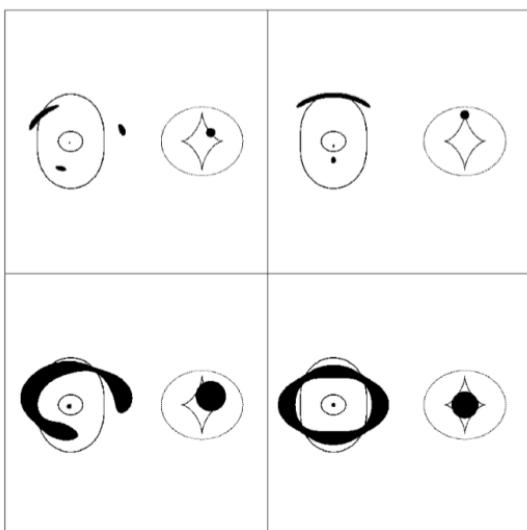
*Рис.6.2. График полной временной задержки в зависимости от смещения источника относительно оси линза – наблюдатель.[2]*

Из рисунка 6.2. видно, что при смещении наблюдателя (источника) от оси, на которой расположены линза и источник (наблюдатель), количество,

положение и тип стационарных точек меняются. Причем при некотором значении  $\theta$  два изображения сливаются и исчезают. При сближении изображений кривизна поверхности стремится к 0, а увеличение и яркость изображений сильно возрастают. Линии в  $\theta$  пространстве называются критическими, а соответствующие линии в  $\beta$  пространстве – каустиками. Они ограничивают области с различным количеством изображений. При пересечении источником каустики в сторону уменьшения угла  $\beta$ , количество изображений увеличивается в два раза. При большом значении  $\theta$  присутствует одно изображение. Таким образом, количество изображений нечетно.



*Рис.6.3. Изображение точечного источника сферически-симметричной линзой. Слева – положения изображений и критические линии, справа – исходное положение источника и каустики.[2]*



*Рис.6.4. Изображения протяженного источника, полученные с помощью эллиптической линзы. Наверху – большие дуги, состоящие из нескольких слившихся изображений. Внизу кольцеобразные изображения источника, покрывающего большую часть ромбовидной каустики.[2]*

## 7. Методы получения оценки и профиля массы по результатам сильного и слабого линзирования.

### Сильное линзирование.

При сильном линзировании мы получаем множественные изображения фоновых галактик, сильно искаженные дуги, гигантские дуги, кольца. С помощью этих данных можно судить о массе, сконцентрированной в центральной части линзы, внутри радиуса Эйнштейна. Гигантские дуги возникают вблизи критических кривых, которые соответствуют каустикам в пространстве фоновых источников. В первом приближении, предполагается сферически-симметричное распределение массы линзы. Средняя поверхностная плотность массы, ограниченной тангенциальной критической кривой, равна критической поверхностной плотности. Тогда для оценки массы можем использовать соотношение  $\langle \Sigma(\theta_{arc}) \rangle \approx \Sigma(\theta_E) = \Sigma_{cr}$ . Для массы имеем:

$$M(\theta_{arc}) \approx \Sigma_{cr} \pi (D_d \theta_{arc})^2$$

Эта оценка дает точность порядка 30%, которая зависит от уровня асимметрии в массовом распределении.

Определение массы в центральной области линзы можно провести точнее, если имеется несколько искаженных изображений, потому что в этом случае можно использовать детальное моделирование. [5] Так вначале можно подобрать модель массового распределения, соответствующую наблюдаемым данным. Затем эта модель предсказывает наличие других дополнительных изображений. В случае подтверждения строится новая усложненная модель. Далее процесс повторяется. Точность таких оценок массы увеличивается на порядок.

Для осуществления данного подхода используются Фурье преобразования и алгоритм FFT (Fast Fourier Transform). В данных рассуждениях исследуется область с конечной массой. Определим преобразования Фурье для интересующих нас величин. Обозначим через  $\mathbf{k}$  переменную трехмерного пространства Фурье, а через  $\mathbf{l}$  соответствующий угол.

$$\hat{\kappa}(\mathbf{l}) = \int_{R^2} d^2\theta \kappa(\theta) \exp(i\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}) \quad (7.1)$$

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} d^2l \hat{\kappa}(l) \exp(-i\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}) \quad (7.2)$$

В пространстве Фурье образов взятие градиента заменяется умножением:

$$-|\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}(l) = 2\hat{\kappa}(\mathbf{l})$$

При  $\mathbf{l} = \mathbf{0}$  потенциал не определен, однако этот случай соответствует константе, и мы можем ее занулить.

$$\hat{\alpha}(\mathbf{l}) = -il\hat{\psi}(l)$$

$$\hat{\gamma}(\mathbf{l}) = -\left(\frac{l_1^2 - l_2^2}{2} + il_1l_2\right)\hat{\psi}(l)$$

При достаточно малых  $\kappa$  интеграл 6.2 может быть аппроксимирован суммой над точками равномерной сетки. Дискретное преобразование Фурье использует значения  $\kappa$  на  $\theta$ -сетке для вычисления  $\hat{\kappa}$  на  $l$ -сетке. [6] Затем можно найти  $\hat{\psi}(l)$ ,  $\hat{\alpha}(l)$ ,  $\hat{\gamma}(l)$  и вернуться с помощью обратных преобразований Фурье в пространство объектов. Для других точек эти характеристики могут быть получены путем интерполяции. По полученным данным можно уточнить модель распределения массы.

### Слабое линзирование. Алгоритм Кайзера- Сквайерса.

Для восстановления профиля массы в большем телесном угле имеет смысл прибегнуть к слабому линзированию, для которого характерно формирование одного слабо деформированного изображения. Искажения изображения за счет прохождения света сквозь гравитационное поле массивного объекта наблюдаются в тангенциальном направлении. Искажения, вызванные шумами, деформируют изображение во всех направлениях с равной вероятностью.[8] В то время как реальные размеры источника не известны, есть возможность сделать выводы о распределении массы в значительной области пространства, анализируя эллиптичность “дужек”. Здесь возникает проблема, связанная с тем, что мы видим галактики, спроектированные на плоскость, перпендикулярную лучу зрения. Однако если предположить, что в пространстве нет предпочтительного направления для ориентации галактик, то в среднем при хорошей статистике неискаженное изображение будет иметь форму круга. При слабом линзировании изображение круглого источника выглядит эллиптическим с осями:  $a = \frac{r}{1-\kappa-\gamma}$ ,  $b = \frac{r}{1-\kappa+\gamma}$ , где  $r$ -радиус неискаженного объекта. Тогда эллиптичность задается соотношением 6.3, в котором учтено, что для слабого линзирования  $\kappa, \gamma \ll 1$ .

$$\epsilon = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\gamma}{1-\kappa} \approx \gamma \quad (7.3)$$

Таким образом, при слабом линзировании эллиптичность непосредственно измеряет сдвиг. Вообще говоря, эллиптичность как и сдвиг имеет две компоненты:  $\epsilon_1 = \epsilon \cos 2\varphi$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon \sin 2\varphi$ . Результирующая эллиптичность

складывается из внутренней и внешней, но при хорошей статистике значение эллиптичности опять же стремится к сдвигу, который нам и нужен.

$$\epsilon_i = \epsilon_i^{(s)} + \gamma_i = \epsilon^{(s)} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \epsilon \rangle \approx \langle \gamma \rangle \quad (7.4)$$

Теперь перейдем непосредственно к алгоритму, позволяющему определить распределение плотности массы.[7] Метод Кайзера-Сквайерса основан на том, что сдвиг и сходимость являются линейными комбинациями скалярного потенциала и как следствие могут выражаться друг через друга. Подразумевается, что компоненты сдвига измеряются экспериментально [Рис.7.1.].

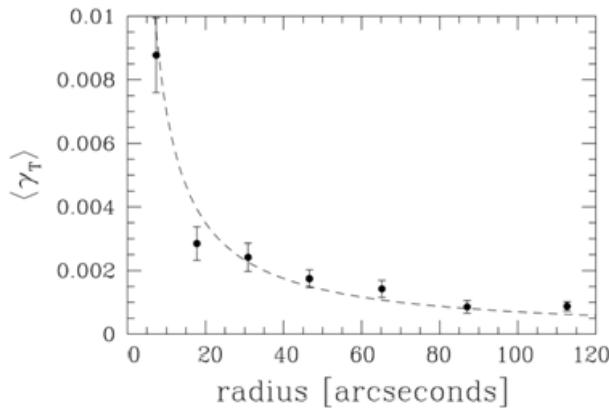


Рис.7.1. Экспериментально полученная зависимость сдвига от расстояния от центра линзы.[4]

После чего вычисляется зависимость сходимости от угла, что сразу же дает возможность перейти к плотности.

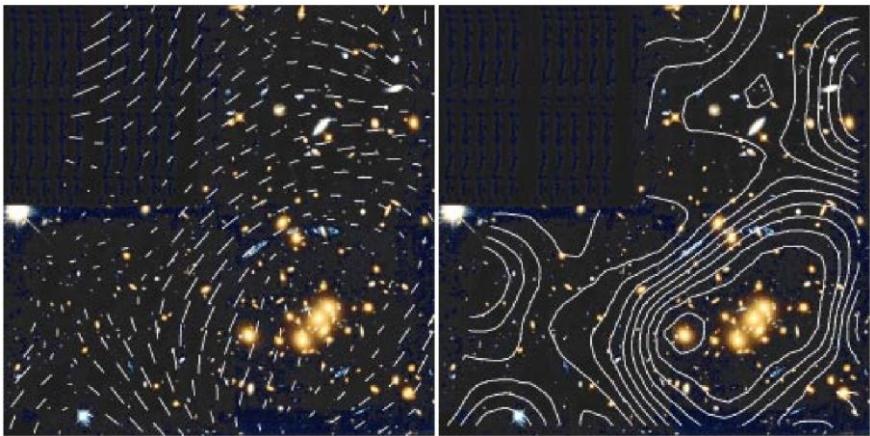
$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{R^2} d^2(\boldsymbol{\theta}') \operatorname{Re}[D^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \gamma(\boldsymbol{\theta}')] \quad (7.5)$$

$D$ -комплексное ядро свертки.

$$D(\theta) = \frac{(\theta_2^2 - \theta_1^2) - 2i\theta_1\theta_2}{\theta^4}$$

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \Sigma_{cr} \kappa(\boldsymbol{\theta})$$

Таким образом восстанавливается профиль массы в достаточно большом телесном угле.



*Рис.7.2. Изображение скопления, наложенное слева на поле сдвига, полученное в результате наблюдения дужек, а справа на поверхностное распределение массы.[7]*

Реконструкция , изображенная на рисунке 7.2. была выполнена с использованием метода конечного поля, с помощью которого сходимость в любой точке  $\theta$  получается через величину сходимости в точке  $\theta_0$ . В этом методе берется криволинейный интеграл 7.6., и подобрав в качестве нижнего предела точку с пренебрежимо малой сходимостью, можно избежать неоднозначности в зависимости  $\kappa(\theta)$ . В этом заключается преимущество данного метода над алгоритмом Кайзера-Сквайерса, в котором необходимо считать свертку на всей  $\theta$ - плоскости.

$$\kappa(\theta) = \kappa(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} d\ell \nabla \kappa(\theta(\ell)) \quad (7.6)[7]$$

## 8. Использования гравитационного линзирования для обнаружения и исследования темной материи.

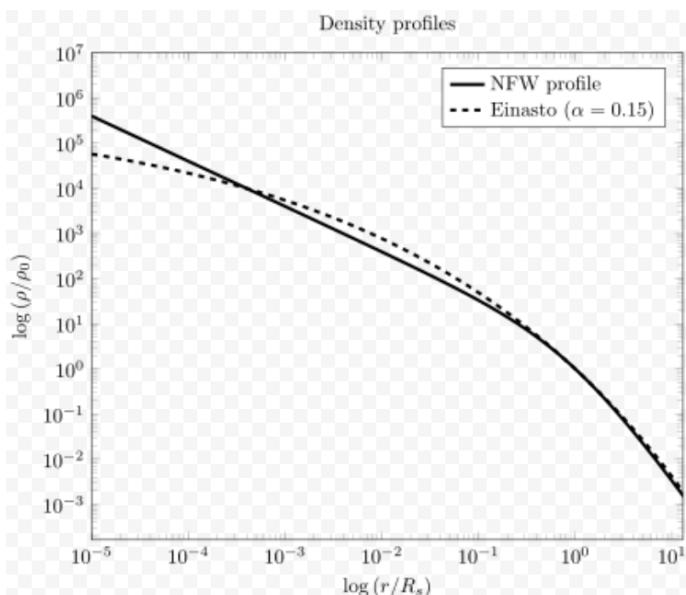
Физика гравитационного линзирования зависит только от массового распределения вещества в пространстве, поэтому эффекты слабого и сильного линзирования используют для обнаружения и изучения темной материи.

Результаты сильного линзирования показали, что наблюдаемой барионной массы галактик не хватает, чтобы формировать значительно смещенные друг от друга изображения. Таким образом, если бы не было темных гало вокруг галактик и кластеров, то не было бы достаточно сильного искривления пространства, и не наблюдались бы изображения на угловых расстояниях более 2" друг от друга, однако, такие случаи были зафиксированы.

Если для сильного линзирования можно делать оценки массы только внутри радиуса Эйнштейна( $\sim 10$  кПк), то слабое линзирование позволяет исследовать значительно большее пространство вокруг линзы. Анализируя слабо искривленные дужки фоновых галактик, были получены оценки радиуса темного гало  $\sim 100$ кпк. [9]

Метод Кайзера-Сквайерса был применен к ряду кластеров, также масса этих объектов была вычислена другими методами: рентгеновские наблюдения, динамика удаленных от центра звезд. Эти подходы согласуются и дополняют друг друга.

Данные, накапливаемые в течение нескольких десятилетий, и проанализированные с помощью различных методов, приводят к выводу о том, что темной материи в 5-6 раз больше, чем барионной. Количество темного вещества относительно барионного и его распределение важно для понимания формирования вселенной. В частности зависимость доли темной материи от расстояния до центра галактики (кластера галактик) дает важную информацию о механизмах формирования галактик и взаимодействии темной и барионной материи. Исследования показали, что распределение плотности массы согласуется с профилями Наварро-Фрэнка-Вайта и Эйнасто [Рис.8.1.]. [7] Надо заметить, что внутренние области гораздо сложнее поддаются моделированию, поскольку надо учитывать роль барионного вещества. Общая оценка массы внутри радиуса Эйнштейна не сильно зависит от выбора профиля.



*Рис.8.1. Зависимость приведенной плотности вещества от приведенного расстояния до центра линзы в логарифмическом масштабе.*

Возникает проблема, связанная со сложностью определения барионной массы. Однако фотометрия позволяет получить отношение  $\frac{M}{L}$ , что может использоваться для оценки распределения массы звезд. Таким образом, зная распределение всей материи и барионной отдельно, можно оценить долю темной материи.

Скопление Ссылка	$M/L$	Замечание
MS 1224 Фолман и др. (1994)	800 $h$	Виртуальная масса в ~ 3 меньше ( $\sigma_v = 770 \text{ км с}^{-1}$ ) (1994) точность восстановления ~ 3'
A 1689 Тайсон & Фишер (1995); Кайзер (1995)	(400 ± 60) $h$	Вблизи центра распределение массы более гладко, чем распределение яркости; распределение массы более крутое, чем изотермическое от (200 – 1000) $h^{-1}$ кпк
Cl 1455 Смайл и др. (1995a)	520 $h$	Скрытое вещество в большей степени сконцентрировано, чем галактики
Cl 0016 Смайл и др. (1995a)	740 $h$	Скрытое вещество в большей степени сконцентрировано, чем галактики
A 2218 Сквайерс и др. (1996a)	440 $h$	Доля газа в массе $< 4\% h^{-3/2}$
A 851 Зайн и др. (1996)	200 $h$	Распределение массы согласовано с распределением галактик и рентгеновским излучением

Таблица. Отношения масса-светимость некоторых скоплений.[7]

Современные проекты, такие как Гайа и Чандра, позволяют увеличить отношение сигнал/шум, и получать наиболее правдивые данные для анализа распределения массы.

## 9. Заключение

Итак, для поиска темной материи необходимо собрать данные о распределении интенсивности в каком-либо диапазоне частот в некотором телесном угле. Лучшие данные можно получить с помощью космических телескопов с большой разрешающей способностью и малой астигматической аберрацией. Область для исследования можно выбрать по результатам сильного линзирования. Полученные данные визуализируются, и по характеру искажений изображений выбирается центр масс, от которого ведется отсчет угловых расстояний. Далее область разбивается на ячейки, по которым производится усреднение эллиптичности, которая для удаленных от центра изображений фактически равна сдвигу. По получены данным проводится фитирование, и строится зависимость сдвига от расстояния до центра. Далее применяется алгоритм Кайзера- Сквайерса (вычисляется интеграл 6.5.) и восстанавливается распределение плотности. Поскольку анализируются данные по конечной области пространства, стоит использовать метод конечного поля (вычисляется интеграл 7.6.). Затем можно создать математическую модель, удовлетворяющую полученным данным. Она может выделить области, в которых могут находиться изображения, необходимые для улучшения модели. Эти области стоит изучить в других частотных диапазонах, и если удастся найти новые изображения, массовая модель приблизится к истинному распределению массы. После нескольких таких итераций можно достаточно точно определить полную массу в этой области пространства. Если в линзе есть барионное вещество, то интересно сравнить массу темной материи и излучающей. Но стоит отметить, что сейчас в Млечном Пути удается найти и полностью темные клампы.[10] Таким образом, можно детектировать темную материю и делать выводы о ее распределении в пространстве.

## 10. Список литературы

- [1] П.В. Блиох, А.А. Минаков, Гравитационные линзы, 1989
- [2] Ramesh NARAYAN, Lectures on Gravitational Lensing, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics 60 Garden Street Cambridge, MA 02138, USA
- [3] Schneider, Ehlers, & Falco, Gravitational Lenses, Springer-Verlag 1992
- [4] Massimo Meneghetti, Introduction to Gravitational Lensing, Lecture scripts
- [5] Peter Schneider Institut f. Astrophysik, Universitat Bonn, D-53121 Bonn, Germany, Weak Gravitational Lensing
- [6] В.П. Кандидов, С.С. Чесноков, С.А. Шленов, ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
- [7] А.Ф. Захаров, Гравитационные линзы и микролинзы, 1997
- [8] J. JIMENEZ-VICENTE, E. MEDIAVILLA, C. S. KOCHANEK, J. A. MUÑOZ, Dark Matter Mass Fraction in Lens Galaxies: New Estimates from Microlensing
- [9] Richard Massey, Viewing dark matter with weak gravitational lensing from HST
- [10] Cristina Mondino, Anna-Maria Taki, Ken Van Tilburg, Neal Weiner, Center for Cosmology and Particle Physics, Department of Physics, New York University, New York, NY 10003, USA, First Results on Dark Matter Substructure from Astrometric Weak Lensing, February 7, 2020