Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа

Рассмотрение неоднородностей масивного комплексного скалярного поля в расширяющейся вселенной

Выполнил:
студент 213 группы
Писаренко С.А.

Научный руководитель:
Горбунов Д.С.

Москва 2020

Содержание

1 Введение

Известно, что Вселенная расширяется, т.е увеличивается расстояние между двумя отдалёнными ее частями с течением времени. Расширение является основным элементом теории горячего Большого взрыва. В работе будет рассматриваться одна из моделей такой Вселенной - Вселенная Фридмана-Робертсона-Уокера. Интересно изучать поведение различных полей и их физических явлений, таких как темп релаксации за счет гравитационного взаимодействия, в расширяющейся Вселенной.

Целью данной работы является опровержение результата полученного в работе O. Erken, P. Sikivie, H. Tam, Q. Yang - "Cosmic axion thermalization"для скорости релаксации масивного комплексного скалярного поля за счет гравитационного взаимодействия на ЬВ стадии в случае слабых неоднородностей, а так же обощение полученного результата на RD стадию при дополнительных условиях.

2 Комплексное скалярное поле в возмущенной метрике Фридмана-Робертсона-Уокера

Рассмотрим возмущенную метрику Фридмана-Робертсона-Уокера вида:

$$g_{\mu\nu} = diag((1+2\Psi), -a^2(1-2\Phi), -a^2(1-2\Phi), -a^2(1-2\Phi)) \tag{2.1}$$

где a=a(t),$\Psi = \Psi(\vec{x},t), \Phi = \Phi(\vec{x},t)$.Стоит отметить, что мы будем пользоваться стандартной системой едениц $\hbar = c = 1$.

Далее рассмотрим лагранжиан комплексного скалярного поля вида:

$$\pounds = \frac{1}{2}g^{\mu}\nu(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* + \partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi\phi^* \tag{2.2}$$

Будем всегда считать что греческие индексы ν, μ принимают значения (0,1,2,3), а латинские i,j,k - (1,2,3).

Получим уравнение движения для нашего скалярного поля.Для этого приравняем вариацию действия нулю

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi - m^2\phi = 0 \tag{2.3}$$

где $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ - символы Кристоффеля, соответсвующие метрике $g^{\mu\nu}$.

Для метрики Фридмана-Робертсона-Уокера можно получить следущие ненулевые символы Кристоффеля

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{\Psi}}{1+2\Phi} \quad ; \quad \Gamma^0_{i0} = \frac{\partial_i\Psi}{1+2\Psi}$$

$$\Gamma^0_{ii} = \frac{-a(a\dot{\Phi} - \dot{a}(1-2\Phi))}{1+2\Psi} \quad ; \quad \Gamma^i_{00} = \frac{\partial_i\Psi}{a^2(1-2\Phi)}$$

$$\Gamma^i_{i0} = \frac{-a(a\dot{\Phi} - \dot{a}(1-2\Phi))}{a^2(1-2\Phi)} \quad ; \quad \Gamma^{k\neq i}_{ii} = \frac{\partial_i\Phi}{1-2\Phi}$$

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{-\partial_i\Phi}{1-2\Phi} \quad ; \quad \Gamma^i_{ik} = \frac{-\partial_k\Phi}{1-2\Phi} \tag{2.4}$$

Подставляя выражения для символов Кристоффеля (2.4) в уравнение движения (2.3) получим

$$\begin{gathered}
-\frac{\ddot{\phi}}{1+2\Psi} + \frac{\triangle\phi}{a^2(1-2\Phi)} + \frac{\partial_i\Psi\partial_i\phi}{(1+2\Psi)a^2(1-2\Phi)} + \frac{\dot{\phi}\dot{\Psi}}{(1+2\Psi)(1+2\Psi)} + \\
+\frac{3}{a^2(1-2\Phi)} \times \frac{a(a\dot{\Phi} - \dot{a}(1-2\Phi))\dot{\phi}}{1+2\Psi} - \frac{2}{a^2(1-2\Phi)} \times \frac{\partial_k\Psi\partial_k\phi}{(1-2\Phi)} + \frac{1}{a^2(1-2\Phi)} \times \frac{\partial_k\Phi\partial_k\phi}{(1-2\Phi)} - m^2\phi = 0
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Умножая выражение (2.5) на $-(1+2\Psi)(1-2\Phi)$ и учитывая выражение для постоянной Хаббла $H = \dot{a}/a$, получаем

$$\begin{gathered}
(1-2\Phi)\ddot{\phi} - \frac{1+2\Psi}{a^2}\triangle\phi - \frac{1}{a^2}\left(\partial_i\Psi - \frac{1+2\Psi}{1-2\Phi}\partial_i\Phi\right)\partial_i\phi - \\
-\left(\frac{1-2\Phi}{1+2\Psi}\dot{\Psi} + \dot{\Phi} - 3H(1-2\Phi)\right)\dot{\phi} + (1-2\Phi)(1+2\Psi)m^2\phi = 0
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Рассматривая приблежение малых,слабонеоднородных гравитационных потенциалов $|\Phi|, |\Psi|, |l\partial_i\Psi|, |l\partial_i\Phi|, |\tau\dot{\Psi}|, |\tau\dot{\Phi}| \lll 1$, где τ характерное время изменения неоднородностей, l характерный пространственный масштаб неоднородностей.Раскроем выражение (2.6) с первым порядком по ним:

$$(1-2\Phi)\ddot{\phi}-\frac{1+2\Psi}{a^2}\triangle\phi-\frac{1}{a^2}\left(\partial_i\Psi-\partial_i\Phi\right)\partial_i\phi+\left(3H-6H\Phi-3\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\right)\dot{\phi}+m^2\phi=0 \quad (2.7)$$

Далее рассмотрим уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

для "00"компоненты можно получить уравнение типа Пуассона[4]

$$\triangle\Phi-3Ha^2(\dot{\Phi}+H\Psi)=4\pi Ga^2\delta\rho \quad (2.9)$$

где $\delta\rho=\rho-\bar{\rho}$ - неоднородность плотности энергии, ρ - плотность энергии скалярного поля, $\bar{\rho}$ - однородная плотность энергии,которая согласно уравнениям Фридмана равна: $\bar{\rho}=3H^2/(8\pi G)$.

3 Уравнение Шредингера-Пуассона на MD стадии

Зная Лагранжиан скалярного поля можно построить тензор энергии импульса и далее найти плотность энергии.

$$T_{\mu\nu}=\frac{2\delta\pounds}{\delta g^{\mu\nu}}-\pounds g_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^*+\partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi^*-m^2\phi\phi^*) \quad (3.1)$$

Стоит отметить, что основной вклад в неоднородности плотности энергии на MD стадии вносит скалярное поле. Пользуясь "00"компонентой найденного ранее тензора энергии импульса получаем:

$$\rho_\phi=T_{00}g^{00}=\frac{1}{1+2\Psi}(\dot{\phi}\dot{\phi}^*-\frac{1+2\Psi}{2}(\frac{\dot{\phi}\dot{\phi}^*}{1+2\Psi}-\frac{\nabla\phi\nabla^*}{a^2(1-2\Phi)}-m^2\phi\phi^*)) \quad (3.2)$$

Далее разложим гравитационные потенциаалы до первого порядка[2]

$$\frac{1}{1+2\Psi}\approx 1-2\Psi \quad ; \quad \frac{1}{1-2\Phi}\approx 1+2\Phi \quad (3.3)$$

и подставим их в (3.2):

$$\rho_\phi=\frac{1-2\Psi}{2}\dot{\phi}\dot{\phi}^*+\frac{1+2\Phi}{2a^2}\nabla\phi\nabla\phi^*+\frac{1}{2}m^2\phi\phi^* \quad (3.4)$$

Однородная плотность энергии равна:

$$\bar{\rho}_\phi=\frac{1}{2}(|\dot{\bar{\phi}}|^2+m^2|\bar{\phi}|^2) \quad (3.5)$$

Пользуясь (3.4) и (3.5) мы легко можем найти неоднородность плотности энергии $\delta\rho=\rho-\bar{\rho}$.

Будем считать, что на MD стадии $\Phi=\Psi$. Это равенство выполнено в том случае,если тензор анизотропных напряжений равен 0, что верно в нашем случае[4].Тогда уравнения (2.7) и (2.9) преобретают вид

$$(1-2\Phi)\ddot{\phi}+\left(3H-6H\Phi-4\dot{\Phi}\right)\dot{\phi}-\frac{1+2\Phi}{a^2}\triangle\phi+m^2\phi=0 \quad (3.6)$$

$$\triangle\Phi - 3Ha^2(\dot{\Phi} + H\Phi) = 4\pi G a^2 \delta\rho \tag{3.7}$$

Будем искать решение в виде

$$\phi = \frac{e^{-imt}}{a^{3/2}}\psi \tag{3.8}$$

где ψ - медленно меняющаяся функция по сравнению с фактором e^{-imt}
Для дальнейших преобразований нам понадобятся следущие формулы:

$$\dot{\phi} = \frac{e^{-imt}}{a^{3/2}}\left(-im\psi + \dot{\psi} - \frac{3}{2}H\psi\right) \tag{3.9}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{e^{-imt}}{a^{3/2}}\left(-im\dot{\psi} + \ddot{\psi} - \frac{3}{2}H\dot{\psi} - \frac{3}{2}\psi\dot{H}\right) + \frac{e^{-imt}}{a^{3/2}}\left(-im - \frac{3}{2}H\right)\left(-im\psi + \dot{\psi} - \frac{3}{2}H\psi\right) \tag{3.10}$$

Тогда, подставляя выражения (3.8)-(3.10) в уравнение движения скалярного поля (3.6) и уравнение для плотности энергии скалярного поля(3.4), они преобразовываются к виду

$$(1-2\Phi)(\ddot{\psi}-2im\dot{\psi})-4\dot{\Phi}(\dot{\psi}-im\psi) = \frac{1+2\Phi}{a^2}\triangle\psi - 2(m^2\Phi - \frac{3}{4}(\dot{H}+\frac{3}{2}H^2)(1-2\Phi)+3H\dot{\Phi})\psi \tag{3.11}$$

$$a^3\rho_\phi = \frac{1-2\Phi}{2}(|\dot{\psi}|^2 - 3HRe(\dot{\psi}\psi^*) - 2mIm(\dot{\psi}\psi^*)) + \frac{1+2\Phi}{2a^2}|\nabla\psi|^2 + \\ + m^2|\psi|^2(1+\frac{9H^2}{8m^2} - \Phi[1+\frac{9H^2}{4m^2})] \tag{3.12}$$

Так же следует получить выражение для однородной плотности энергии с учетом нашего решения

$$\bar{\phi} = \frac{e^{-imt}}{a^{3/2}}\bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = const. \tag{3.13}$$

Подставим (3.13) в выражение для плотности $\bar{\rho}_\phi = \frac{1}{2}(|\dot{\bar{\phi}}|^2 + m^2|\bar{\phi}|^2)$

$$\bar{\rho}_\phi = \frac{1}{2a^3}|\bar{\psi}|^2\left(-(im)^2 + \frac{9}{4}H^2 + m^2\right) = \frac{1}{a^3}|\bar{\psi}|^2\left(\frac{9}{8}H^2 + m^2\right) \tag{3.14}$$

Теперь, зная неоднородность плотности энергии $\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$ можно написать уравнение типа Пуассона (3.7) в безразмерных координатах:

$$\triangle\Phi - 3Ha^2(\dot{\Phi} + H\Phi) = \frac{4\pi G}{a}(\frac{1-2\Phi}{2}[|\dot{\psi}|^2 - 3HRe(\dot{\psi}\psi^*) - 2mIm(\dot{\psi}\psi^*)] + \\ + \frac{1+2\Phi}{2a^2}|\nabla\psi|^2 + m^2(|\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2)(1+\frac{9H^2}{8m^2}) - m^2|\psi|^2\Phi[1+\frac{9H^2}{4m^2}]) \tag{3.15}$$

Чтобы провести анализ полученных уравнений необходимо сдлеать некоторые приближения.
•Для начала рассматриваем скалярное поле холодной темной материи(CDM),т.е как предел быстрых осциляций:

$$H/m \ll 1 \quad , \quad \dot{H} \sim H^2 \tag{Con.1}$$

•Рассматриваем характерные размеры неоднородностей l с масштабом

$$\frac{1}{m} \ll l \ll \frac{1}{H} \quad , \quad l \sim \frac{1}{\sqrt{Hm}} \tag{Con.2}$$

•Введем малый параметр $\epsilon = 1/ml$.

Произведем оценку влечины H/m,функции ψ и ее пространственных м временных производных, а так же велечину малости производных гравитационного потенциала Ф.Получим соотношение между характерным временем изменения τ и характерным масштабом l неоднородностей.

Из (Con.2) можно получить оценку величиныH/m:

$$l \sim \frac{1}{\sqrt{Hm}} \Rightarrow m^2 l^2 \sim \frac{m}{H} \Rightarrow \frac{H}{m} = O(\epsilon^2)$$

Как уже отмечалось ранее, из уравнений Фридмана, однородная плотность энергии равна

$$\bar{\rho}_\phi = \frac{3H^2}{8\pi G} = 3H^2 {M_{pl}}^2 \tag{3.16}$$

Тогда из (3.14) и (3.16) получаем:

$$3H^2 M_{pl} = \frac{m^2}{a^3}(1 + \frac{9H^2}{8m^2})$$

Учитывая (Con.1) оценим велечину ψ:

$$\psi \sim \dot{\psi} \sim \frac{HM_{pl}}{m} = M_{pl} O(\epsilon^2)$$

Отсюда и (Con.1) сразу следует соотношение для $\dot{\psi}$

$$\frac{\dot{\psi}}{m} \sim \frac{\dot{\bar{\psi}}}{m} \sim \frac{\dot{H} M_{pl}}{m^2} = \frac{H^2 M_{pl}}{m^2} = M_{pl} O(\epsilon^4)$$

С другой стороны

$$\frac{\dot{\psi}}{m} \sim \frac{\psi}{m\tau} \sim \frac{M_{pl} O(\epsilon^2)}{m\tau}$$

В соответсвии с двумя различными оценками можно найти соотношение между τ и малым параметром ϵ, а как следствие между τ и l :

$$\frac{1}{m\tau} \sim O(\epsilon^2) \Rightarrow \epsilon = \frac{1}{\sqrt{m\tau}}$$

Продолжим оценивать малости производных функции ψ

$$\frac{\ddot{\psi}}{m^2} \sim \frac{\ddot{\bar{\psi}}}{m^2} \sim \frac{\dot{H} H M_{pl}}{m^3} \sim \frac{H^3 M_{pl}}{m^3} = M_{pl} O(\epsilon^6)$$

$$\frac{\triangle \psi}{m^2} \sim \frac{\triangle \bar{\psi}}{m^2} \sim \frac{\bar{\psi}}{m^2 l^2} = M_{pl} O(\epsilon^2) \epsilon^2 = M_{pl} O(\epsilon^4)$$

Теперь оценим велечину малости производных потенциала Φ Естественно положить $\Phi = O(\epsilon^2)$(нерелятивистский предел для гравитационного потенциалда), тогда

$$\frac{\triangle \Phi}{m^2} \sim \frac{\Phi}{m^2 l^2} \sim O(\epsilon^4)$$

$$\frac{\dot{\Phi}}{m} \sim \frac{\Phi}{m\tau} \sim O(\epsilon^4)$$

На этом закончим с оценками велечин и перейдем непосредственно к преобразованию уравнений(3.11) и (3.15) с учетом полученных приближений.Предварительно поделив оба уравнения на m^2 и оставляя только величины по порядку малости не превосходящие $O(\epsilon^4)$ получим:

$$-\frac{2i\dot{\psi}}{m} = \frac{\triangle \psi}{a^2 m^2} - 2\Phi\psi \tag{3.17}$$

$$\frac{\triangle \Phi}{m^2} = \frac{4\pi G}{a}(|\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2) \tag{3.18}$$

Производя замену $\Phi = \Phi_0/a$ получаем систему уравнений Шредингера-Пуассона:

$$i\dot{\psi} = -\frac{\triangle \psi}{2a^2 m} + \frac{m\Phi_0 \psi}{a} \tag{3.19}$$

$$\triangle \Phi_0 = 4\pi G m^2 (|\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2) \tag{3.20}$$

Такая система имеет решение:

$$\Phi_0(t, \vec{r}) = -\frac{Gm^2}{a} \int d^3y \frac{|\psi(t, \vec{y})|^2 - \bar{\psi}(t)|^2}{|\vec{r} - \vec{y}|} \tag{3.21}$$

Из (3.19) и (3.21) можно получить гамильтониан системы

$$H(t, \vec{r}) = -\frac{\triangle}{2ma^2} - \frac{Gm^3}{a^2} \int d^3y \frac{|\psi(t, \vec{y})|^2 - \bar{\psi}(t)|^2}{|\vec{r} - \vec{y}|} \tag{3.22}$$

А следовательно гамильтониан отвечающий за гравитационное взаимодействие:

$$H_g(t, \vec{r}) = -\frac{Gm^3}{a^2} \int d^3y \frac{|\psi(t, \vec{y})|^2 - \bar{\psi}(t)|^2}{|\vec{r} - \vec{y}|} \tag{3.23}$$

Исходя из уравнений (3.12) и (3.14), а так же из полученных приближений, можно получить

$$\delta\rho = \rho - \bar{\rho} = |\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2$$

Из гамильтониана (3.23) видно что темп релаксации комплексного скалярного поля пропорционален плотности неоднородности неоднородности

$$\Gamma \propto \delta\rho, \tag{3.24}$$

что опровергает результат полученный в работе [3].

4 Уравнение Шредингера-Пуассона на RD стадии

На RD стадииосновной в клад в неоднородность метрики вносит релятивистское вещество, однако интересно изучить поведение неоднородностей поля в такой ситуации

В этом разделе мы будем пользоваться конфорными координатами. В таких координатах метрика пространственно-плоской однородной и изотропной Вселенной записывается в виде

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - dx^i dx^i] = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{4.1}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ - метрика Минковского.

Конфорное время η связано с космологическим временем t следующим образом

$$a(\eta)d\eta = dt$$

В дальнейшем будем обозначать производную по конформному времени штрихом, а по космологическому, как и до этого, точкой. Таким образом для параметра Хаббла имеем

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2} \tag{4.2}$$

Учитывая, что на RD стадии $a \propto \eta$ получаем

$$H = \frac{1}{a\eta} \tag{4.3}$$

Так же мы будем пользоваться конформным импульсом k, который связан с физическим импульсом q соотношением

$$q = \frac{k}{a} \tag{4.4}$$

Уравнения Эйнштейна, учитывающие неоднородность ультрарелятивистского вещества и скалярного поля, в возмущенной метрике имеют вид

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2(\delta\rho_\gamma + \delta\rho_\phi) \tag{4.5}$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_\gamma \tag{4.6}$$

где $\delta\rho_\gamma$ - неоднородность плотности энергии радиации, δp_γ - неоднородность давления радиации, $\delta\rho_\phi$ - неоднородность плотности энергии скалярного поля.

Дополним систему уравнений связью между неоднородностью плотности энергии и неоднородностью давления для ультрарелятивистской компоненты среды

$$\delta p_\gamma = u_\gamma^2 \delta\rho_\gamma$$

где u_γ^2 - скорость распространения звука в среде.

Прибавляя к уравнению (4.6) уравнение (4.5), умноженное на u_γ^2 и учитывая выше представленную связь, придем к уравнению

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+u_\gamma^2)\Phi' + \left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1-3u_\gamma^2)\right]\Phi + u_\gamma^2 k^2\Phi = -4\pi G a^2 u_\gamma^2 \delta\rho_\phi \tag{4.7}$$

Далее рассмотрим уравнение Фридмана и 'ij' компоненты уравнения Эйнштейна для однородного случая в пространственно плоской модели

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8}{3}\pi G\rho \tag{4.8}$$

$$2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi G p \tag{4.9}$$

где ρ и p - плотность энергии и давление однородной материи

Прибавляя к уравнению (4.9) уравнение (4.8), умноженное на u_s^2, получим

$$2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4}(1 - 3u_s^2) = 8\pi G(\rho u_s^2 - p) \tag{4.10}$$

Считая $u_s^2 = \omega$, где ω - параметр связывающий плотность энергии с давлением: $p_s = \omega\rho_s$, из (4.10) получим следующее соотношение

$$2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1 - 3u_\gamma^2) = 0 \tag{4.11}$$

Стоит отметить что для радиации параметр $\omega = \frac{1}{3}$

Учитывая все выше перечисленное уравнение (4.7) на RD стадии преобразовывается к следующему виду

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta}\Phi' + \frac{1}{3}k^2\Phi = -\frac{4}{3}\pi G a^2 \delta\rho_\phi \tag{4.12}$$

Решение данного уравнения под звуковым горизонтом,т.е $u_\gamma k\eta \ggg 1$, без неоднородности плотности энергии скалярного поля известно[4]

$$\Psi_0 = -3\Phi_{(i)}\frac{1}{(u_\gamma k\eta)^2}\cos(u_\gamma k\eta) = -9\Phi_{(i)}\frac{H^2}{q^2}cos(\frac{q}{\sqrt{3}H}) \tag{4.13}$$

где $\Phi_{(i)}$ - амплитуда моды.

Под звуковым горизонтом главную роль играет третье слагаемое в левой части (4.12), и мы получаем

$$\Phi_1 = -\frac{4\pi G a^2}{k^2}\delta\rho_\phi = -\frac{4\pi G a^2}{k^2}\delta_{CDM}\rho_\phi = \frac{36\Phi_{(i)}\pi G a^2}{k^2}ln(\frac{k\eta}{\sqrt{3}})\rho_\phi \tag{4.14}$$

где $\delta_{CDM} = \frac{\delta\rho_\phi}{\rho_\phi} = -9\Phi_{(i)}ln(\frac{k\eta}{\sqrt{3}})$, $\Phi_{(i)}$ - амплитуда моды.

Для дальнейшего преобразования полученного решения нам потребуются некоторые соотношения.

•Рассмотрим выражениедля плотности энтропии закон сохранения полной энтропии Вселенной в сопутствующем объеме

$$sa^3 = const = s_{eq}a_{eq}^3 \quad ; \quad s = g_*(T)\frac{4\pi^2}{90}T^3 \quad ; \quad s_{eq} = g_*(T_{eq})\frac{4\pi^2}{90}T_{eq}^3$$

где $g_*(T)$ - число эффективных степенй свободы.Здесь и везде далее параметры с пометкой (eq) отностяся к моменту перехода от RD к MD стадии.

Тогда очевидно соотношение

$$\left(\frac{a_{eq}}{a}\right) = \left(\frac{g_*(T)T^3}{g_*(T_{eq})T_{eq}^3}\right)$$

•Рассмотрим параметр Хаббла на RD и equation стадии

$$H = \frac{a'}{a^2} \quad ; \quad H = \frac{a'}{a^2}$$

Как уже отмечалось ранее на RD стадии $a = const \cdot \eta$, а сдедовательно $a' = const$, и мы приходим к равенству

$$\frac{H}{H_{eq}} = \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^2$$

•В момент $\eta = \eta_{eq}$ выполняются следующие равенства[4]

$$\frac{8\pi}{3} G\rho_{\phi}^{eq} = \frac{8\pi}{3} G\rho_{rad}^{eq} = \frac{1}{2} H_{eq}^2$$

$$\rho_{\phi} \propto \frac{1}{a^3} \to \rho_{\phi} = \rho_{\phi}^{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3$$

С учетом вышеперечисленных соотношений (4.14) принимает следующий вид

$$\Phi_1 == \frac{36\Phi_{(i)}\pi G a^2}{k^2} ln(\frac{k\eta}{\sqrt{3}})\rho_{\phi}^{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3 = \frac{36\Phi_{(i)}\pi G}{q^2} ln(\frac{q}{\sqrt{3}H})\rho_{\phi}^{eq} \left(\frac{g_*(T)^{1/3}T}{g_*(T_{eq})^{1/3}T_{eq}}\right)^3 = \\ = \frac{27\Phi_{(i)}H_{eq}^2}{4q^2} ln(\frac{q}{\sqrt{3}H}) \left(\frac{g_*(T)^{1/3}T}{g_*(T_{eq})^{1/3}T_{eq}}\right)^3 \quad (4.15)$$

Общее решение уравнения (4.12) можно записать в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 = -9\Phi_{(i)} cos(\frac{q}{\sqrt{3}H}) \left(\frac{g_*(T)^{1/3}T}{g_*(T_{eq})^{1/3}T_{eq}}\right)^4 + \frac{27\Phi_{(i)}H_{eq}^2}{4q^2} ln(\frac{q}{\sqrt{3}H}) \left(\frac{g_*(T)^{1/3}T}{g_*(T_{eq})^{1/3}T_{eq}}\right)^3 \quad (4.16)$$

Первое слагаемое представленного выражения отвечает за неоднородности радиации, а соответсвенно второе за неоднородности скалярного поля.

Список литературы

[1] Горбунов Д.С.,Рубаков В.А. - "Введение в теорию ранней Вселенной.Теория горячего Большого взрыва."

[2] L. Arturo Ureña López - "Non-relativistic approach for cosmological Scalar Field Dark Matter"

[3] O. Erken, P. Sikivie, H. Tam, Q. Yang - "Cosmic axion thermalization"

[4] Горбунов Д.С.,Рубаков В.А. - "Введение в теорию ранней Вселенной. Космологические возмущения.Инфляционная теория."

[5] Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. - "Теория поля"

[6] Рубаков В.А. - "Классические калибровочные поля. Бозонные теории."