Уравнение Казимира для трехточечных глобальных конформных блоков в двухмерной торической конформной теории поля

С.И.Мандрыгин

Кафедра Физики Частиц и Космологии

Научный руководитель: к.ф.-м.н. К.Б. Алкалаев

ОТФ ФИАН им. Лебедева, ИТМФ МГУ

Корреляционная функция

$$\langle \phi_1 (z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n (z_n, \bar{z}_n) \rangle = (q\bar{q})^{-\frac{c}{24}} \operatorname{Tr} \left(q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \phi_1 (z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n (z_n, \bar{z}_n) \right)$$

где $q = \exp 2\pi i \tau$, τ - модулярный параметр и след берется по всем векторам Гильбертова пространства $\mathcal{H}$, которое устроено следующим образом

$$|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \phi(0,0)|0\rangle \text{ - старший вектор}$$

$$\mathcal{H} = \sum_{\Delta, \bar{\Delta}} V(c, \Delta) \otimes \bar{V}(\bar{c}, \bar{\Delta}), \quad V(c, \Delta) \text{ - модуль Верма}$$

$$|M, \Delta\rangle = L_{-k_1}^{i_1} \cdots L_{-k_n}^{i_n} |\Delta\rangle \text{ - общий вектор}$$

Тогда

$$\langle \phi_1(z_1) \ldots \phi_n(z_n) \rangle = (q)^{-\frac{c}{24}} \sum_{\tilde{\Delta}_1} \sum_{m=0}^{\infty} q^{\tilde{\Delta}_1 + m} \times$$

$$\times \sum_{m=|M|=|N|} B^{M|N} \langle \tilde{\Delta}_1, M | \phi_1(z_1) \ldots \phi_n(z_n) | N, \tilde{\Delta}_1 \rangle$$

1-точка

- **Сфера:** трансляционная, масштабная инвариантность $\Rightarrow \langle \phi(z) \rangle = 0$
- **Тор: 1-точка** - не тривиальна

$$\langle \phi_\Delta(z) \rangle = (q)^{-\frac{c}{24}} \sum_{\tilde{\Delta}_1} \sum_{m=0}^{\infty} q^{\tilde{\Delta}_1 + m} \sum_{m=|M|=|N|} B^{M|N} \langle \tilde{\Delta}_1, M | \phi_\Delta(z) | N, \tilde{\Delta}_1 \rangle$$

Вводим конформный блок

$$\mathcal{V}_c^{\Delta, \tilde{\Delta}}(z|q) = \sum_{m=0} q^m \sum_{m=|M|=|N|} B^{M|N} \frac{\langle \tilde{\Delta}, M | \phi_\Delta(z) | N, \tilde{\Delta} \rangle}{\langle \tilde{\Delta} | \phi_\Delta(z) | \tilde{\Delta} \rangle}$$

Тогда 1-точка перепишется в следующем виде

$$\langle \phi_\Delta(z) \rangle = \sum_{\tilde{\Delta}} C_{\tilde{\Delta}\Delta\tilde{\Delta}} z^{-\Delta} q^{\tilde{\Delta} - \frac{c}{24}} \mathcal{V}_c^{\Delta, \tilde{\Delta}}(z|q)$$

Способы выделения конформных блоков

- Проективный
- OPE
- Уравнение Казимира

3-точка

n-точка $\to$ различные каналы - **Как их классифицировать?**

- Рассматриваем $n+2$-точку на сфере
- Отождествляем пару ног
- Оставляем топологически не эквивалентные диаграммы

Что насчет формул?

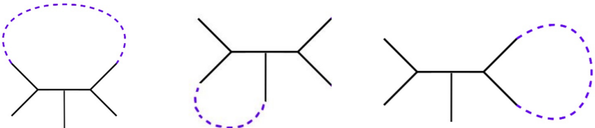
- 3 линии сходятся в одной точке $\Leftrightarrow$ OPE

$$\phi_1(z_1)\phi_2(z_2) = \sum_{\tilde{\Delta}_2} C_{\Delta_1\Delta_2\tilde{\Delta}_2}(z_1 - z_2)^{\tilde{\Delta}_2 - \Delta_2 - \Delta_1}\Psi_{\tilde{\Delta}_2}(z_1, z_2),$$

- 2 линии сходятся в петле $\Leftrightarrow$ соотношение единицы

$$1 = \sum_{\tilde{\Delta}_k}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=|S|=|T|} |S, \tilde{\Delta}_k\rangle B_k^{S|T}\langle\tilde{\Delta}_k, T|$$

Для 3-точки существует 3 канала



Глобальные блоки и уравнение Казимира

Конформный блок - сложный объект, невозможно написать замкнутые выражения.
Можно рассматривать различные упрощения

- $c \to \infty$, $\Delta = \Delta(c^0) \Leftrightarrow sl(2) \subset Vir$
- Глобальный конформный блок
- Зачем? – квазиклассический предел в AdS_3/CFT_2 ($G \sim 1/c$ - мала)

Уравнение Казимира: Конформные блоки - собственные функции оператора Казимира

$$L^2 \mathcal{V}(\tilde{\Delta}, \Delta_i, z_i|q) = -\tilde{\Delta}(\tilde{\Delta} - 1)\mathcal{V}(\tilde{\Delta}, \Delta_i, z_i|q)$$
$$L^2 = \frac{1}{2}(L_1 L_{-1} + L_{-1} L_1) - L_0^2$$

где

$$\mathcal{V}(\tilde{\Delta}, \Delta_i, z_i|q) = \mathrm{Tr}[q^{L_0} \phi_1(z_1) \ldots \phi_n(z_n)]$$

Уравнение Казимира для 1-точки

$$\mathrm{Tr}_{\tilde{\Delta}}[L^2 q^{L_0}\phi(z)] = -\tilde{\Delta}(\tilde{\Delta}-1)\,\mathrm{Tr}_{\tilde{\Delta}}[q^{L_0}\phi(z)] = -\tilde{\Delta}(\tilde{\Delta}-1)\mathcal{V}(\tilde{\Delta},\Delta|q)$$

Коммутируя операторы L_1, L_{-1} с $\phi(z)$, это уравнение можно свести к следующему

$$Q_{\tilde{\Delta}}\mathcal{V}(\tilde{\Delta},\Delta|q) = \Delta(\Delta-1)\mathcal{V}(\tilde{\Delta},\Delta|q)$$

где

$$Q_{\tilde{\Delta}} = q(1-q)^2\partial_q^2 - 2q(1-q)\partial_q - \tilde{\Delta}(\tilde{\Delta}-1)\frac{(1-q)^2}{q}$$

Решение этого уравнения - 1-точечный глобальный блок

$$\mathcal{V}(\tilde{\Delta},\Delta|q) = \frac{q^{\tilde{\Delta}}}{(1-q)^{1-\Delta}}\,{}_2F_1(\Delta, 2\tilde{\Delta}+\Delta-1; 2\tilde{\Delta}|q)$$

Хотим написать уравнение Казимира для всех каналов. А что можем?

- 3-точечный глобальный блок в OPE канале

$$\mathcal{V}^{\Delta_{1,2,3},\tilde{\Delta}_{1,2,3}} = \sum_{m,n=0} \frac{(\tilde{\Delta}_3 + \tilde{\Delta}_2 - \Delta_3)_n}{(2\tilde{\Delta}_3)_n (2\tilde{\Delta}_1)_m n! m!} (\tilde{\Delta}_3)_n \tau_{m,m}(\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_3, \tilde{\Delta}_1) \times$$
$$\times\, {}_2F_1(\tilde{\Delta}_2 + \Delta_1 - \Delta_2, \tilde{\Delta}_2 + \Delta_3 - \tilde{\Delta}_3 - n; 2\tilde{\Delta}_2 | w_1) w_2^n q^m$$

- Можно показать, что

$$\sum_{m=0} \frac{\tau_{m,m}(\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_3, \tilde{\Delta}_1)}{m!(2\tilde{\Delta}_1)_m} q^m = \frac{1}{(1-q)^{1-\tilde{\Delta}_3}}\, {}_2F_1(\tilde{\Delta}_3, 2\tilde{\Delta}_1 + \tilde{\Delta}_3 - 1; 2\tilde{\Delta}_1 | q)$$

-1-точечный торический блок

- Оставшийся множитель - это 5-точечный конформный блок на сфере.
- Итог

$$\mathcal{V}^{\Delta_{1,2,3},\tilde{\Delta}_{1,2,3}} = \mathcal{V}(\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_3 | q) \mathcal{V}_5(\tilde{\Delta}_i, \Delta_i, w_1, w_2) \tag{1}$$

можно зафиксировать системой трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Что в других каналах?

- Ожерелье

$$\mathcal{V}^{\Delta_{1,2,3},\tilde{\Delta}_{1,2,3}} = \sum_{n,k,m=0}^{\infty} \frac{\tau_{n,k}(\tilde{\Delta}_1, \Delta_1, \tilde{\Delta}_2)\tau_{k,m}(\tilde{\Delta}_2, \Delta_2, \tilde{\Delta}_3)\tau_{m,n}(\tilde{\Delta}_3, \Delta_3, \tilde{\Delta}_1)}{n!k!m!(2\tilde{\Delta}_1)_n(2\tilde{\Delta}_2)_k(2\tilde{\Delta}_3)_m}\times$$
$$\times q^n w_1^{k-n} w_2^{m-n} \tag{2}$$

- Смешанный канал: OPE и 1

$$\mathcal{V}^{\Delta_{1,2,3},\tilde{\Delta}_{1,2,3}} = \sum_{n,m,l=0} \frac{(\tilde{\Delta}_3 + \Delta_2 - \Delta_3)_{(l)}\tau_{n,m}(\tilde{\Delta}_1, \Delta_1, \tilde{\Delta}_2)\tau_{m,n}(\tilde{\Delta}_2, \tilde{\Delta}_3, \tilde{\Delta}_1)}{(2\tilde{\Delta}_1)_{(n)}(2\tilde{\Delta}_2)_{(m)}(2\tilde{\Delta}_3)_{(l)}n!m!l!}\times$$
$$\times (\tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_3 - \tilde{\Delta}_1 + m - n)^{(l)} q^n w_1^{m-n} w_2^{l} \tag{3}$$

Блоки не факторизуются!

Результаты

- Изучены все возможные каналы для 3-точечного торического конформного блока;
- Получены формулы, позволяющие считать матричные элементы примарного поля в обкладках векторов состояния с одним генератором Вирасоро;
- Получены формулы, позволяющие считать матричные элементы поля-потомка в обкладках векторов состояния с одним генератором Вирасоро;
- Посчитаны первые коэффициенты разложения конформного блока до квадратичных слагаемых по аргументам полей во всех возможных каналах;
- Найдены выражения для 3-точечных конформных блоков в пределе большого центрального заряда и постоянных конформных размерностей во всех возможных каналах;
- Показано, что уравнение Казимира в операторном канале можно представить в виде системы из трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Одно уравнение фиксирует 1-точечный торический блок, а два других фиксируют 5-точечную функцию на сфере.