

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В.ЛОМОНОСОВА»
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА
Галактическое гало с нестабильной компонентой темной
материи

Студент 202 группы
Шелухан Матвей Игоревич

Научный руководитель
член-корр. РАН, доктор физ.-
мат. наук, Горбунов Дмитрий
Сергеевич

Москва - 2020

Оглавление

Введение	2
1. Профиль Наварро-Френка-Уайта(NFW) и его модификации	3
2. Численный расчет	8
Заключение	12
Литература	13

Введение

Проблема темной материи во вселенной - одна из нерешенных проблем современной астрофизики. Главной целью ученые ставят выявление природы происхождения темной материи, ее количестве и распределении в галактиках.

Гипотезы о существовании темной энергии обусловлены расхождением между теоретическими кривыми вращения галактик, полученными на основе распределения звезд, и наблюдательными данными. Предполагается, что темная материя - это некая среда, воспринимаемая лишь по ее гравитационному взаимодействию, хотя не исключается возможность ее слабого излучения в гамма диапозоне при аннигиляции. Также ясно, что общая масса темной материи должна значительно превышать массу видимого вещества. Поскольку, согласно нынешним представлениям, темная материя не взаимодействует с электромагнитным излучением, то непосредственно увидеть ее не представляется возможным, но существует большое число косвенных методов обнаружения этих частиц, включая поиск гамма лучей от их аннигиляции.

Первые попытки описать распределение темной материи в галактиках и скоплениях использовали модель изотермической сферы, описывающей вещество галактики как идеальный газ в термодинамическом равновесии. При таком описании вне центрального ядра постоянной плотности плотность $\rho \propto r^2$, где r это расстояние до центра системы. С появлением мощных компьютеров стало возможным детальное компьютерное моделирование структуры и эволюции звездных систем, что позволило получить более точное математическое описание распределения массы в галактиках. К середине 1990-х накопилось большое число нестыковок и противоречий в результатах моделирования, свидетельствовавших, что модель изотермической сферы неудовлетворительна. В 1995 году публикуется статья Джулио Наварро, Карлоса Френка и Саймона Уайта [1], в которой предлагается новая модель, получившая название “профиль Наварро-Френка-Уайта”(NFW).

Глава 1.

Профиль Наварро-Френка-Уайта(NFW) и его модификации

Согласно статье [1], численное моделирование формирования структуры гало в расширяющейся Вселенной дает следующую формулу зависимости $\rho(r)$:

$$\rho(r) = \frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \quad (1.1)$$

где r_s и C являются параметрами, меняющимися в зависимости от свойств гало.

Модель отличается быстрым возрастанием плотности гало на малых r , имеет так называемый касп. Также данный профиль является достаточно универсальным, поскольку он применим для широкого диапазона масс гало, составляющего четыре порядка, от гало отдельных галактик до гало скоплений галактик. Наблюдательные данные о таких галактиках, как Млечный Путь и M 31, скорее всего, согласуются с моделью Наварро—Френка—Уайта, но пока данный вопрос является открытым. Однако данный профиль не согласуется с наблюдениями галактик низкой поверхностной яркости, которые обладают меньшей центральной массой, чем предсказывается. Итак, целью данной работы является модификация профиля NFW, с помощью которой удастся избавиться от быстрого возрастания функции плотности массы в центре галактики.

Предположим, что темная материя в галактиках состоит из двух компонент:

x -стабильная компонента, взаимодействующая лишь гравитационным образом. Время жизни многое больше времени жизни галактики ($\tau \gg \tau_u$).

y -нестабильная компонента, способная аннигилировать или распадаться. Время жизни сравнимо с временем жизни галактики ($\tau \sim \tau_u$).

В результате аннигиляции или распада у-компоненты должны рождаться релятивистские частицы, масса которых гораздо меньше массы компонент темной материи. Такие частицы должны обладать большой энергией, что позволяет им вылететь из гало галактики прежде, чем они успеют взаимодействовать с другими частицами. В результате мы получаем систему, из которой постепенно "утекает" масса. В дальнейшем будем считать, что обратной реакции не происходит - то есть возможное перестроение гало под действием гравитации мы не учитываем.

Чтобы описать такую систему, предположим, что в некоторый начальный момент времени распределение плотности у-компоненты в гало подчиняется профилю NFW. Переходим к функции двух переменных $\rho_y(r, t)$, причем :

$$\rho_y(r, 0) = \frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \quad (1.2)$$

Концентрация n_y является функцией координаты и времени, ведь:

$$n_y = \frac{\rho_y(r, t)}{m_y} = n_y(r, t) \quad (1.3)$$

где m_y -масса нестабильной частицы темной материи. Рассмотрим три возможных сценария:

1) Распад нестабильной компоненты.

В ходе распада нестабильной компоненты ее концентрация в гало будет уменьшаться со временем, причем закон распада имеет следующий вид:

$$\frac{dn_y}{dt} = -\lambda n_y \quad (1.4)$$

где λ -постоянная распада. Решив соответствующее дифференциальное уравнение, взяв в качестве концентрации в начальный момент времени $n_y(r, 0) = \frac{\rho_y(r, 0)}{m_y}$, где $\rho_y(r, 0)$ берется из (1.2), будем иметь:

$$n_y(r, t) = n_y(r, 0) \cdot e^{-\lambda t} = \frac{1}{m_y} \cdot \frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \cdot e^{-\lambda t} \quad (1.5)$$

Выражение для плотности:

$$\rho_y(r, t) = \frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \cdot e^{-\lambda t} \quad (1.6)$$

Для среднего времени жизни нестабильной компоненты имеем:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (1.7)$$

Из (1.6) видно, что в каждой точке г концентрация за промежуток времени t изменится в $e^{-\lambda t}$ раз, но вид профиля останется неизменным, поэтому сам по себе распад не повлияет на структуру распределения плотности в гало.

2)Аннигиляция нестабильной компоненты.

Будем рассматривать случай аннигиляции двух частиц нестабильной компоненты темной материи.Рассмотрим единичный объем гало.Число возможных пар,которые могут образовать у-компоненты $n_y(n_y-1) \approx n_y^2$, а в свою очередь,согласно закону Больцмана для слабой аннигиляции, скорость аннигиляции прямо пропорциональна числу этих пар,то есть:

$$\frac{dn_y}{dt} = -\sigma B n_y^2 \quad (1.8)$$

где σ -сечение аннигиляции,В-размерная постоянная. Тогда,решая дифференциальное уравнение как и в первом случае,получим выражение для концентрации нестабильной компоненты:

$$n_y(r, t) = \frac{n_y(r, 0)}{1 + n_y(r, 0) \cdot \sigma B t} \quad (1.9)$$

Или,после подстановки выражения для плотности из NFW:

$$\rho_y(r, t) = \frac{\frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2}}{1 + \frac{1}{m_y} \cdot \frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \cdot \sigma B t} \quad (1.10)$$

При достаточно малых r в знаменателе можно отбросить единицу.Таким образом:

$$\rho_y(r \rightarrow 0, t) = \frac{m_y}{\sigma B t} \quad (1.11)$$

Тем самым мы получили,что в модели аннигиляции частиц темной материи плотность в центре имеет конечное значение,а вовсе не возрастает до бесконечности. Также попробуем выяснить,как ведет себя профиль при больших r .Для этого заметим,что при $r \rightarrow +\infty$ выражение $\frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \rightarrow 0$,а следовательно:

$$\rho_y(r \rightarrow +\infty, t) = \frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \left(1 - \frac{1}{m_y} \cdot \frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \sigma B t \right) \quad (1.12)$$

Из (1.12) хорошо видно,что при больших r профиль не сильно отличается от NFW,то есть большей модификации из-за аннигиляции подверглась именно центральная область гало.Можно сказать,что профиль постепенно "разглаживается".

3)"Медленная"аннигиляция.

Рассматривая влияние аннигиляции на концентрацию нестабильной компоненты,запишем формально закон,по которому концентрация у-компоненты будет даваться формулой:

$$n_y(r, t) = n_y(r, 0) \cdot e^{-\sigma B n_y(r, t)t} \quad (1.13)$$

где σ и B -те же,что и в пункте 2. При каждом фиксированном r продифференцируем наше равенство по t .После преобразований получим:

$$\frac{dn_y}{dt} = -\frac{\sigma B n_y^2}{1 + \sigma B n_y t} \quad (1.14)$$

Из (1.14) видно,что новый закон для убывания концентрации напоминает закон Больцмана для слабой аннигиляции,однако с течением времени концентрация будет убывать медленнее,чем в пункте 2.Это-некоторый промежуточный случай между первым и вторым сценарием,который тоже полезно рассмотреть.

Меняя местами $n_y(r, t)$ и $n_y(r, 0)$ в выражении (1.13),получим:

$$n_y(r, 0) = n_y(r, t) \cdot e^{\sigma B n_y(r, t)t} \quad (1.15)$$

Взяв вместо $n_y(r, 0)$ выражение $\frac{\rho_y(r, 0)}{m_y}$,где $\rho_y(r, 0)$ берется из (1.2),получим уравнение для неизвестной функции $n_y(r, t)$,решение которого выражается через W-функцию Ламберта следующим образом:

$$n_y(r, t) = \frac{W(n_y(r, 0) \cdot \sigma B t)}{\sigma B t} \quad (1.16)$$

W-функция Ламберта(обозначаемая $W(z)$) , вообще говоря определенная на множестве комплексных чисел , не выражается в элементарных функциях и является обратной функцией для $f(w) = w \cdot e^w$.Поскольку функция $f(w)$ не является инъективной на множестве $w \in (-\infty; 0)$,то $W(z)$ функция является многозначной на интервале $(-1/e; 0)$,так что рассматривать данную функцию необходимо на множестве положительных z .

Полезно в нашем случае знать асимптотику W-функции при $z \rightarrow +\infty$:

$$W(z \rightarrow +\infty) = \ln z - \ln \ln z \quad (1.17)$$

Итак,после подстановки в (1.16) выражения для концентрации у-компоненты темной материи (1.3),взяв в качестве функции плотности в начальный момент времени (1.2),получим выражение для распределения и эволюции во времени плотности нестабильной компоненты темной материи:

$$\rho_y(r, t) = m_y \cdot \frac{W(\frac{1}{m_y} \frac{C}{r_s \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \cdot \sigma B t)}{\sigma B t} \quad (1.18)$$

Новый профиль $\rho_y(r, t)$ при $t \rightarrow 0$ должен перейти в профиль NFW. Проверим это, воспользовавшись теоремой Лагранжа об обращении рядов, которая позволит в малой окрестности нуля представить W-функцию Ламберта в виде степенного ряда:

$$W(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(-n)^n}{n!} \cdot z^n = z + o(z) \quad (1.19)$$

Ограничевшись первым членом в разложении (1.19), подставим его в (1.18) и перейдем к пределу при $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho_y(r, t) = \lim_{t \rightarrow 0} m_y \cdot \frac{\frac{1}{m_y} \frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \cdot \sigma B t}{\sigma B t} = \frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \quad (1.20)$$

Также необходимо выяснить поведение функции $\rho_y(r, t)$ при малых r . Для этого заметим, что при $r \rightarrow 0$ аргумент функции Ламберта стремится к бесконечности, а значит можно воспользоваться асимптотическим представлением (1.17). Таким образом:

$$\rho_y(r \rightarrow 0, t) = m_y \cdot \frac{\ln \left(\frac{\sigma B t}{m_y} \cdot \frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \right) - \ln \ln \left(\frac{\sigma B t}{m_y} \cdot \frac{C}{\frac{r}{r_s} \cdot (1 + \frac{r}{r_s})^2} \right)}{\sigma B t} \quad (1.21)$$

Отсюда ясно, что этот профиль для нестабильной компоненты (1.9) при малых r возрастает гораздо медленней профиля NFW.

Глава 2.

Численный расчет

Значение соответствующих постоянных величин возьмем из статьи Д. Наварро, К. Френка и С. Уайта [1] :

$$\begin{aligned} C &= \rho_c \cdot \delta_c \\ \rho_c &= \frac{3H^2}{8\pi G} \\ \delta_c &= \frac{200}{3} \cdot \frac{c^3}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \\ R_{vir} &= c \cdot r_s \\ R_{vir} &= r_{200} = \sqrt[3]{\frac{GM_{200}}{100H^2}} \end{aligned}$$

где ρ_c -критическая плотность Вселенной, H -постоянная Хаббла, G -гравитационная постоянная, R_{vir} -так называемый вироальный радиус, в данном случае радиус, на котором средняя плотность внутри сферы данного радиуса будет в 200 раз превышать критическую плотность.

Значение параметра c для Млечного Пути равно примерно 10-15, а для других гало лежит в интервале от 4 до 40. Массу нестабильной частицы темной материи можно варьировать в пределах от 10^4 эВ до 10^9 ГэВ.

Выберем $c = 10, m_y = 10^6$ эВ. Произведя необходимые расчеты, получим : $\delta_c = 44778$, $\rho_c = 10^{-26} \frac{kg}{m^3}, r_s = 5$ кпк, $R_{vir} = 50$ кпк.

Построим наши профили в логарифмическом масштабе для моментов времени $t = 10^6$ и $t = 10^9$ лет и сравним их друг с другом и с профилем NFW при тех же значениях параметров.

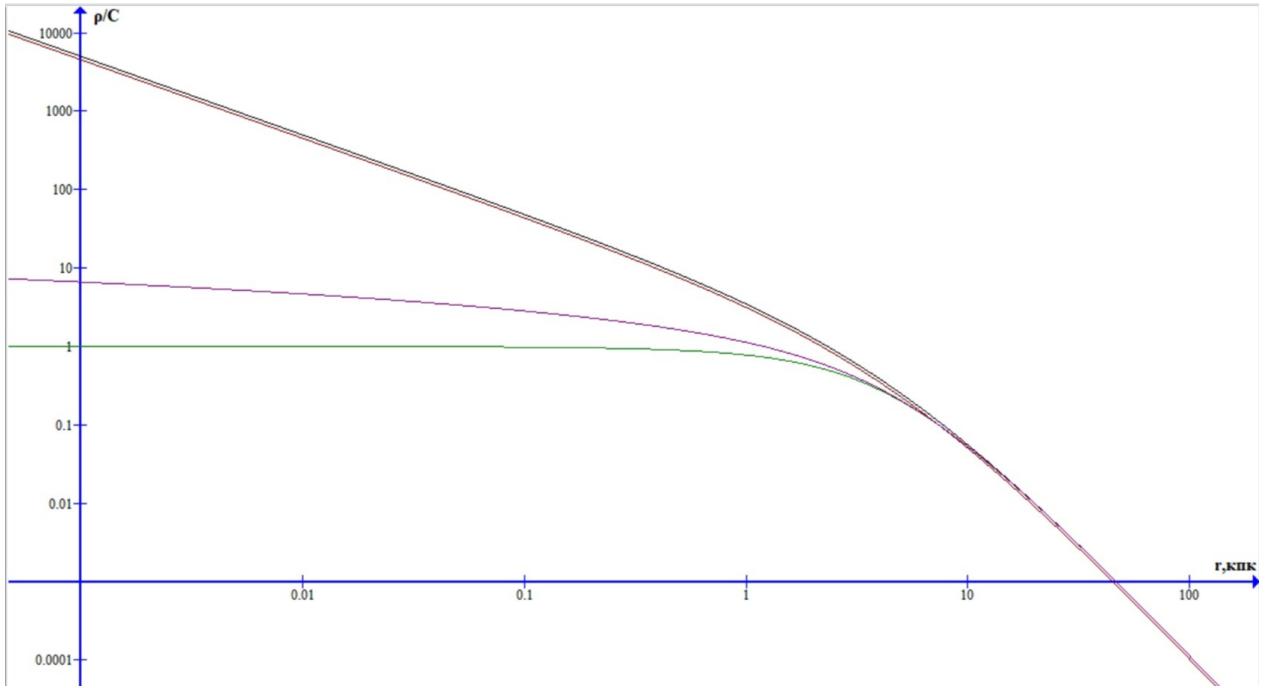


Рис. 2.1. Профили в момент времени $t = 10^6$ лет :Черный цвет на графике-профиль NFW,Красный-модифицированный профиль в случае распада,Зеленый-модифицированный профиль в случае анигиляции,Фиолетовый-модифицированный профиль в случае замедленной анигиляции

Из (Рис 2.1) и (Рис 2.2) видно, что профиль, соответствующий распаду частиц темной материи, для времени $t = 10^6$ лет практически совпадает с NFW, однако по прошествии $t = 10^9$ лет он уменьшился до критических значений, причем его структура практически ничем от NFW не отличается. Профили в случае 2 и 3 при больших r для обоих промежутков времени ведут себя аналогично профилю NFW, однако на малых масштабах наши профили уже не содержат характерного для профиля NFW каспа в центре.

Введем обозначение: $\rho_{yi}(r, t_j)$, где $i = 0$ -изначальный профиль, $i = 1, 2, 3$ -профили в трех модификациях, $j = 1, 2$ -моменты времени t_1 и t_2 . Выясним, какая доля y -компоненты темной материи проаннигилировала(в первом случае распалась) к этим двум моментам времени. Для этого проинтегрируем наши профили по r для двух $t_1 = 10^6$ лет и $t_2 = 10^9$ лет, предварительно умножив каждый профиль на $4\pi r^2$, считая распределение массы в каждом случае сферически-симметричным:

$$M_0 = \int_0^{R_{vir}} 4\pi r^2 \cdot \rho_{y0}(r, 0) dr \quad (2.1)$$

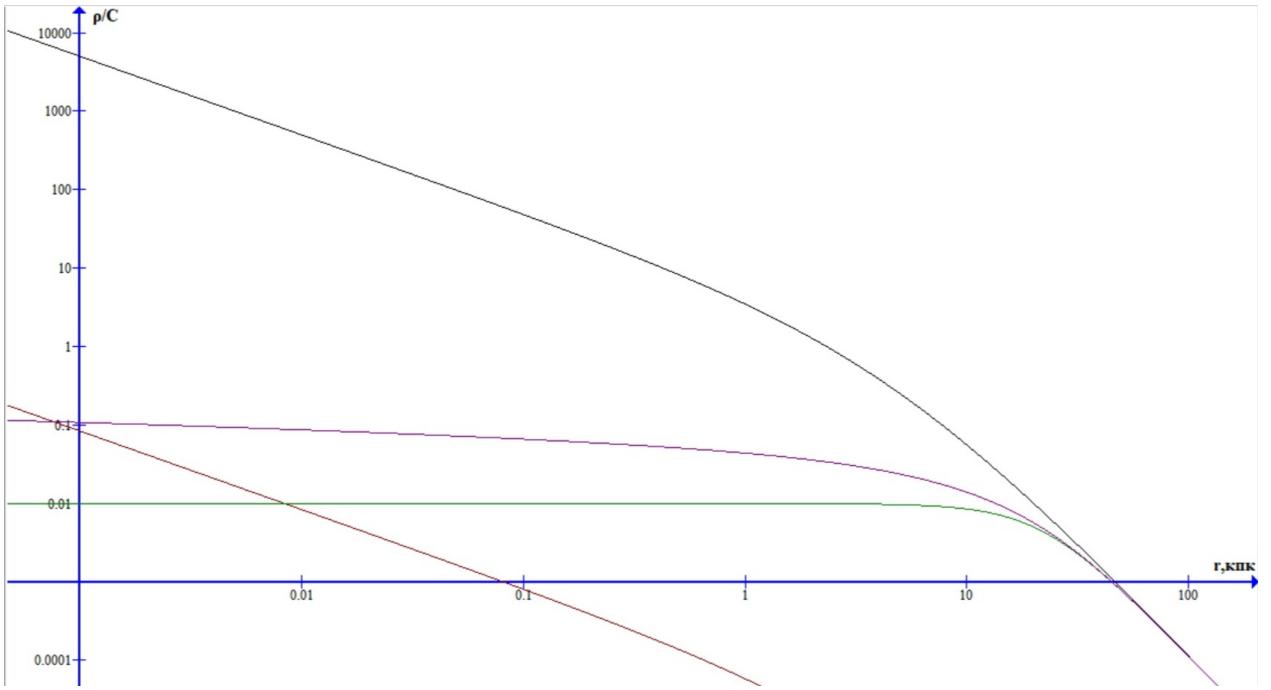


Рис. 2.2. Те же профили с тем же соответствием цветов в момент времени $t = 10^9$ лет

$$M_{i=1;t_1} = \int_0^{R_{vir}} 4\pi r^2 \cdot \rho_{y1}(r, t_1) dr \quad (2.2)$$

$$M_{i=1;t_2} = \int_0^{R_{vir}} 4\pi r^2 \cdot \rho_{y1}(r, t_2) dr \quad (2.3)$$

$$M_{i=2;t_1} = \int_0^{R_{vir}} 4\pi r^2 \cdot \rho_{y2}(r, t_1) dr \quad (2.4)$$

$$M_{i=2;t_2} = \int_0^{R_{vir}} 4\pi r^2 \cdot \rho_{y2}(r, t_2) dr \quad (2.5)$$

$$M_{i=3;t_1} = \int_0^{R_{vir}} 4\pi r^2 \cdot \rho_{y3}(r, t_1) dr \quad (2.6)$$

$$M_{i=3;t_2} = \int_0^{R_{vir}} 4\pi r^2 \cdot \rho_{y3}(r, t_2) dr \quad (2.7)$$

Взяв соответствующие интегралы численно, получим:

$$\frac{M_0 - M_{i=1;t_1}}{M_0} = 9.5\%; \quad (2.8)$$

$$\frac{M_0 - M_{i=1;t_2}}{M_0} = 97.3\%; \quad (2.9)$$

$$\frac{M_0 - M_{i=2;t_1}}{M_0} = 8.2\%; \quad (2.10)$$

$$\frac{M_0 - M_{i=2;t_2}}{M_0} = 55\%; \quad (2.11)$$

$$\frac{M_0 - M_{i=3;t_1}}{M_0} = 7.4\%; \quad (2.12)$$

$$\frac{M_0 - M_{i=3;t_2}}{M_0} = 49\%; \quad (2.13)$$

Мы видим, что даже спустя время $t = 10^6$ лет эволюции гало, когда доля проаннигилировавших частиц в случаях 2 и 3 не очень велика (2.12 и 2.10), наши профили уже не содержит такого скачка плотности, как в профиле NFW.

Заключение

В настоящей работе были рассмотрены варианты нестабильных частиц темной материи, при которых масса галактического гало постепенно уменьшается, что в свою очередь влияет на распределение плотности внутри гало, причем нестабильная компонента аннигилирует или распадается тем быстрее, чем ближе она находится к центру галактического гало. Были получены профили нестабильной компоненты для трех возможных сценариев и для двух характерных моментов времени t_1 и t_2 , сравнив их с профилем NFW, мы увидели, что профили видут себя принципиально по-разному вблизи галактического центра: тот, что соответствует распаду, продолжает стремительно увеличиваться к центру галактики, как и NFW, а 2 и 3 профили, соответствующие разным скоростям аннигиляционного процесса, деформируются и избавляются от каспа в центре.

Литература

- [1] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, Simon D.M. White The Structure of Cold Dark Matter Halos, astro-ph/9508025 7 Aug 1995
- [2] Засов А В, Сабурова А С, Хоперсков А В, Хоперсков С А "Тёмная материя в галактиках" УФН 187 3–44 (2017)
- [3] T. C. Scott, R. B. Mann. General Relativity and Quantum Mechanics: Towards a Generalization of the Lambert W Function (англ.) // AAECC (Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing) : journal. — 2006. — Vol. 17, no. 1. — P. 41–47.