# Черные дыры в модели гравитации Хоравы-Лифшица

Тагиев Вагиф
Научный руководитель: член-корр. РАН, доктор физ.- мат. наук, Горбунов Д.С.

Кафедра физики частиц и космологии

30 мая 2021 г.

# Гравитация Хоравы-Лифшица

Проблема - неперенормируемость гравитации Эйнштейна.
Пропагатор:

$$G(k) = \frac{1}{k^2} \tag{1}$$

Добавка высших степеней по кривизне:

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x\sqrt{-g}\,(R + R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) \Rightarrow G(k) = \frac{1}{k^2 - G_N k^4}$$

$$G(k) = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - G_N^{-1}} \tag{2}$$

Главная идея - Лоренц-неинвариантность теории:

$$t \to b^z t \qquad \vec{x} \to b\vec{x}, \quad t \to t'(t), \quad \vec{x} \to \vec{x}'(t, \vec{x}) \tag{3}$$

$$[t] = -z, \qquad [x^i] = -1, \qquad i = 1, \dots, d \tag{4}$$

Группа преобразований:

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(\vec{x}, t), \qquad \tilde{t} = \tilde{t}(t), \qquad i = 1, \ldots, d \tag{5}$$

ADM параметризация:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N_i N^i & N_i \\ N_j & g_{ij} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$S = \frac{1}{\zeta^2} \int dt d^d x N \sqrt{g^{(d)}} \left( \left[ K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 \right] - V(g_{ij,N}) \right) \tag{7}$$

$N = N(t)$-проективная и $N = N(t, x)$ - непроективная.
Потенциал содержит $R^{(d)}$, $R^{(d)\mu\nu} R^{(d)}_{\mu\nu}$, $a_i \equiv \frac{\tilde{\nabla}_i N}{N}$. Потенциал в $3+1$:

$$V^{d=3} = -\eta R + \mu_1 R^2 + \mu_2 R_{ij} R^{ij} +$$
$$+\nu_1 R^3 + \nu_2 R R_{ij} R^{ij} + \nu_3 R^i_j R^j_k R^k_i + \nu_4 \tilde{\nabla}_i R \tilde{\nabla}^i R + \nu_5 \tilde{\nabla}_i R_{jk} \tilde{\nabla}^i R^{jk} \tag{8}$$

Хрононное поле $U(x) = const$ - отвечает за направление времени:

$$u_\mu = \frac{\partial_\mu U}{\sqrt{-g^{\mu\nu}\partial_\mu U \partial_\nu U}}, \quad u^2 = -1 \tag{9}$$

Действие в ковариантном виде:

$$S = \frac{1}{\zeta^2}\int d^{d+1}x\sqrt{-g^{(d+1)}}(R^{(d+1)} + \alpha(u^\mu \nabla_\mu u_\nu)^2 + \beta \nabla_\mu u^\nu \nabla_\nu u^\mu + \\ + \gamma(\nabla_\mu u^\mu)^2 + \dots) \tag{10}$$

Теория поля - тоже Лоренц-неивариантна:

$$S_M = \frac{1}{2}\int d^{d+1}x\sqrt{-g}(-g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_\nu\phi^* - M^2\phi\phi^* + \left(\lambda_{2,1} - \frac{1}{2}\right)(\phi\Delta\phi^* +$$

$$+\phi^*\Delta\phi) - \sum_{n=0}^{z}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{\lambda_{2,n,k}}{M^{2(n-1)}}\Delta^{n-k}\phi\Delta^k\phi^*)$$

В ВКБ приближении (уравнение эйконала):

$$\phi = e^{iS}, \quad g^{\mu\nu}\partial_\mu S\partial_\nu S + \sum_{n=1}^{z}\lambda_n(P^{\mu\nu}\partial_\mu S\partial_\nu S)^n = 0 \qquad (11)$$

В плоском пространстве дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = M^2 + k^2 + \sum_{n=2}^{z}\frac{\tilde{\lambda}_{2,n}}{M^{2(n-1)}}k^{2n} \qquad (12)$$

Групповая скорость:

$$v_g = \frac{k}{\omega}\left[1 + \sum_{n=2}^{z}n\tilde{\lambda}_{2,n}\left(\frac{k}{M}\right)^{2(n-1)}\right] \qquad (13)$$

В теории существуют решения уравнений на метрику и хрононный вектор, содержащие причинный горизонт - универсальный горизонт ($\chi = \partial_v$ - вектор Киллинга):

$$(u \cdot \chi) = 0, \qquad \text{при} \quad r = r_{uh} \tag{14}$$

$$ds^2 = -e(r)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \tag{15}$$

$$u = (u \cdot \chi)dv + \frac{dr}{(s \cdot \chi) - (u \cdot \chi)} \tag{16}$$

$$dU = dv + \frac{dr}{(u \cdot \chi)[(s \cdot \chi) - (u \cdot \chi)]} \tag{17}$$

$$ds^2 = -(u \cdot \chi)^2 dU^2 + \left((s \cdot \chi)dU - \frac{dr}{(u \cdot \chi)}\right)^2 + r^2 d\Omega_2^2 \tag{18}$$

Подставляя все в уравнение эйконала:

$$-\frac{1}{(u\cdot\chi)^2}(\partial_U S)^2+e(r)(\partial_r S)^2-2\frac{(s\cdot\chi)}{(u\cdot\chi)}\partial_U S\partial_r S+\lambda_1(u\cdot\chi)^2(\partial_r S)^2+ \\ +\lambda_2((u\cdot\chi)^2(\partial_r S)^2)^2+\lambda_3((u\cdot\chi)^2(\partial_r S)^2)^3=0 \quad (19)$$

Ищем решение:

$$S=-\omega U+W(r) \quad (20)$$

$$\Gamma\sim\exp\left(-2ImS\right) \quad (21)$$

$$-\frac{\omega^2}{(u\cdot\chi)^2}+e(r)(W')^2+2\frac{(s\cdot\chi)}{(u\cdot\chi)}\omega W'+\lambda_1(u\cdot\chi)^2(W')^2+ \\ +\lambda_2((u\cdot\chi)^2(W')^2)^2+\lambda_3((u\cdot\chi)^2(W')^2)^3=0 \quad (22)$$

Будем искать решение в следующем виде. А также разложим все функции около универсального горизонта:

$$\begin{gathered} W'(r) = \frac{B(r)}{(u \cdot \chi)} \\ (u \cdot \chi) = (a \cdot s)_{uh}(r - r_{uh}) + O(r - r_{uh}) \\ B = B_0 + B_1(r - r_{uh}) + O(r - r_{uh}) \end{gathered} \tag{23}$$

В итоге получим следующее выражение на искомую функцию $W'(r)$:

$$W' = \frac{\omega}{(s \cdot \chi)_{uh}(a \cdot s)_{uh}} \frac{1}{r - r_{uh}} + const + O(r - r_{uh}) \tag{24}$$

Используя формулу Сохоцкого, получаем

$$\Gamma \sim exp\left(-\frac{\omega}{T_{uh}}\right), \qquad T_{uh} = \frac{(s \cdot \chi)_{uh}(a \cdot s)_{uh}}{4\pi} \tag{25}$$

BTZ подобное решение в 2+1:

$$
\begin{gathered}
ds^2 = -Z(r)dt^2 + \frac{dr^2}{Z(r)} + r^2(d\phi + \Omega(r)dt)^2 \\
Z(r) = -M + \frac{\overline{J}^2}{4r^2} - \overline{\Lambda}^2 r^2 \quad \Omega = -\frac{J}{2r^2}
\end{gathered} \tag{26}
$$

Переход в координаты Эддингтона-Финкельштейна:

$$
dv = dt + \frac{dr}{Z}, \qquad d\varphi = d\phi - \frac{\Omega}{Z}dr \tag{27}
$$

$$
u = (u \cdot \chi)dv + Fdr, \quad F = -\frac{(u \cdot \chi)}{Z} - \frac{\sqrt{(u \cdot \chi)^2 - Z}}{Z} \tag{28}
$$

$$
\begin{gathered}
ds^2 = -(Z - \Omega^2 r^2)dU^2 + 2\left((Z - \Omega^2 r^2)\frac{F}{(u \cdot \chi)} + 1\right) dUdr + \\
+ \left(-(Z - \Omega^2 r^2)\frac{F^2}{(u \cdot \chi)^2} - \frac{F}{(u \cdot \chi)}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2 + 2\Omega r^2 d\varphi dU - \\
-2\frac{F}{(u \cdot \chi)}\Omega r^2 d\varphi dr
\end{gathered} \tag{29}
$$

У метрики имеется две сингулярности: универсальный горизонт и горизонт при $Z(r_h) = 0$. Уравнение эйконала принимает вид:

$$-\frac{1}{(u\cdot\chi)^2}(\partial_U S)^2 - 2\frac{\sqrt{(u\cdot\chi)^2 - Z}}{(u\cdot\chi)}\partial_U S\partial_r S - 2\frac{F}{(u\cdot\chi)}\Omega\partial_U S\partial_\varphi S +$$

$$+Z(\partial_r S)^2 - 2\Omega\partial_r S\partial_\varphi S + \frac{1}{r^2}(\partial_\varphi S)^2 +$$

$$+\lambda_1\left((u\cdot\chi)^2(\partial_r S)^2 + \left[\frac{1}{r^2} + F^2\Omega^2\right](\partial_\varphi S)^2 + 2\Omega(u\cdot\chi)F\partial_r S\partial_\varphi S\right) +$$

$$+\lambda_2\left((u\cdot\chi)^2(\partial_r S)^2 + \left[\frac{1}{r^2} + F^2\Omega^2\right](\partial_\varphi S)^2 + 2\Omega(u\cdot\chi)F\partial_r S\partial_\varphi S\right)^2 = 0$$

Аналогично ищем решение в следующем виде и раскладываем около универсального горизонта:

$$\begin{gathered} W'(r) = \frac{B(r)}{(u \cdot \chi)} \\ (u \cdot \chi) = (a \cdot s)_{uh} \cdot (r - r_{uh}) + O(r - r_{uh}) \\ B(r) = B_0 + B_1 \cdot (r - r_{uh}) + O(r - r_{uh}) \end{gathered} \tag{30}$$

Получаем в итоге:

$$W'(r) = \frac{\omega}{\sqrt{|Z_{uh}|}(a \cdot s)_{uh}} \frac{1}{r - r_{uh}} + const + O(r - r_{uh}) \tag{31}$$

Точно также у второго горизонта:

$$\begin{gathered} W'(r) = \frac{E}{Z(r)} \\ Z(r) = Z'_h \cdot (r - r_h) + O(r - r_h) \\ E(r) = E_0 + E_1 \cdot (r - r_h) + O(r - r_h) \end{gathered} \tag{32}$$

И получаем:

$$W'(r) = \frac{2\Omega_h L}{Z'_h} \frac{1}{r - r_h} + const + O(r - r_h) \tag{33}$$

По формуле Сохоцкого:

$$ImS = \frac{\omega\pi}{(a \cdot s)_{uh}\sqrt{|Z_{uh}|}} + \frac{2\pi\Omega_h L}{Z'_h} \tag{34}$$

$$\Gamma \sim \exp\left(-\frac{\omega}{T_{uh}}\right) \exp\left(-\frac{8\pi\Omega_h L}{Z'_h}\right), \quad T_{uh} = \frac{(a \cdot s)_{uh}\sqrt{|Z_{uh}|}}{4\pi} \tag{35}$$

## Выводы

- В работе исследована модель гравитации Хоравы-Лифшица
- Получен темп излучения сферически симметричной черной дыры в $3+1$ для случая $z=3$

$$\Gamma \sim exp\left(-\frac{\omega}{T_{uh}}\right), \qquad T_{uh} = \frac{(s\cdot\chi)_{uh}(a\cdot s)_{uh}}{4\pi} \tag{36}$$

- Также получен темп излучения BTZ подобной черной дыры в $2+1$ в случае $z=2$

$$\Gamma \sim \exp\left(-\frac{\omega}{T_{uh}}\right)\exp\left(-\frac{8\pi\Omega_h L}{Z_h'}\right), \quad T_{uh} = \frac{(a\cdot s)_{uh}\sqrt{|Z_{uh}|}}{4\pi} \tag{37}$$

Хочу выразить благодарность Горбунову Дмитрию Сергеевичу за плодотворные обсуждения и научное руководство, а также Бабичеву Евгению Олеговичу за рецензию!

Спасибо за внимание!