

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА"
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
**«КОНДЕНСАТ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА С НЕНУЛЕВЫМ
УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ ВО ВНЕШНЕМ
ГРАВИТАЦИОННОМ ПОТЕНЦИАЛЕ.»**

Выполнил студент
243М группы
Дмитриев Антон Сергеевич

подпись студента

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, академик РАН, профессор, зав. кафедрой
Рубаков Валерий Анатольевич

подпись научного руководителя

Научный консультант:
кандидат физ.-мат. наук
Панин Александр Григорьевич

подпись научного консультанта

Допущен к защите
Зав. кафедрой _____
подпись зав. кафедрой

Москва
2021

Оглавление

Введение	3
1. Конденсата Бозе-Эйнштейна при $l \neq 0$, в случае отсутствия самодействия и внешнего гравитационного потенциала.	4
2. Запрещающая теорема	9
3. Линейный анализ нестабильностей при произвольном l	12
3.1. Случай $\lambda = 0$, $U_{ext} = 0$	12
3.2. Случай $\lambda \neq 0$, $U_{ext} = 0$	16
3.3. Случай $\lambda = 0$, $U_{ext} \neq 0$	18
Заключение.	20
Приложение	21
Приложение А: Аналитическое решение при $l \gg 1$	21
Приложение В: Аксиально-симметричный код	25
Литература	30

Введение

В работе изучается конденсат Бозе-Эйнштейна, состоящий из нерелятивистских частиц с ненулевым угловым моментом l . Поведение конденсата вне электромагнитной ловушки активно исследуются экспериментально [1]. Подобные системы также возникают в моделях сверхлегкой темной материи, в которых конденсат Бозе-Эйнштейна может сформироваться в процессе образования крупномасштабной структуры Вселенной в центре каждой галактики [2], а также в компактных структурах в результате релаксационных процессов, вызванных гравитационным взаимодействием между частицами [3]. Конденсат формируется в виде гравитационно-связанных «капель» – Бозе-звезд. Во вращающихся галактиках и других компактных структурах ожидается появление Бозе-звезд с ненулевым угловым моментом. При этом вопрос об их существовании и стабильности остается открытым.

В работе мы аналитически доказываем, что такие объекты неустойчивы при произвольном $l \neq 0$. Мы вычисляем профили и доминирующие моды неустойчивости вращающихся звезд: численно при $1 \leq l \leq 15$, а также приводим аналитические формулы при $l \gg 1$. В попытках поиска возможного способа стабилизировать систему, мы дополнительно её модифицируем двумя способами. Во-первых, мы добавим в систему потенциал самодействия вида $\frac{\lambda|\psi|^2}{8m^2}$. В работе рассматриваются все три случая отталкивающих, притягивающих и пренебрежимо малых взаимодействий: $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ и $\lambda = 0$. Последние два особенно интересны, так как они актуальны для популярных моделей темной материи с КХД аксионами [4] и ультралегкими акцион-подобными частицами [5, 6]. Во-вторых, будет рассмотрено поведение Бозе-звезды во внешнем гравитационном потенциале вида $U_{ext} = -\frac{GM_{ext}}{r}$.

Однако, в случае наличия внешнего гравитационного потенциала или его отсутствия мы аналитически доказываем неустойчивость таких объектов, если параметр самодействия λ отрицательный или пренебрежимо мал. Также в работе численно показывается, что в моделях с достаточно сильным отталкивающим самодействием и отсутствием внешнего гравитационного потенциала Бозе-звезда с $l = 1$ устойчива.

Всюду в работе используется система $\hbar = c = k = 1$.

1. Вращающиеся Бозе-звезды.

Система самогравитирующих нерелятивистских бозонов с массой m описывается при больших числах заполнения волновой функцией $\psi(t, \mathbf{x})$ и гравитационным потенциалом $U(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющим уравнениям Гросса-Питаевского и Пуассона,

$$i\partial_t\psi = -\frac{\Delta\psi}{2m} + \left(m(U + U_{ext}) + \frac{\lambda|\psi|^2}{8m^2}\right)\psi, \quad (1)$$

$$\Delta U = 4\pi mG|\psi|^2, \quad (2)$$

где $U_{ext} = -GM_{ext}/r$ описывает внешнее гравитационное поле, а потенциал $\lambda|\psi|^2/8m^2$ описывает самодействие бозонов. Ниже мы рассмотрим все три случая отталкивающих, притягивающих и пренебрежимо малых взаимодействий: $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ и $\lambda = 0$.

Важно отметить, что нерелятивистская эволюция (1), (2) сохраняет ряд величин: общую массу M (число бозонов N),

$$M \equiv mN = m \int d^3\mathbf{x} |\psi|^2, \quad (3)$$

полную энергию

$$E = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{|\nabla\psi|^2}{2m} + m \left(\frac{U}{2} + U_{ext} \right) |\psi|^2 + \frac{\lambda|\psi|^4}{16m^2} \right], \quad (4)$$

и компоненты углового момента,

$$J_z = -i \int d^3\mathbf{x} \psi^* \partial_\varphi \psi, \quad (5)$$

где $\varphi = \arctan(y/x)$ - угловая цилиндрическая координата.

Вращающуюся Бозе-звезду с угловым моментом l можно определить как стационарное и осесимметричное решение системы (1), (2) в цилиндрической системе координат (ρ, z, φ)

$$\psi_s(\mathbf{x}) = \psi_s(\rho, z) e^{-i\omega_s t + il\varphi}, \quad (6)$$

где w_s - энергия связи бозонов. Это означает, что его волновая функция $\psi_s(\rho, z)$ подчиняется стационарному уравнению Шредингера

$$\omega_s \psi_s = -\frac{\Delta\psi_s}{2m} + \left(m(U_s + U_{ext}) + \frac{\lambda|\psi_s|^2}{8m^2}\right)\psi_s, \quad (7)$$

с учетом условий спадания волновой функции на пространственных бесконечностях и регулярности функции на оси симметрии $\psi_s(0, z) = 0$. В то время как $U = U_s(\rho, z)$ удовлетворяет уравнению (2). Здесь и далее мы пометим все величины Бозе-звезды нижним индексом s и будем иметь в виду, что аксиально-симметричный лапласиан $\Delta \psi_s \equiv \partial_z^2 \psi_s + \rho^{-1} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \psi_s) - l^2 \psi_s / \rho^2$ содержит центробежный барьер в последнем члене. Уравнение (7) описывает нерелятивистские частицы, занимающие нижний уровень потенциальной ямы $mU_s + mU_{ext} + \lambda|\psi_s|^2/(8m^2)$. Частицы обладают энергией ω_s и угловым моментом l .

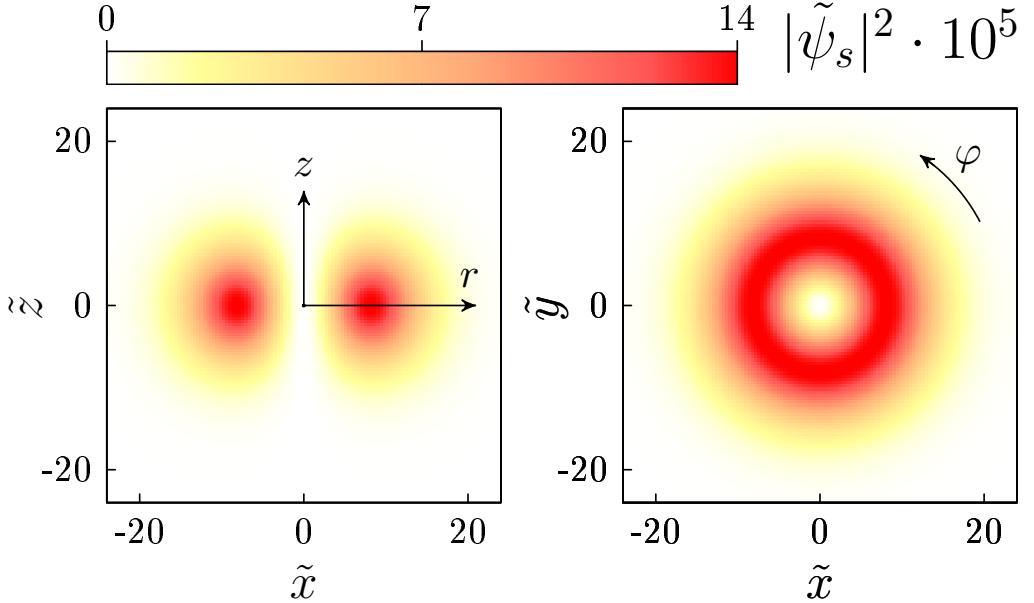


Рис. 1: Профиль Бозе-звезды, вращающейся с $l = 1$ вокруг оси z , в случае $\lambda = 0$, $M_{ext} = 0$. Левый и правый график показывают сечения профиля плотности $|\psi_s(\mathbf{x})|^2$ при $y = 0$ и $z = 0$ соответственно. Тильды над буквами обозначают безразмерные единицы измерения (введенные в основном тексте)

Заметим, что m и G исчезают из всех уравнений после замены координат и полей с произвольным параметром v_0 :

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}/mv_0, \quad t = \tilde{t}/mv_0^2, \quad \omega_s = mv_0^2\tilde{\omega}_s, \quad \psi = v_0^2(m/G)^{1/2}\tilde{\psi}, \quad U = v_0^2\tilde{U} \quad (8)$$

Тогда выражение (3) можно переписать в следующем виде:

$$M = \frac{v_0}{mG} \int d^3 \tilde{x} |\tilde{\psi}|^2 = \frac{v_0}{mG} \tilde{M}. \quad (9)$$

Для удобства выберем $v_0 = mGM$, чтобы сделать общую масштабированную массу равной единице: $\tilde{M} = 1$. В результате уравнения содержат только две константы: 1) параметр самодействия $\tilde{\lambda} = \lambda GM^2$ и $\tilde{M}_{ext} = M_{ext}/M$. Аналогично, используя замену координат, выражение (4) принимает вид:

$$E_s = \tilde{E}_s m^2 G^2 M_s^3. \quad (10)$$

Введенная систем единиц $M = G = 1$ очень удобна для численных расчетов, поэтому все данные на графиках и таблицах мы будем приводить в этих единицах.

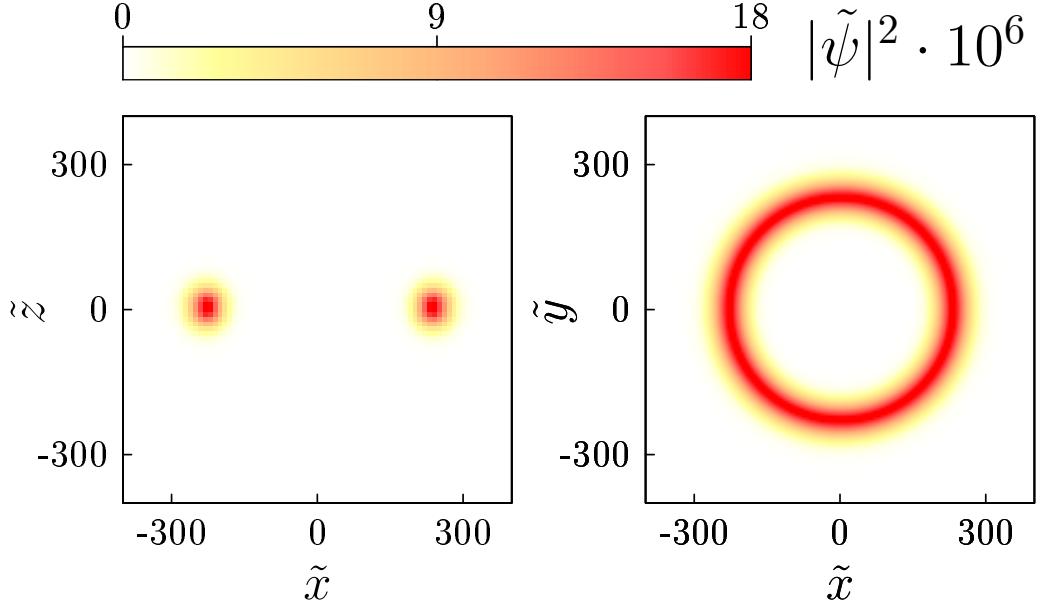


Рис. 2: Вращающаяся Бозе-звезда с $l = 10$, $\lambda = 0$ и $U_{ext} = 0$. Используются безразмерные единицы измерения.

Мы вычисляем стационарные профили $\psi_s(\rho, z)$, $U_s(\rho, z)$ Бозе-звезд при больших l , решая численно осесимметричную систему (1), (2) с учетом (8). С этой целью мы используем метод Евклидовой эволюции для поля ψ и алгоритм SOR для гравитационного потенциала U , подробнее см. Приложение B. Численная процедура сходится к конфигурациям с минимальной энергией – вращающимся Бозе-звездам с заданным l . На практике мы используем этот алгоритм при достаточно больших $l = 1 \div 15$. Все полученные решения имеют характерные тороидальные формы, см. Рис. 1. и Рис. 2.

Значения энергии Бозе-звезд с различными l перечислены в таблице 1 и изображены на Рис. 3 (точки). При больших l они приближаются к аналитическому выражению (линии), полученному в пределе $l \gg 1$, см. Приложение A.

Важно заметить что Бозе-звезды, вращающиеся или нет, экстремизируют полную энергию E при данной массе $M = M_s$. Другими словами, они являются экстремумами функционала $F \equiv E - \omega_s N$, где множитель Лагранджа ω_s фиксирует $N = M/m$. Чтобы это показать явно, заменим энергию E в F на следующий функционал:

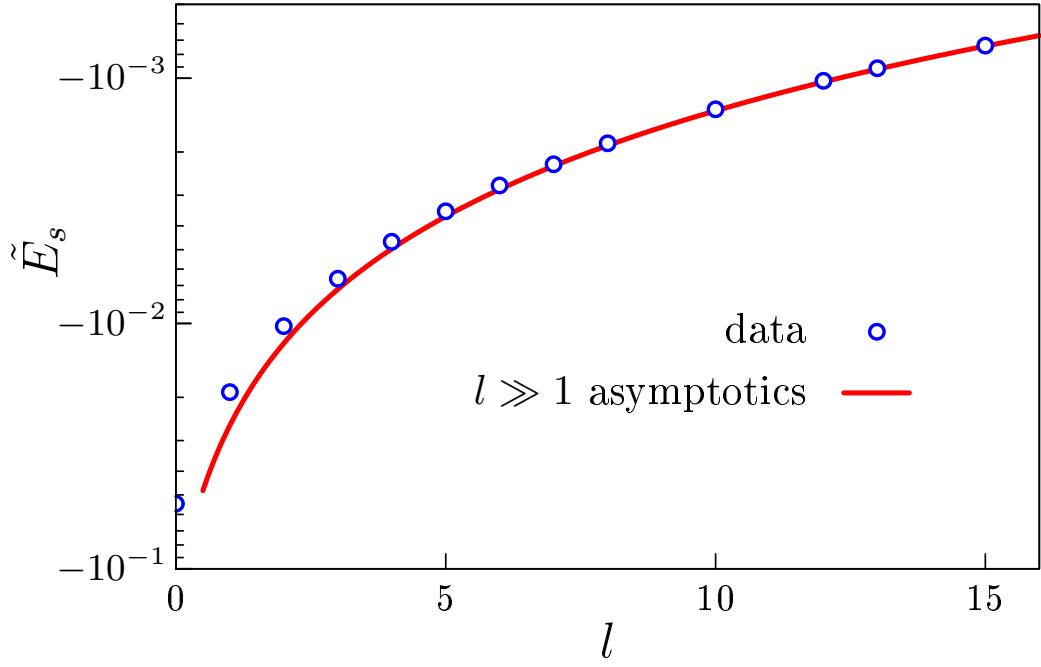


Рис. 3: Энергия E_s вращающихся бозе-звезд в отсутствии самодействия $\lambda = 0$ и внешнего гравитационного потенциала $U_{ext} = 0$. Точки представляют собой численные данные, а сплошная линия является аналитическим результатом при большом l , см. Приложение А.

l	$\tilde{E}_s \cdot 10^3$	l	$\tilde{E}_s \cdot 10^3$	l	$\tilde{E}_s \cdot 10^3$
0	-54.2	1	-19.0	2	-10.3
3	-6.57	4	-4.64	5	-3.49
6	-2.74	7	-2.24	10	-1.34
15	-0.736	$\gg 1$	$\tilde{E}_s \approx -\alpha_l(\alpha_l + 1)/(8\pi^2 l^2)$		

Таблица 1: Энергия вращающихся Бозе-звезд при различных l в случае $\lambda = 0$ и $M_{ext} = 0$; физические единицы могут быть восстановлены с помощью уравнения (10). Данные с $l \leq 15$ получены численно, в то время как последний элемент описывает асимптотику при больших l , см. Приложение А (уравнение (A.7)). Параметры α_l определяются уравнением (A.8).

$$E = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{|\nabla\psi|^2}{2m} + \left(m(U + U_{ext}) + \lambda u \right) |\psi|^2 + \frac{(\nabla U)^2}{8\pi G} - 4\lambda m^2 u^2 \right] \quad (11)$$

где гравитационный потенциал $U(\mathbf{x})$ и потенциал самодействия $u(\mathbf{x})$ будем считать новыми независимыми полями. Функционал F достигает экстремума при $U = U_s$ и $u = u_s$, удовлетворяющих

$$\Delta U = 4\pi Gm|\psi|^2 \text{ и } u = |\psi|^2/8m^2. \quad (12)$$

Подставляя это решение обратно в выражение (11) мы приходим к изначальному виду энергии (4). Дальнейшая вариация F по отношению к $\psi^*(\mathbf{x})$ дает уравнение Гросса-Питаевского (7), которое вместе с уравнениями (12) образует ту же стационарную систему для профиля Бозе-звезды, что и раньше. Таким образом, вращающиеся Бозе-звезды действительно являются экстремумами F , с фиксированными l и M_s .

Вопрос в том, являются ли эти объекты локальными минимумами энергии при фиксированной массе M_s и полным угловым моментом $J_{z,s}$. В следующем разделе мы покажем, что при $l \geq 1$, $\lambda \leq 0$ и $M_{ext} > 0$ они не являются таковыми. Скорее, это энергетические седловые точки, которые могут быть разрушены сколь угодно малыми возмущениями, растущими экспоненциально со временем.

Стоит отметить, что приведенный выше аргумент определяет ω_s , как энергию связи частиц внутри Бозе-звезды, см. уравнение (2). Действительно, бесконечно малое количество дополнительных частиц изменяет энергию E_s и число N_s бозонов, но не значение F , которое является экстремальным. Таким образом,

$$dE_s = \omega_s dN_s, \quad (13)$$

то есть каждая новая частица добавляет Бозе-звезде энергию ω_s . В случае $\lambda = 0$ и $U_{ext} = 0$ последнее выражение может быть объединено с уравнением (10), откуда получим

$$\omega_s = 3\tilde{E}_s m^3 G^2 M_s^2 = 3mE_s/M_s. \quad (14)$$

Данное равенство получено для проверки численных результатов.

2. Запрещающая теорема

Докажем, что вращающиеся Бозе-звезды (6) неустойчивы при $l \neq 0$, если самодействие пренебрежимо мало или $\lambda < 0$, а также при наличии внешнего потенциала или его отсутствии. Эти случаи особенные, так как при $\lambda \leq 0$ новый энергетический функционал (11) ограничен снизу по отношению к U и u , а потому достигает *минимума* при их физических значениях (12). Таким образом, мы можем рассмотреть общую независимую вариацию $\psi(\mathbf{x})$, зафиксировав при этом $U(\mathbf{x})$ и $u(\mathbf{x})$. Бозе-звезда окажется неустойчивой, если найдется такое изменение $\psi(\mathbf{x})$, которое уменьшит энергию (11), так как дальнейшая минимизация функционала по U и u , определяемая уравнениями (12), уменьшит энергию еще больше.

Введем вспомогательный инструмент: набор волновых функций $\Psi_L(\mathbf{x}) \propto e^{iL\varphi}$ с угловыми моментами L , удовлетворяющих уравнению Шредингера в потенциале Бозе-звезды (12) и внешнем гравитационном потенциале (если он есть),

$$\omega_L \Psi_L = -\frac{\Delta \Psi_L}{2m} + \left(m(U_s + U_{ext}) + \lambda u_s \right) \Psi_L . \quad (15)$$

Для каждого L выбираем собственную функцию с минимальным ω_L и нормируем ее на единицу: $\int d^3\mathbf{x} |\Psi_L|^2 = 1$.

Отметим, что Ψ_L не являются колебательными модами Бозе-звезды: последние включают связанные возмущения ψ , U , и u . Но уравнение (15) дает простую квантово-механическую аналогию, которая будет полезна в дальнейшем. Во-первых, при $L = l$ оно совпадает с уравнением (7) для профиля конденсата. В этом случае $w_l = w_s$. Во-вторых, и как следствие первого, собственные значения ω_L с $L < l$ меньше, чем ω_s , потому что они имеют более слабые центробежные барьеры $L^2/2mr^2$. В частности, уравнение (15) с $L = l$ и $L = 0$ дает,

$$\omega_s - \omega_0 \geq \int d^3\mathbf{x} \frac{l^2 |\Psi_l|^2}{2mr^2} > 0 , \quad (16)$$

где мы видим, что ω_0 является минимальным собственным значением гамильтонiana уравнения (15). В-третьих, в пределе $L \rightarrow \infty$ собственные функции Ψ_L становятся большими по размеру и поэтому взаимодействуют при больших \mathbf{x} с асимптотикой потенциала $(U_s + U_{ext}) \rightarrow -G(M + M_{ext})/|\mathbf{x}|$. Соответствующие собственные значения напоминают значения атома водорода: $\omega_L \approx -m^3 G^2 (M + M_{ext})^2 (L + 1)^{-2}/2 \sim O(L^{-2})$ при $L \gg 1$.

Построим бесконечно малое изменение, которое уменьшает энергию (11) исходной конфигурации Бозе-звезды $\{\psi'_s, U'_s, u'_s\}$ с числом частиц N'_s и угловым моментом $l \geq 1$. Сначала мы извлечем dN_s частиц из конденсата, получая таким образом звезду $\{\psi_s, U_s, u_s\}$ с $N_s = N'_s - dN_s$ частиц. Затем

мы добавляем обратно dN_0 частиц в невращающемся состоянии Ψ_0 и dN_L частиц в состоянии Ψ_L с $L \gg 1$, которые удовлетворяют уравнению (15) с потенциалами U_s и u_s . Потребуем, чтобы результирующая конфигурация имела те же самые полную массу и полный угловой момент, тогда

$$dN_s = dN_0 + dN_L \quad \text{и} \quad l dN_s = L dN_L . \quad (17)$$

Физически такая деформация соответствует одновременному переходу dN_s частиц конденсата из состояния с угловым моментом l в состояния с $L = 0$ и $L \gg 1$.

В результате волновая функция будет иметь вид:

$$\psi'_s \rightarrow \psi = \psi_s(\mathbf{x}) + dN_0^{1/2} \Psi_0(\mathbf{x}) + dN_L^{1/2} \Psi_L(\mathbf{x}) . \quad (18)$$

Подставляя уравнение (18) в выражение (11), получаем энергию $E_f \equiv E[\psi, U_s, u_s]$ этого конечного состояния:

$$E_f = E_s + \omega_0 dN_0 + \omega_L dN_L , \quad (19)$$

где E_s - энергия Бозе-звезды с частицами N_s , и мы использовали уравнение (15). Перекрестные члены между ψ_s , Ψ_0 , и Ψ_L исчезнут из-за различных зависимостей от φ . Напомним, что $\psi_l \propto e^{iL\varphi}$ и $\Psi_L \propto e^{il\varphi}$, в то время как Ψ_0 , U_s и u_s не зависят от φ .

С другой стороны, изначальная Бозе-звезда содержала $N_s + dN_s$ частиц и обладала энергией

$$E'_s = E_s + \omega_s dN_s + O(dN_s^2) , \quad (20)$$

см. уравнение (13). Таким образом, изменение энергии в приведенном выше переходе равно

$$E_f - E'_s = (\omega_0 - \omega_s) dN_s + O(L^{-1}) dN_s < 0 , \quad (21)$$

где dN_0 и dN_L были выражены из уравнения (17), а также учтено, что $\omega_L = O(L^{-2})$ стремится к нулю при $L \gg 0$. Последнее неравенство вытекает из уравнения (16). Мы приходим к выводу, что конфигурация (18) действительно обладает меньшей энергией, чем врачающаяся Бозе-звезда.

Приведенный выше аргумент доказывает, что все врачающиеся Бозе-звезды неустойчивы при $\lambda \leq 0$ и произвольном $l \geq 1$ во внешнем гравитационном потенциале. Он также качественно описывает механизм нестабильности. А именно, энергия врачающейся Бозе-звезды уменьшается, если некоторые частицы совершают переходы в невращающиеся состояния и передают свои угловые импульсы другим частицам, двигающимся к периферии системы.

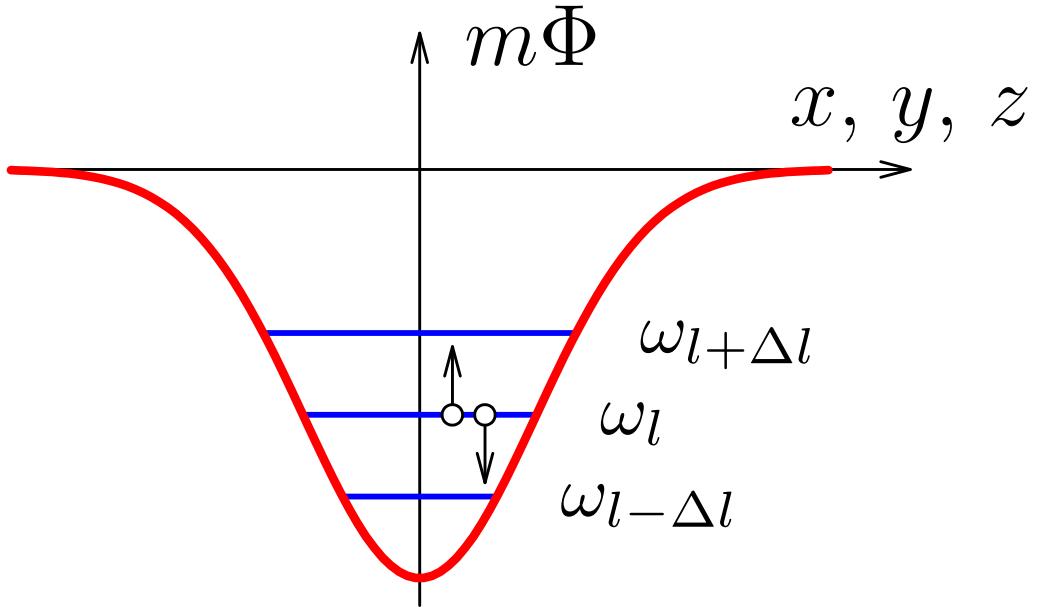


Рис. 4: (Не масштабированно) Неустойчивость вращающейся звезды Бозе.

Предположительно конечным состоянием этого процесса является сатурно-подобная конфигурация: одна или несколько Бозе-звезд с нулевым угловым моментом, окруженных вращающимся облаком диффузных частиц.

Однако отметим, что до сих пор мы рассматривали явный, но очень неоптимальный способ уменьшения энергии Бозе-звезды. В частности, мы не учитывали изменения потенциалов U_s , u_s и зафиксировали угловые моменты конечных состояний частиц. Ниже мы увидим, что моды, отвечающие парным переходам частиц в состояния с угловыми моментами $l \pm \Delta l$ (см. Рис. 4), растут наиболее быстро.

3. Линейный анализ нестабильностей при произвольном l

3.1. Случай $\lambda = 0, U_{ext} = 0$.

Ранее в 1 части работы мы получили стационарные профили Бозе-звезд $\psi_s(\rho, z), U_s(\rho, z)$ для больших l , как решение системы уравнений (1), (2).

Рассмотрим поведение возмущений над Бозе-звездой. Общее возмущение ψ имеет произвольную зависимость от φ и поэтому включает моды с произвольными угловыми моментами l' . Однако можно заметить, что на линейном уровне моды с $l' = l + \Delta l$ и $l' = l - \Delta l$ перемешиваются друг с другом, но не с другими модами. Таким образом, каждая такая пара может рассматриваться независимо. Тогда рассмотрим возмущение следующего вида:

$$\begin{aligned}\psi &= [\psi_s(r, z) + \delta\psi_1 e^{i\Delta l\varphi} + \delta\psi_2 e^{-i\Delta l\varphi}] e^{-i\omega_s t + il\varphi}, \\ U &= U_s(r, z) + \delta U e^{i\Delta l\varphi} + \delta U^* e^{-i\Delta l\varphi},\end{aligned}\quad (22)$$

где $\delta\psi_1, \delta\psi_2$ и δU зависят только от ρ, z и t .

Подставляя равенства (22) в систему Шредингера-Пуассона (1), (2) мы приходим к уравнениям,

$$\begin{aligned}(\omega_s + i\partial_t)\delta\psi_1 &= -\frac{\Delta_{r,z}\delta\psi_1}{2m} + m\psi_s\delta U + \left[\frac{(l + \Delta l)^2}{2mr^2} + mU_s\right]\delta\psi_1, \\ (\omega_s + i\partial_t)\delta\psi_2 &= -\frac{\Delta_{r,z}\delta\psi_2}{2m} + m\psi_s\delta U^* + \left[\frac{(l - \Delta l)^2}{2mr^2} + mU_s\right]\delta\psi_2, \\ \Delta_{r,z}\delta U - \frac{\Delta l^2}{r^2}\delta U &= 4\pi mG(\psi_s^*\delta\psi_1 + \psi_s\delta\psi_2^*),\end{aligned}\quad (23)$$

где нелинейные члены по $\delta\psi_1, \delta\psi_2, \delta U$ опущены, а $\Delta_{r,z} \equiv \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + \partial_z^2$ - радиальная часть лапласиана. Последняя строка в уравнении (23) включает в себя как $\delta\psi_1$, так и $\delta\psi_2$, так что они действительно не являются независимыми.

Для поиска экспоненциально растущих мод

$$\delta\psi_1, \delta\psi_2^*, \delta U \propto e^{\mu t} \quad \text{с} \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \quad (24)$$

мы эволюционируем осесимметричные уравнения (23) в реальном времени t , используя численный метод приложения B. Нормы $M_{l\pm\Delta l}(t) \equiv \int d^3x |\delta\psi|^2$

возмущений на фоне звезды $l = 2$ показаны на Рис. 5. Они действительно растут экспоненциально¹, как предсказано нашей запрещающей теоремой.

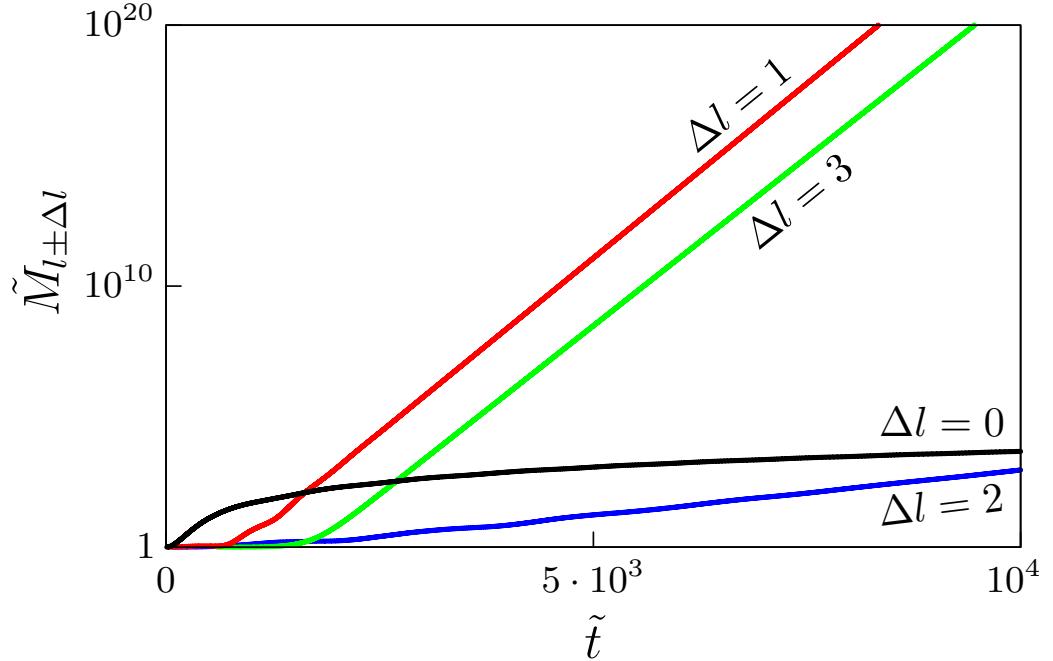


Рис. 5: Нормы $M_{l\pm\Delta l}$ (логарифмическая шкала) линейного возмущения, развивающиеся со временем на фоне Бозе-звезды с $l = 2$ при $\lambda = 0$.

В численных расчетах удобнее держать возмущения конечными. Для этого мы умножаем $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$ и δU на некоторый комплексный коэффициент $\Delta\mathcal{N}$ после каждого шага по времени. Полученное перенормированное решение приближается к профилю наиболее быстро растущей моды неустойчивости при больших t , в то время как соответствующий показатель роста равен $\mu = \Delta t^{-1} \ln \Delta\mathcal{N}$.

В соответствии с масштабированием показатель роста μ можно пересчитать в физические единицы

$$\mu = \tilde{\mu} m^3 G^2 M_s^2 , \quad (25)$$

На рис. 6 мы демонстрируем доминирующие моды неустойчивости Бозе-звезд с $l = 1, 2$ и 10 . Как и фоновые звезды, они имеют тороидальную форму. Экспоненты $\tilde{\mu}$ и изменения углового момента Δl этих возмущений перечислены в таблице 2 и показаны на рис. 7, 8. Эти данные приближаются к аналитическим выражениям приложения А (сплошная линия) при $l \gg 1$.

¹Экспоненты графиков с $\Delta l = 1$ и 3 заметно близки, но возмущение с $\Delta l = 1$ растет быстрее.

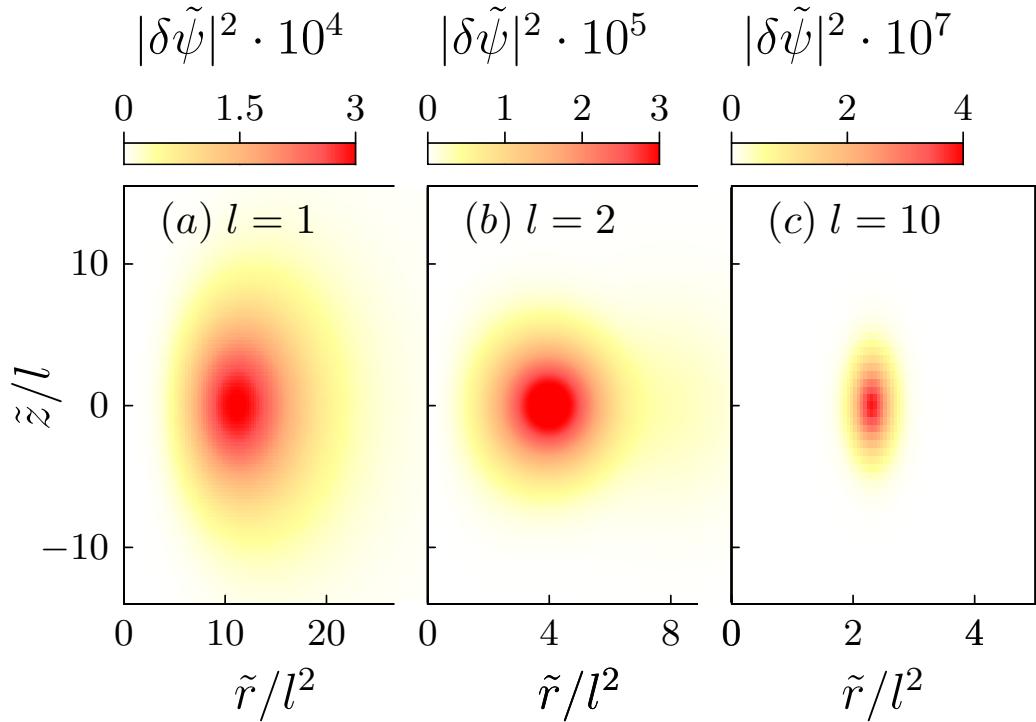


Рис. 6: Доминирующие моды неустойчивости $\delta\psi(r, z)$ вращающихся Бозе-звезд: (a) $l = 1$, $\Delta l = 2$; (b) $l = 2$, $\Delta l = 1$; и (c) $l = 10$, $\Delta l = 6$. Рассматривается модель с $\lambda = 0$ и $U_{ext} = 0$.

l	Δl	$\text{Re } \tilde{\mu} \cdot 10^3$	$\text{Im } \tilde{\mu} \cdot 10^3$	l	Δl	$\text{Re } \tilde{\mu} \cdot 10^3$	$\text{Im } \tilde{\mu} \cdot 10^3$
1	2	7.73	-16.2	2	1	3.05	-9.64
3	3	2.42	-6.82	5	4	1.41	-3.45
7	5	0.91	-2.12	10	6	0.55	-1.13
15	8	0.29	-0.58	$\gg 1$	Ур. A.11 ; A.12 ; A.13		

Таблица 2: Параметры доминирующих мод неустойчивости во вращающихся Бозе-звездах с различными l : изменение углового момента Δl и комплексные показатели роста $\tilde{\mu}$, см. уравнения приложения А (A.13), (A.12),(A.11). Данные приведены для случая $\lambda = 0$ и $U_{ext} = 0$.

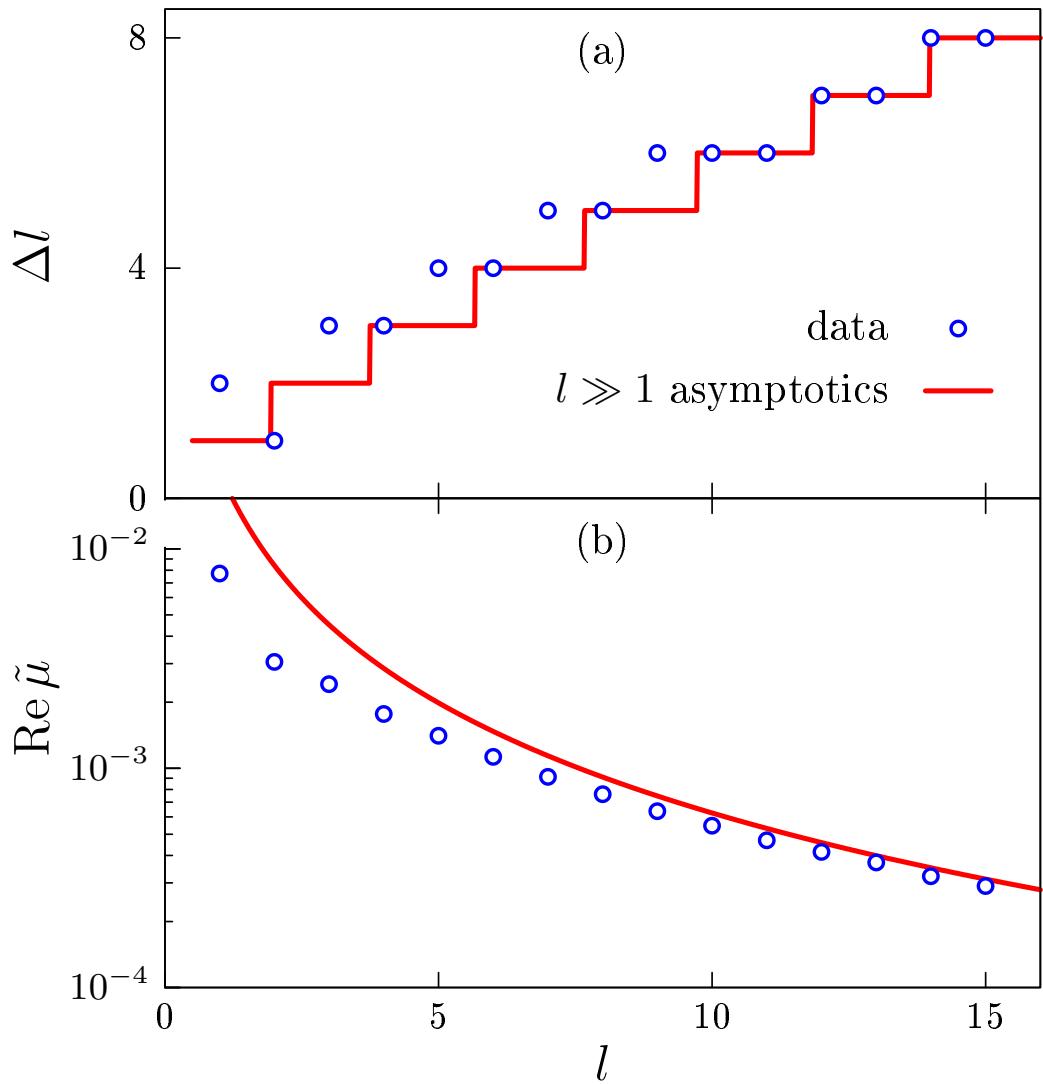


Рис. 7: Параметры доминирующих мод неустойчивости на фоне Бозе-звезд с различными l : а) изменение углового момента Δl и (б) показатель экспоненты роста $\text{Re } \tilde{\mu}$ в единицах уравнения (25). Мы рассматриваем пренебрежимо малое само-взаимодействие частиц ($\lambda = 0$) в отсутствии внешнего гравитационного потенциала. Численные данные (круги) быстро приближаются к асимптотике при больших l см. приложение А (A.11, A.13) (линии).

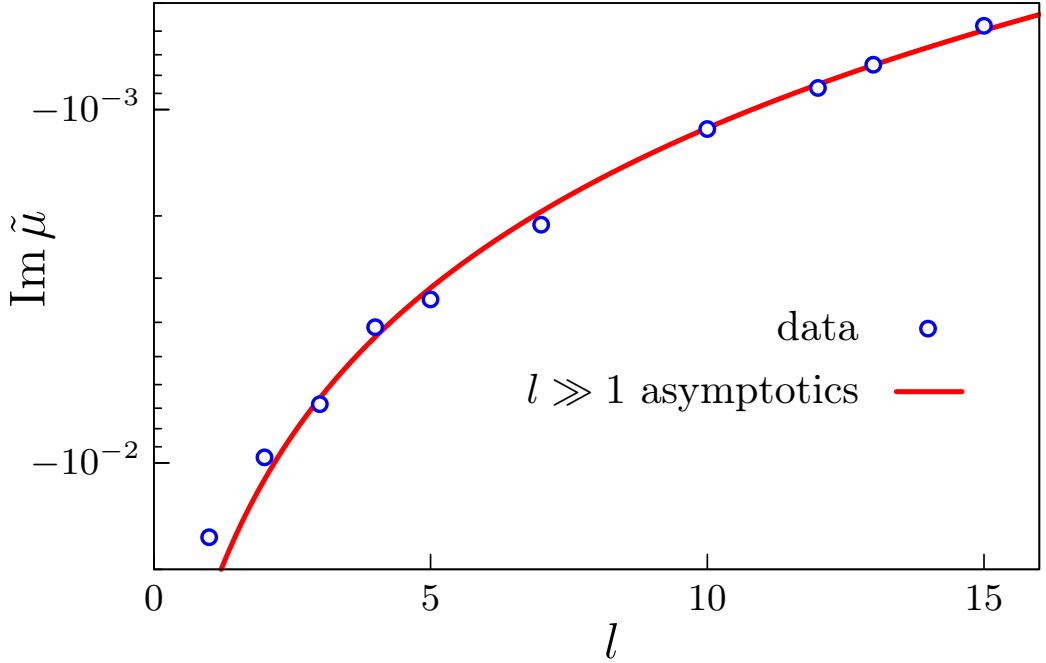


Рис. 8: Мнимые части доминирующих показателей неустойчивости $\text{Im } \tilde{\mu}$ вычисляются на фоне вращающихся Бозе-звезд с различными l . Рассматривается пренебрежимо малое самодействие $\lambda = 0$ в отсутствии внешнего гравитационного потенциала. Численные данные (круги) приближаются к аналитической асимптотике см. приложение А (A.12) (линия) при больших l

3.2. Случай $\lambda \neq 0$, $U_{ext} = 0$.

Используя процедуру первой части, мы вычисляем Бозе-звезды при разных ненулевых λ в отсутствии внешнего гравитационного потенциала $U_{ext} = 0$. Здесь мы рассмотрим подробно случай с $l = 1$. Восстанавливая член $\frac{\lambda|\psi|^2}{8m^2}\psi$ в уравнении (1), здесь мы снова чередуем шаги евклидовой эволюции $\Delta\tau = i\Delta t$ с перенормировками ψ и алгоритм SOR для U в уравнении (2). Это дает конфигурации с $\tilde{M}_s = 1$.

Отметим, что итерации сходятся только при $\lambda > \lambda_{cr}$, где критический параметр самодействия $\lambda_{cr} < 0$ равен

$$\lambda_{cr} = (-738 \pm 4)/(GM_s^2). \quad (26)$$

Это означает, что решения с фиксированной массой не существуют при параметре самодействия меньше λ_{cr} (более сильное притяжение) или, наоборот, при данном отрицательном λ и массами больше критической $M_s > M_{cr}^{(l=1)}$, где

$$M_{cr}^{(l=1)} \approx 27.2/(-G\lambda)^{1/2}. \quad (27)$$

Действительно, можно численно видеть, что при фиксированном $\lambda < 0$ масса M_s увеличивается при увеличении $|\omega_s|$ до достижения максимум $M = M_{cr}^{(l=1)}$ при $dM_s/d\omega_s \approx 0$ [7, 8]. За пределами этой критической массы наш метод перестает работать.

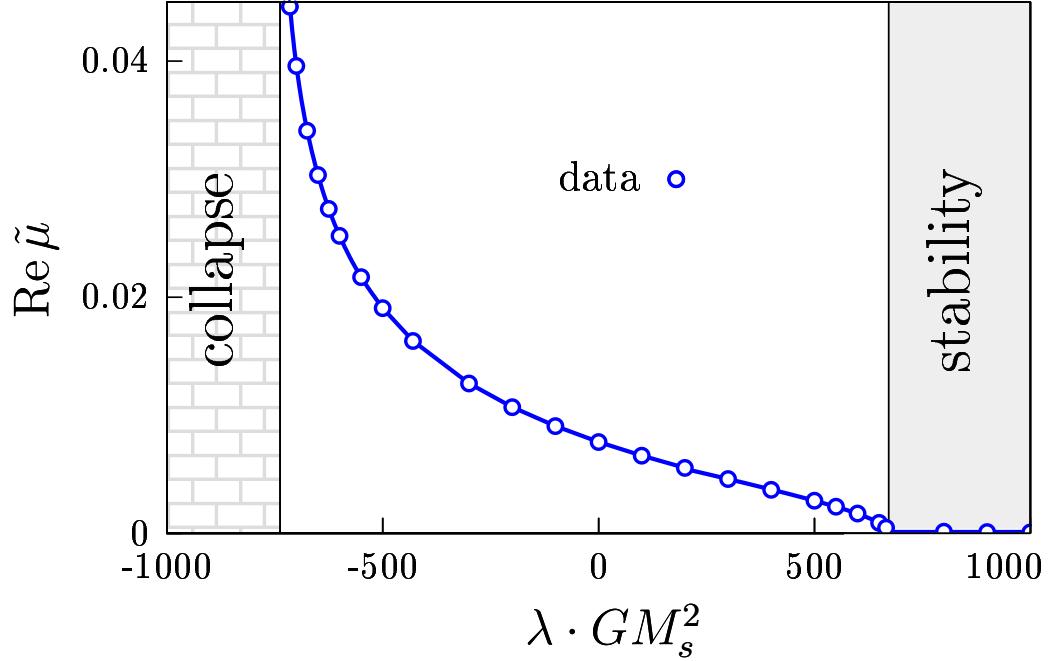


Рис. 9: Показатель неустойчивости $Re \tilde{\mu}$ самой быстрой растущей моды Бозе-звезды с $l = 1$, как функция параметра самодействия бозонов λ при $M_s = \text{const}$. Единицы измерения μ вводятся в уравнении (25). Затененные области соответствуют коллапсирующим звездам при больших отрицательных λ и абсолютно стабильным звездам при $\lambda > \lambda_0$.

Рассмотренное выше поведение при $M > M_{cr}^{(l=1)}$ такое же, как и в случае невращающихся Бозе-звезд [9]. Физически это вызвано доминирующим в плотном конденсате Бозе-Эйнштейна самодействием, заставляющее объекты с большой массой коллапсировать, то есть сжиматься самоподобным образом [7, 10]. Коллапс заканчивается потоками релятивистских бозонов, покидающих конденсат [10]. Благодаря этому процессу при $\lambda < \lambda_{cr}$ не существует стационарных Бозе-звезд с заданной массой.

В противоположном случае $\lambda > \lambda_{cr}$ мы изучаем устойчивость Бозе-звезды, добавляя члены самодействия к уравнениям (23) и эволюционируя возмущения в реальном времени. Нормы $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$ и δU растут экспоненциально, если $\lambda < \lambda_0$, где λ_0

$$\lambda_0 \approx (672 \pm 2)/(GM_s^2) . \quad (28)$$

Их экспоненты $Re \tilde{\mu}$ показаны на Рис. 9. Таким образом, во всей области $\lambda_{cr} < \lambda < \lambda_0$ Бозе-звезда с $l = 1$ распадается, теряя свой угловой момент.

При $\lambda > \lambda_0$ возмущения остаются ограниченными в течение всей эволюции в реальном времени. Несмотря на это, мы используем описанный ранее метод для определения показателя экспоненты роста и получаем точки в правой части Рис. 9, которые согласуются с $\text{Re } \mu \approx 0$. Мы приходим к выводу, что Бозе-звезды с $l = 1$ абсолютно стабильны при $\lambda > \lambda_0$ или

$$M > M_0^{(l=1)} \approx 25.9/(G\lambda)^{1/2}, \quad (29)$$

где было переписано уравнение (28) в терминах массы при фиксированном параметре самодействия.

3.3. Случай $\lambda = 0$, $U_{ext} \neq 0$.

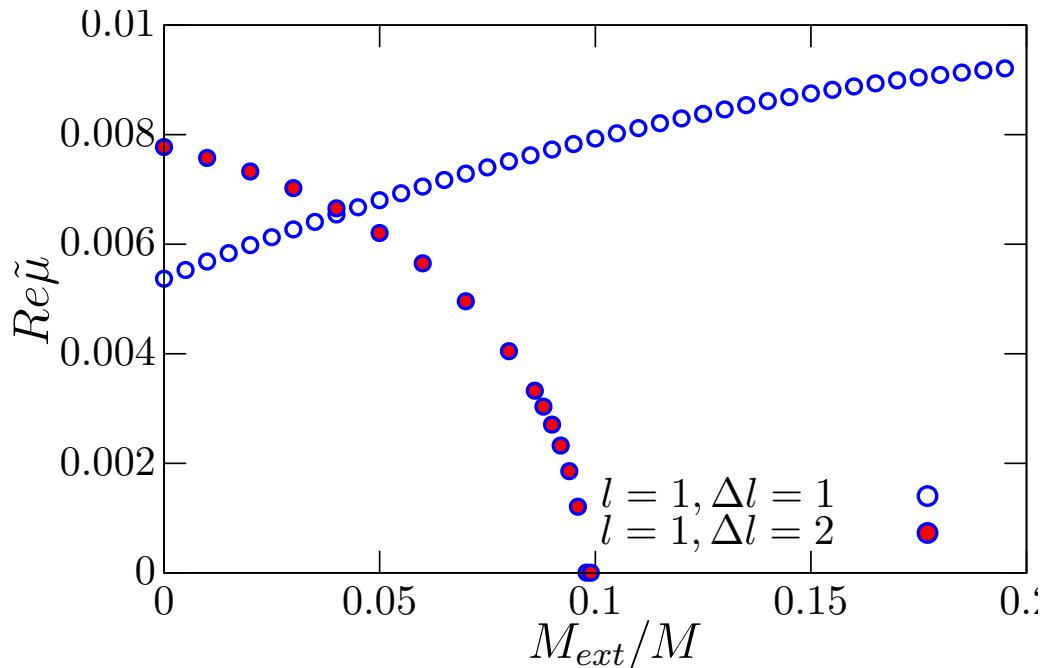


Рис. 10: Показатели неустойчивости $\text{Re } \tilde{\mu}$ мод с $\Delta l = 1$ и 2 Бозе-звезды с $l = 1$, как функция внешней массы M_{ext} . Единицы измерения $\tilde{\mu}$ вводятся в уравнении (25).

Снова используя процедуру первой части, мы вычисляем Бозе-звезды при разных ненулевых M_{ext} используя пренебрежимо малый параметр самодействия $\lambda = 0$. Здесь мы остановимся на рассмотрении случая с $l = 1$. Восстанавливая вклад слагаемого $tU_{ext}\psi$ в уравнении (1) с учетом масштабирования (8), мы снова численно решаем уравнения, чередуя шаги евклидовой эволюции $\Delta\tau = i\Delta t$ с перенормировками ψ и алгоритм SOR для U в уравнении (2). И снова получаем конфигурации с $\tilde{M}_s = 1$.

Здесь важно отметить, что внешний гравитационный потенциал $-GM_{ext}/r$ имеет сингулярность при $r = 0$, что не влияет на наш численный метод для поиска вращающейся Бозе-звезды с $l \neq 0$, но создает проблемы при поиске возмущений, если $l \pm \Delta l = 0$. Поэтому мы модифицируем его (в цилиндрических координатах) $-\frac{GM_{ext}}{\sqrt{\rho^2+z^2+a^2}}$, вводя параметр a . Выбор этого параметра и точность в связи с его введением рассмотрена в проложении В.

Мы изучаем устойчивость Бозе-звезды, добавляя слагаемые учитывающие наличие внешнего гравитационного потенциала к уравнениям (23) и эволюционируя возмущения в реальном времени. В зависимости от M_{ext} некоторые $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$ и δU (мы рассмотрели моды с $\Delta l = 1$ и 2) растут экспоненциально, что свидетельствует о нестабильности Бозе-звезды. Их показатели экспонент $\text{Re } \tilde{\mu}$ изображены на Рис. 10. Отметим, что в этом случае Бозе-звезда всегда не стабильна, несмотря на то, что одна из мод, начиная с некоторого значения M_{ext} все же стабилизируется.

Проведенный здесь численный расчет воспроизводит результат запрещающей теоремы, рассмотренной во второй части.

Заключение.

В данной работе мы аналитически доказали, что вращающиеся нерелятивистские Бозе-звезды неустойчивы при любом угловом моменте, если параметр самодействия $\lambda \leq 0$ или они находятся во внешнем гравитационном поле. Этот результат актуален для популярных моделей с аксионной (КХД) темной материей. Мы также показали, что в моделях с отталкивающим самодействием ($\lambda > 0$), звезды с $l = 1$ нестабильны с массами ниже $M_{s,0} \approx 25.9/(\lambda G)^{1/2}$ и абсолютно стабильны, если $M_s > M_{s,0}$.

Мы вычислили показатели роста возмущений неустойчивых вращающихся звезд в уравнения (11) – (17) и в таблице 2, что позволяет вычислить время жизни. Можно показать, что вращающиеся Бозе-звезды (1) не могут зародиться в реалистичных сценариях формирования [9] – [15] и на самом деле не могут даже рассматриваться как долго живущие квазистационарные состояния. Это наблюдение имеет ряд феноменологических следствий.

Хотя Бозе-звезда $l = 1$ становится стабильной при достаточно сильном отталкивающем самодействии $\lambda > \lambda_0$, уравнение (26), судьба объектов с большим l гораздо менее тривиальна. В моделях с доминирующим самоотталкиванием вихри $l \geq 2$ распадаются [17] на элементарные с $l = 1$, и последние равномерно распределяются по имеющемуся объему. Это говорит о том, что осесимметричные конфигурации $l \geq 2$ (6) неустойчивы при любом λ , и реальный вопрос заключается в том, распадаются ли они в гравитационном поле на связанные объекты с l элементарными вихрями внутри или большая часть вихрей мигрируют на периферию системы.

Наконец, заметим, что хотя формирование вращающихся Бозе-звезд требует тонкой настройки исходных данных или специального механизма, распады этих объектов настолько сложны, что их исследования могут иметь научную ценность сами по себе. Действительно, мы ожидаем, что Бозе-звезды с большим l разбиваются на $\Delta l \propto l$ не вращающихся компонент, колеблющихся и вращающихся вокруг взаимного центра. Это состояние должно существовать в течение некоторого времени, пока, возможно, не нарушится из-за субдоминантной нестабильности. В случае притягивающего самодействия компонентные объекты могут колапсировать, разрываясь на релятивистские аксионы [10] или фотоны [16], поскольку они больше не защищены центробежными барьерами.

Приложение

Приложение А: Аналитическое решение при $l \gg 1$

При больших l профили вращающихся Бозе-звезд и их моды неустойчивости могут быть оценены аналитически. Поясним идею аппроксимации с помощью грубых оценок. В этом приложении мы рассмотрим случай пренебрежимо малого самодействия, $\lambda = 0$ и отсутствия внешнего гравитационного потенциала $U_{ext} = 0$.

Размер R_s быстро вращающейся Бозе-звезды велик. Действительно, он определяется балансом между гравитационными и центробежными силами, $|\Phi_s| \sim GM_s/R_s \sim (l/mR_s)^2$, и которые растут как

$$R_s = 2\pi l^2/(m^2 GM_s \alpha_l) \propto l^2 \quad (A.1)$$

при $l \rightarrow +\infty$, где мы ввели параметр α_l . С другой стороны, типичный импульс конденсированных бозонов связан с глубиной потенциальной ямы звезды: $\Delta_{r,z}\psi_s/\psi_s \sim m^2\Phi_s \propto l^{-2}$ и, следовательно, $\partial_{r,z}\psi_s/\psi_s \propto l^{-1}$. Это сразу же наводит на мысль, что звезда с большим l имеет форму кольца с радиусом и толщиной, пропорциональными l^2 и l соответственно.

Это свойство явно выражено в численных профилях, полученных в первой части основной работы. Действительно, объект с $l = 10$ на рисунке 2 напоминает тор с двумя существенно различными радиусами. Естественно, мы хотим описать такие кольцеобразные объекты в координатах $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$,

$$r = R_s + lx_2, \quad z = ly_2, \quad (A.2)$$

которые не зависят от l . Напомним также, что размер кольца $R_s \propto l^2$ определяется новым параметром α_l , который будет указан впоследствии.

Приведенное выше наблюдение фиксирует зависимость от l энергии связи $\omega_s \equiv \omega_2/l^2$ и полей,

$$\psi_s = l^{-2} \psi_2(\mathbf{x}_2), \quad \Phi_s = l^{-2} \Phi_2(\mathbf{x}_2) - \frac{l^2}{2m^2 R_s^2}, \quad (A.3)$$

где мы снова предположили, что масса Бозе-звезды (3) не зависит от l . Подставляя анзац (A.3) в уравнения (1), (2) и игнорируя вклады, подавленные l^{-1} , мы приходим к уравнениям для профиля кольца,

$$\omega_2 \psi_2 = -\frac{\Delta_2 \psi_2}{2m} + m \Phi_2 \psi_2, \quad (A.4)$$

$$\Delta_2 \Phi_2 = 4\pi m G |\psi_2|^2. \quad (A.5)$$

Здесь и далее $\Delta_2 \equiv \partial_{x_2}^2 + \partial_{y_2}^2$ – двумерный лапласиан.

По-видимому, уравнения (A.4), (A.5) повторяют оригинальную задачу Шредингера-Ньютона (1), (2), но в двух измерениях. Таким образом, сечение $\varphi = \text{const}$ нашей Бозе-звезды при большом l имеет тот же профиль, что и ее невращающейся низкоразмерный аналог. Дополнительный фактор $e^{il\varphi}$ в уравнении (6) обеспечивает вращение.

Естественно ожидать, что решение уравнений (A.4), (A.5) имеет круговую симметрию в плоскости \mathbf{x}_2 , т. е. зависит от $r_2^2 \equiv x_2^2 + y_2^2$. Как следствие, исходная трехмерная звезда также симметрична. Мы используем это свойство для вычисления звездного профиля: $\psi_2 = \psi_2(r_2)$ и $\Phi_2(r_2)$ в уравнениях (A.4), (A.5) и решаем полученные обыкновенные дифференциальные уравнения методом стрельбы. Заметим, что результирующая функция $\psi_2(r_2)$ вещественна.

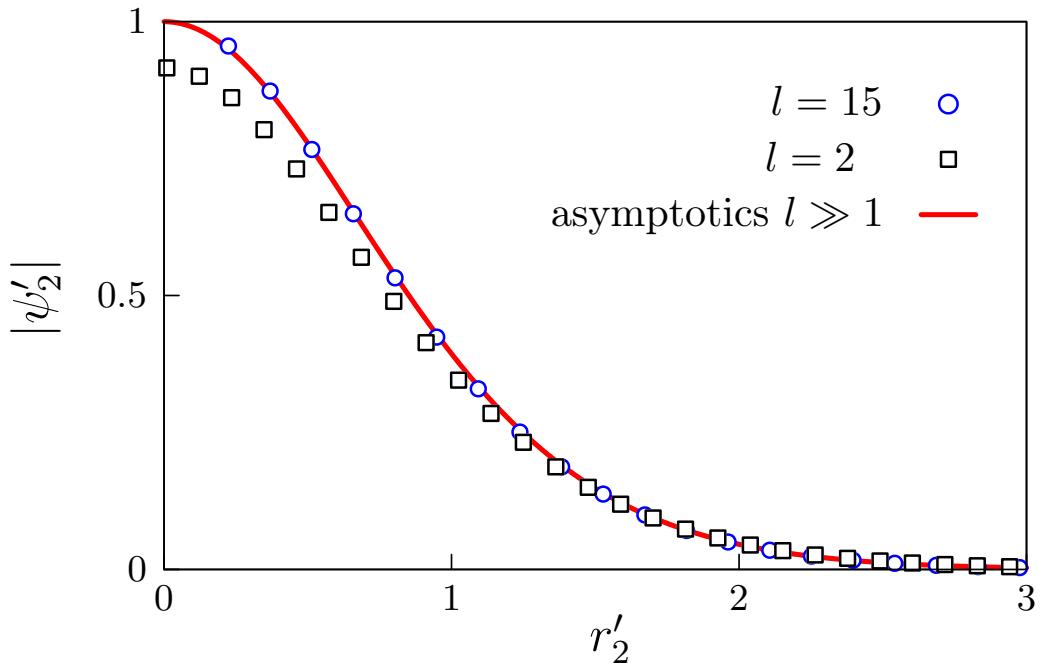


Рис. 11: Двумерная Бозе-звезда $|\psi_2(r_2)|$ (сплошная линия) сравнивается с сечениями вращающихся трехмерных звезд $|l^2\psi_s(R_s + lr_2, 0)|$ (точки). В последнем случае мы определяем радиус Бозе-звезды R_s как положение максимума $|\psi_s|$ при $z = \varphi = 0$, а затем используем безразмерные единицы измерения с параметром v'_0 , полученным из уравнения (A.6). Рассматривается случай $\lambda = 0$.

Численно снова удобно использовать безразмерные единицы с $G = m = 1$ и впоследствии восстанавливать физические термины. Для этого мы масштабируем $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}'_2/mv'_0$ и $\psi_2 = v'^2(m/G)^{1/2}\psi'_2$, $\Phi_2 = v'^2\Phi'_2$ как в трех измерениях, но с новым параметром v'_0 , выбранным для создания $\psi'_2(0) = 1$. Двумерный профиль $\psi'_2(r'_2)$ показан на рис. 11 (сплошная линия). Примечательно, что

сечения $\varphi = \text{const}$ трехмерных вращающихся звезд (точек) приближаются к этому графику при $l \rightarrow +\infty$.

Учитывая ψ_2 , мы вычисляем параметры Бозе-звезды. Переписывая интеграл (3) при больших R_s в двумерных терминах (A.2), (A.3) и выполняя масштабирование, мы приходим к изначальной массе Бозе-звезды,

$$M_s = \frac{4\pi^2(v'_0)^2 M'_2}{m^2 G^2 M_s \alpha_l}, \quad (\text{A.6})$$

где мы использовали уравнение (A.1) и вычислили оставшийся безразмерный интеграл $M'_2 \equiv \int d^2 \mathbf{x}'_2 |\psi'_2|^2 \approx 1.70$. На практике это соотношение можно использовать для выражения параметра масштабирования v'_0 в терминах общей массы M_s . Аналогично, энергия (4) Бозе-звезды равна,

$$E_s = \frac{m^2 G^2 M_s^3}{8\pi^2 l^2} \alpha_l \left[\alpha_l + \frac{1}{2} + \ln(\beta \alpha_l / l^2) \right]. \quad (\text{A.7})$$

На этот раз мы выразили, v'_0 из уравнения. (A.6) и ввели еще один числовой коэффициент $\beta \approx 2.86 \cdot 10^{-2}$.

Наконец, мы экстремизируем энергию (A.7) относительно параметра α_l , характеризующего радиус Бозе-звезды $R_s \propto l^2/\alpha_l$. Это дает нелинейное уравнение²

$$2\alpha_l + 3/2 + \ln(\beta \alpha_l / l^2) = 0 \quad \text{где} \quad \beta \approx 2.86 \cdot 10^{-2}. \quad (\text{A.8})$$

и завершает построение Бозе-звезды при большом l . Напомним, что мы уже рассматривали энергетическую асимптотику (A.7) в последнем элементе таблицы 1 и на рис. 3. Последний график примерно согласуется с численными данными даже при $l \sim 1$, становясь более точным при больших l . Как всегда, энергия связи бозе-частиц внутри Бозе-звезды равна $\omega_s = 3mE_s/M_s$, см. Ур. (14).

Теперь мы оцениваем экспоненциально растущие моды, разрушающие быстро вращающиеся Бозе-звезды.

Для этого мы снова масштабируем координаты и фоновые поля в линейных уравнениях (21) с помощью уравнений (A.2), (A.3). Затем, подставляя $\delta\psi \equiv \delta\psi_1$, $\delta\bar{\psi} \equiv \delta\psi_2^*$, $\delta\Phi \equiv \delta U \propto \exp(\mu t)$, мы приходим в главном порядке к задаче на собственные значения

$$\begin{aligned} -\mu_2 \eta &= \frac{p_\varphi^2 - \Delta_2}{2m} \rho + m\psi_2 \delta\Phi + (m\Phi_2 - \omega_2) \rho \\ \mu_2 \rho &= \frac{p_\varphi^2 - \Delta_2}{2m} \eta + (m\Phi_2 - \omega_2) \eta, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

²С численными значениями $\alpha_l \approx \{1.02, 1.51, 1.82, 2.05, 2.23, 2.38, 2.51, 2.62, 2.72, 2.81\}$ для $l = \{1, \dots, 10\}$ и асимптотика при больших l $\alpha_l = \ln l + O(\ln \ln l)$.

$$\Delta_2 \delta\Phi = p_\varphi^2 \delta\Phi + 8\pi G m \psi_2 \rho .$$

Здесь мы вспомнили, что $\psi_2(\mathbf{x}_2)$ является вещественным и ввели "вещественные" и "мнимые" возмущения $\rho(\mathbf{x}_2) \equiv (\delta\psi + \delta\bar{\psi})/2$ и $\eta(\mathbf{x}_2) \equiv (\delta\psi - \delta\bar{\psi})/2i$. Кроме того, в уравнениях (A.9) мы заменяем передачу углового момента Δl и комплексный показатель степени μ на параметры

$$p_\varphi = l\Delta l/R_s , \quad \mu_2 = l^2(\mu + ip_\varphi/mR_s) . \quad (A.10)$$

Решая задачу на собственные значения (A.9), можно найти все колебательные моды Бозе-звезды при заданном Δl и определить их показатели μ . Примечательно, что та же проблема с $p_\varphi = 0$ описывает колебания двумерной звезды $\psi_2(r_2)$, которая устойчива. Поэтому мы сосредоточимся на модах нестабильности с $\operatorname{Re} \mu > 0$ при $p_\varphi \neq 0$.

Мы явно вычисляем профили экспоненциально растущих возмущений, используя ту же стратегию, что и раньше. Подставим врачательно-инвариантный анзац $\rho(r_2)$, $\eta(r_2)$, $\delta\Phi(r_2)$ в уравнения (A.9) и выполним масштабирование с параметром v'_0 , например $\rho = v'^2_0(m/G)^{1/2}\rho'(r'_2)$. Это дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя безразмерными константами: собственным значением $\mu'_2 = \mu_2/(mv'^2_0)$ и масштабированным безразмерным импульсом $p'_\varphi = p_\varphi/(mv'_0)$. После этого применяем метод стрельбы для решения уравнения с условиями регулярности в начале координат и условиями спадания возмущений на бесконечности.

Наиболее быстро растущее возмущение достигается при $\mu'_2 \approx 1.49$ и $p'_\varphi \approx 1.23$. Масштабируя обратно в физические единицы и используя уравнения (A.10), (A.1), мы получаем действительную и мнимую части показателя роста μ в уравнении (25) с коэффициентами

$$\operatorname{Re} \tilde{\mu} = \frac{\mu'_2 \alpha_l}{(2\pi l)^2 M'_2} \approx 2.22 \cdot 10^{-2} \frac{\alpha_l}{l^2} , \quad (A.11)$$

$$\operatorname{Im} \tilde{\mu} = -\frac{p'_\varphi \alpha_l^{3/2}}{(2\pi l)^2 (M'_2)^{1/2}} \approx -2.39 \cdot 10^{-2} \frac{\alpha_l^{3/2}}{l^2} \quad (A.12)$$

Кроме того, первый из уравнений (A.10) фиксирует передачу углового момента, приводящую к нестабильности,

$$\Delta l = \left[\frac{l p'_\varphi}{\alpha_l^{1/2} (M'_2)^{1/2}} \right] \approx \left[\frac{0.944 \cdot l}{\alpha_l^{1/2}} \right] , \quad (A.13)$$

где $[.]$ обозначает ближайшее целое число. Напомним, что α_l удовлетворяет уравнению (A.8). Мы предварительно использовали этот результат в основной части работы для асимптотических выражений и визуализировали их на

рис. 7, 8. Повторим, что численные результаты третьей части приближаются к асимптотическим выражениям при больших l на всех рисунках.

Приложение В: Аксиально–симметричный код

Чтобы вычислить звезды с $l \geq 1$ численно, введем решетку $N_r \times N_z$ с равномерными отрезками δ_r, δ_z в цилиндрических координатах r, z . Узлы этой решетки $(r_j, z_k) \equiv (j\delta_r, k\delta_z)$ заполняют большую цилиндрическую область $0 \leq r_j \leq L_r$ и $0 \leq z_k \leq L_z$ в положительной половине трехмерного пространства по z . Мы сохраняем значения поля $\psi_{j,k} \equiv \psi(r_j, z_k)$ в узлах решетки и восстанавливаем их на $z < 0$, используя симметрию $\psi(r, -z) = \psi(r, z)$, $U(r, -z) = U(r, z)$. Мы используем безразмерные единицы с $\tilde{m} = \tilde{G} = \tilde{M}_s = 1$, введенными в первой части основной работы.

Лапласианы в уравнениях (1), (2) дискретизируются стандартным способом до второго порядка:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{j,k} = & (\psi_{j,k+1} + \psi_{j,k-1} - 2\psi_{j,k})/\delta_z^2 + \\ & + (\psi_{j+1,k} + \psi_{j-1,k} - 2\psi_{j,k})/\delta_r^2 + \\ & + (\psi_{j+1,k} - \psi_{j-1,k})/(2\delta_r r_j) - l^2 \psi_{j,k}/r_j^2 , \end{aligned} \quad (B.1)$$

где аналогичное выражение для $\Delta U_{j,k}$ не имеет последнего члена. Мы предполагаем уравнения решетки с условиями регулярности на оси симметрии³ $r = 0$: $\psi = \partial_r \Phi = 0$ или

$$\psi_{0,k} = 0 , \quad U_{-1,k} = U_{1,k} . \quad (B.2)$$

Границные условия при $z = z_0 = 0$ следуют из $z \rightarrow -z$ симметрии:

$$\psi_{j,-1} = \psi_{j,1} , \quad U_{j,-1} = U_{j,1} . \quad (B.3)$$

Наконец, мы вводим соответствующие условия спадения на "бесконечных" пределах решетки $r = L_r$ и $z = L_z$. Там волновая функция зануляется,

$$\psi_{j,k} = 0 \quad \text{при} \quad j = N_r - 1 \text{ or } k = N_z - 1 , \quad (B.4)$$

и потенциал близок к асимптотике $U \approx -GM/(r^2 + z^2)^{1/2}$. Последнее условие может быть записано в независимой от массы форме:

$$U_{N_r-1,k} = U_{N_r-2,k} \left(\frac{r_{N_r-2}^2 + z_k^2}{r_{N_r-1}^2 + z_k^2} \right)^{1/2} , \quad (B.5)$$

³При $l = 0$ мы используем $\psi_{-1,k} = \psi_{1,k}$.

и аналогично при $z = L_z$ и произвольном r_j . Подводя итог, приведенная выше дискретизация дает набор уравнений эволюции и уравнений Пуассона на внутренних узлах решетки с граничными значениями полей, фиксированными уравнениями. (B.2) — (B.5).

Мы решаем уравнение (2) для $U_{j,k}$ стандартным red-black методом SOR [18]. После каждого шага релаксации мы эволюционируем⁴ волновую функцию в евклидовом времени на $\Delta\tau = i\Delta t$,

$$\psi_{j,k}^{(n+1)} = \psi_{j,k}^{(n)} - \Delta\tau \hat{H} \psi_{j,k}^{(n)}, \quad (B.6)$$

где n индексирует шаги, а \hat{H} обозначает дискретизированный оператор в правой части уравнения (1). Эволюция (B.6) убивает все уровни возбужденной энергии в ψ при заданном l . Наконец, мы масштабируем $\psi_{j,k} \in \Delta\mathcal{N} \psi_{j,k}$ для сохранения общей массы $\tilde{M}_s = 1$, а затем переходим к следующему шагу релаксации. Мы уменьшаем временные шаги с $\Delta\tau \propto \delta_{r,z}$ в начале релаксации до $\propto \delta_{r,z}^2$ в конце вычислений.

Итерации сходятся, строя Бозе-звезды с точностью до поправок $O(\delta_{r,z}^2)$ от шагах решетки и⁵ $O(L_{r,z}^{-3})$ от размера ящика. Изменяя параметры, мы численно подтвердили масштабирование численных ошибок с помощью $\delta_{r,z}$ и $L_{r,z}$. Энергия Бозе-звезды задается дискретизированным интегралом (4), в то время как $\tilde{\omega}_s = 3\tilde{E}_s$ при $\lambda = 0$ и $U_{ext} = 0$ см. уравнение (14).

В практических вычислениях мы используем решетки в диапазоне от $N_r \times N_z = 101 \times 101$ и 1501×1501 . Мы увеличиваем их в два раза, чтобы контролировать ошибки дискретизации, которые никогда не превышают $\delta\psi_s/\psi_s < 10^{-2}$. Наши размеры ящиков $L_{r,z} \propto l^2$ сильно изменяются с l , чтобы вместить Бозе-звезды: от $\tilde{L}_r = \tilde{L}_z = 100$ при $l = 1$ до 22500 при $l = 15$. Это сохраняет относительные погрешности конечного объема меньше 10^{-6} . Наконец, мы устанавливаем, что осесимметричные профили Бозе-звезд $l = 0, 1$ совпадают с теми, что получены с помощью трехмерного кода в пределах ожидаемой точности 1%.

Как только Бозе-звезда получена, мы эволюционируем уравнения (21) в реальном времени, извлекая таким образом наиболее быстро растущую моду линейной нестабильности. Мы используем ту же дискретизацию второго порядка, что и раньше, и аналогичные граничные условия, что и в уравнениях (B.1) — (B.4). Поскольку эволюция в реальном времени более требовательна к вычислительным ресурсам, мы используем меньшие решетки в меньших ящиках за счет более низкой точности. Теперь $N_r \times N_z$ колеблется

⁴Поскольку формула Эйлера (B.6) нестабильна, мы улучшаем ее до полуявного метода: заменяем $\psi_{j,k}^{(n)} \rightarrow \psi_{j,k}^{(n+1)}$ во всех диагональных вкладах оператора \hat{H} и выражаем $\psi_{j,k}^{(n+1)}$ из полученного уравнения.

⁵Потому что уравнение B.5 игнорирует дипольную часть гравитационного потенциала Бозе-звезды.

между 101×101 и 1001×1001 , в то время как размеры коробки варьируются в интервале $10^2 \leq \tilde{L}_r, \tilde{L}_z \leq 10^3$. Наша эволюция времени использует шаги Крэнка–Николсона [18] с $\Delta\tilde{t} = 0.2 \tilde{\delta}_{r,z}^2/l'^2$. После каждого шага мы выполняем одну итерацию SOR для уравнения δU . Затем мы нормируем⁶ $\delta\psi$, $\delta\bar{\psi}$ и $\delta\Phi$ константой $\Delta\mathcal{N}$ и переходим к следующему временному шагу. Мы останавливаем процедуру, когда масштабированные возмущения стабилизируются на относительном уровне 10^{-13} . На последнем шаге мы вычисляем комплексный показатель возмущения: $\tilde{\mu} = \Delta\tilde{t}^{-1} \ln \Delta\mathcal{N}$. Изменяя Δl , мы выбираем доминирующий режим с максимальным $\operatorname{Re} \tilde{\mu}$.

Как и раньше, мы оцениваем численную точность, изменяя $N_{r,z}, L_{r,z}$ и Δt . Все относительные неточности остаются ниже 1%, самые большие ошибки связаны с эффектами конечного объема и дискретизации, которые являются сопоставимыми.

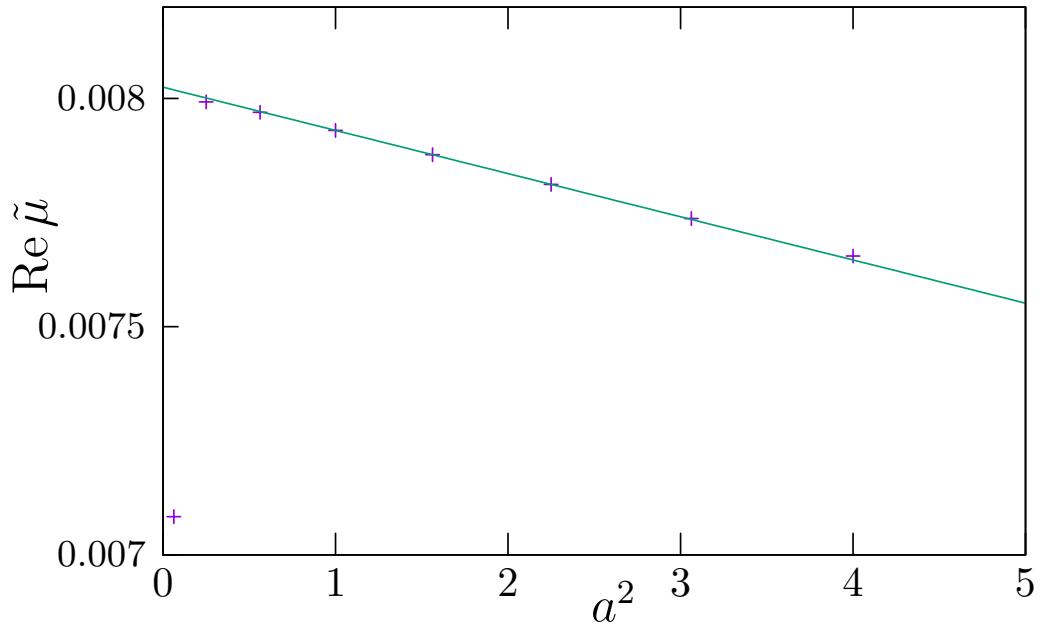


Рис. 12: Зависимость показателя экспоненты $\operatorname{Re} \mu$ от параметра a^2 . График построен при выборе $\tilde{M}_{ext} = 0.1$ и δ_r при этом = 1. График зафитирован линейной по a^2 начиная с 1.

Описанный выше численный метод легко обобщается при наличии само действия и внешнего гравитационного потенциала. Однако, как мы отмечали в основной части работы, внешний гравитационный потенциал $-GM_{ext}/r$ имеет сингулярность при $r = 0$, что не влияет на наш численный метод для поиска врачающейся Бозе-звезды с $l \neq 0$, но создает проблемы при поиске возмущений, если $l \pm \Delta l = 0$. Поэтому мы модифицируем его (в цилин-

⁶Эта перенормировка отключена на рис. 6.

дрических координатах) $-\frac{GM_{ext}}{\sqrt{\rho^2+z^2+a^2}}$, вводя параметр a . Этот параметр мы выбираем так, чтобы зависимость полей от него была квадратичной, и мы кладем его равным δ_r см. рисунок 12. Относительные неточности связанные с изменением a также остаются $<1\%$.

Литература

- [1] D. Becker et al, *Nature* 562, 391–395(2018)
- [2] H.-Y. Schive et al, *Nature Phys.* 10 (2014) 496-499
- [3] D. G. Levkov et al, *Phys.Rev.Lett.* 121 (2018) 15, 151301
- [4] G. Grilli di Cortona, E. Hardy, J. Pardo Vega, and G. Villadoro, *JHEP* 01, 034 (2016), arXiv:1511.02867.
- [5] J. C. Niemeyer, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 113, 103787 (2020), arXiv:1912.07064.
- [6] H.-Y. Schive, T. Chiueh, and T. Broadhurst, *Nature Phys.* 10, 496 (2014), arXiv:1406.6586.
- [7] V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, *Physics-Uspekhi* 55, 535 (2012).
- [8] N. Vakhitov and A. Kolokolov, *Radiophys. Quantum Electron.* 16, 783 (1971).
- [9] P.-H. Chavanis, *Phys. Rev. D* 84, 043531 (2011), arXiv:1103.2050.
- [10] D. Levkov, A. Panin, and I. Tkachev, *Phys. Rev. Lett.* 118, 011301 (2017), arXiv:1609.03611.
- [11] E. Seidel and W.-M. Suen, *Phys. Rev. Lett.* 72, 2516 (1994), arXiv:gr-qc/9309015.
- [12] H.-Y. Schive, T. Chiueh, and T. Broadhurst, *Nature Phys.* 10, 496 (2014), arXiv:1406.6586.
- [13] D. Levkov, A. Panin, and I. Tkachev, *Phys. Rev. Lett.* 121, 151301 (2018), arXiv:1804.05857.
- [14] B. Eggemeier and J. C. Niemeyer, *Phys. Rev. D* 100, 063528 (2019), arXiv:1906.01348.

- [15] J. Chen, X. Du, E. W. Lentz, D. J. Marsh, and J. C. Niemeyer, arXiv:2011.01333.
- [16] D. Levkov, A. Panin, and I. Tkachev, Phys. Rev. D 102, 023501 (2020), arXiv:2004.05179.
- [17] L. Landau and E. Lifshitz, Course of Theoretical Physics, vol. 9 "Statistical Physics: Theory of the Condensed State" by E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii (Butterworth-Heinemann, 1980).
- [18] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery, Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, 3rd ed. (Cambridge University Press, 2007).