Устойчивость хаос и сложность в классической и квантовой механике

Курсовая работа студента 215 группы
Чистякова Всеволода Всеволодовича
Научный руководитель:
Доктор физ.-мат. наук, профессор
Белокуров Владимир Викторович

Постановка задачи

- Целью настоящей работы является изучение явлений классического и квантового хаоса, неустойчивости. Рассмотрение различных моделей, в которых проявляется классический и квантовый хаос, сопоставление классических неустойчивых моделей с их квантовыми аналогами.

Устойчивость

- $\ddot{x} = -x$ – гармонический осциллятор (устойчивый)
$$x(t) = A\cos t + B\sin t$$
- $\ddot{x} = x$ – гармонический осциллятор с обратным знаком (неустойчивый)
$$x(t) = A\cosh t + B\sinh t$$

Начальное возмущение возрастает экспоненциально

$$\frac{\delta x(t)}{\delta x(0)} \sim e^t$$

Примеры хаоса

Модель Э. Лоренца (1970):

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x - y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

- Частица в потенциале с двумя ямами под действием периодической внешней силы:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - \frac{1}{2}x\left(1 - x^2\right) = \cos(\nu t)$$

- $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ пример дискретной динамической системы в которой обнаруживается переход к хаосу путём бифуркаций удвоения периода

Свойства и характеристики хаоса

- Эргодичность

Пусть траектория динамической системы лежит в некоторой ограниченной области U фазового пространства. Система называется эргодической если её фазовая траектория образует в U всюду плотное множество

- Показатель Ляпунова $\lambda = \lim\limits_{t \to \infty \; \|\delta X(0)\| \to 0} \frac{1}{t} \ln \frac{||\delta X(t)||}{||\delta X(0)||}$
- Автокорреляционная функция $\mathrm{C}(\tau) = \lim\limits_{T \to \infty} \int_0^T \hat{x}(t)\, \hat{x}(t+\tau)\mathrm{dt}$

Квантовый хаос. OTOC

- В классической механике $\frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} \sim e^{\lambda t}$
- Используя скобку Пуассона $\frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} = -\{x(t), p(0)\}$
- Каноническое квантование $\{x(t), p(0)\} \to i[\hat{x}(t), \hat{p}(0)]$
- Некоторый матричный элемент $< f|[\hat{x}(t), \hat{p}(0)]|i >$
- Суммирование по конечным состояниям

$\mathrm{c}_i(t) = |< i\left|[\hat{x}(t), \hat{p}(0)]^2\right|i > |$ $\quad$ $\mathrm{c}_i(t) \sim e^{2\lambda t}$

Усреднение по ансамблю Гиббса:

$$C_T(t) = \sum_i \frac{e^{-E_i/T}}{Z} c_i(t)$$

-Гармонический осциллятор

$$c_i(t) = cos^2(t)$$

-Гармонический осциллятор с обратным знаком

$$c_i(t) = cosh^2(t)$$

$$\mathrm{c}_i = -< i\left|[x,p]^2\right|i> =$$

$$= \sum_f < i|[x,p]^+|f >< f|[x,p]|i| > = \sum_f |< f|[x,p]|i > |^2$$

$$[x,p]^2 = xpxp - xp^2x - px^2p + pxpx$$

Квантовый хаос. Сложность

- В теории информации под сложностью понимается количество операций, которое нужно совершить над исходными данными для получения требуемого результата
- $\psi_T = \widehat{U}\, \psi_R \quad \psi_R - \text{исходное} \quad \psi_T - \text{ целевое состояния}$
- В некоторых задачах $\widehat{U}$ принадлежит унитарному представлению некоторой группы (здесь SL(2,R)) тогда сложностью является расстояние на группе от единичного элемента до $\widehat{U}$

Задача о маятнике с колеблющейся точкой подвеса

- Малые отклонения маятника от верхнего положения равновесия:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin(\varphi) = 0 \rightarrow \varphi = \pi + x \quad \ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

- При ω=const, верхнее положение неустойчиво
- Если точка подвеса совершает вертикальные колебания (ξ(t)- смещение по вертикали), то ω^2 зависит от времени:
- $\omega^2(t) = \omega_0^2 - \ddot{\xi} \quad \omega_0 - \text{собственная частота маятника}$
- Если $\xi = \xi_0 \sin \nu t$, при достаточно больших ν верхнее положение может стать устойчивым

Квантовый аналог

- Пусть в начальный момент времени частица находится в основном состоянии гармонического осциллятора с собственной частотой $\omega_0 = 1$

$$\psi(0, x) = N(0)e^{-x^2/2}$$

- Далее частицу помещают во внешнее поле, её гамильтониан принимает вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \Omega^2 \frac{\hat{x}^2}{2}$$

- Состояние эволюционирует согласно уравнению: $i\dot{\psi} = \hat{H}\psi$
- Решение представимо в виде (см. [3])

$$\psi(t, x) = N(t)e^{-\omega(t)x^2/2}$$

Сложность состояния

- Для функций вида $\psi(t) = N(t)e^{-\omega(t)x^2/2}$

Сложность вычислена в [3] $C(t) = \frac{1}{2}\cosh^{-1}\frac{1+|\omega(t)|^2}{2Re\omega(t)}$

$\omega(t)$ является решением задачи Коши:

$$\dot{\omega} = i\left(\Omega^2 - \omega^2\right) \qquad \omega(0) = 1$$

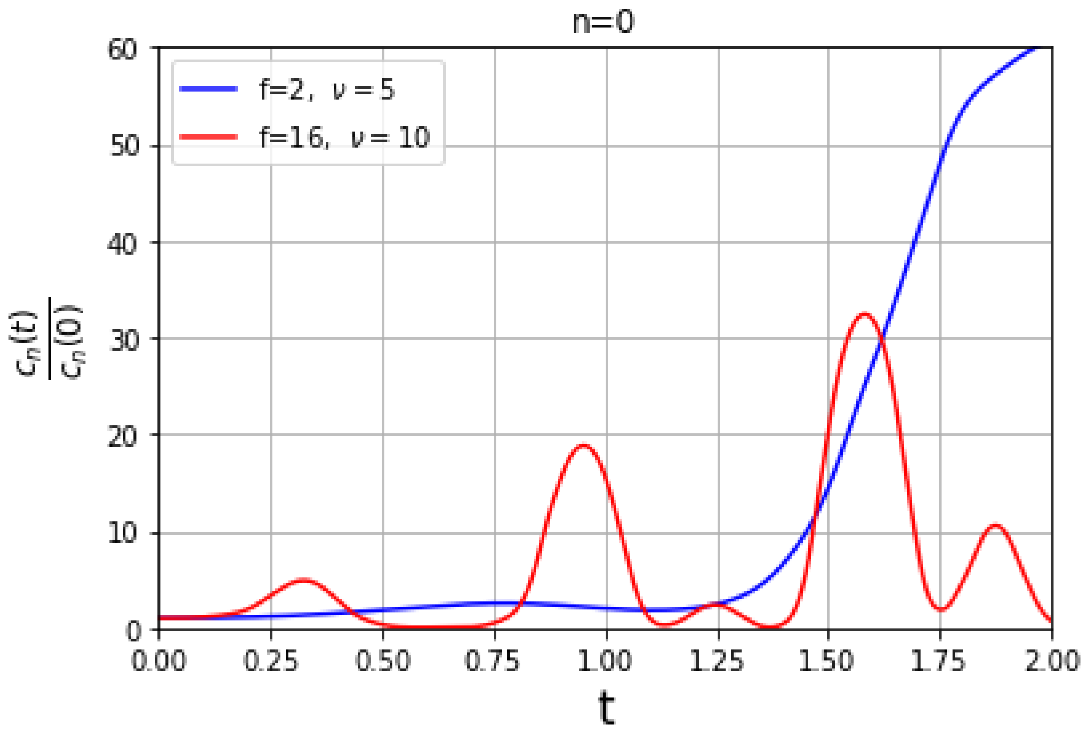
С помощью замены переменных можно свести выражение для сложности к виду

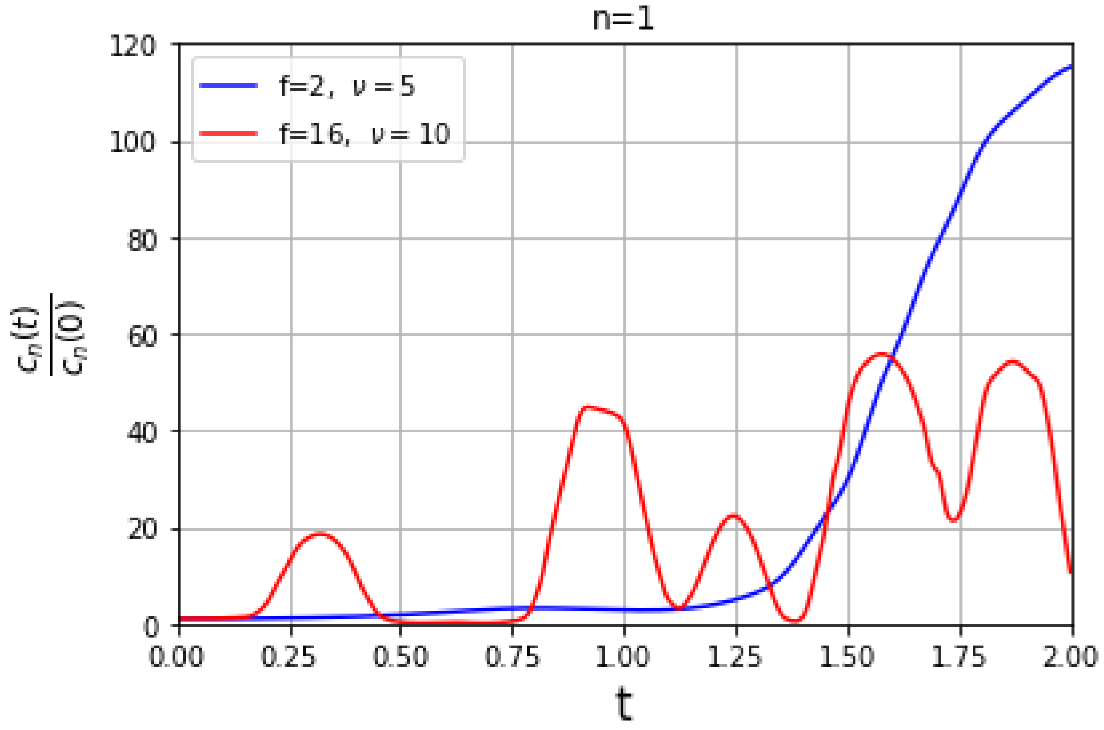
$$C(t) = \frac{1}{2}\cosh^{-1}\frac{|x|^2 + |p|^2}{2}$$

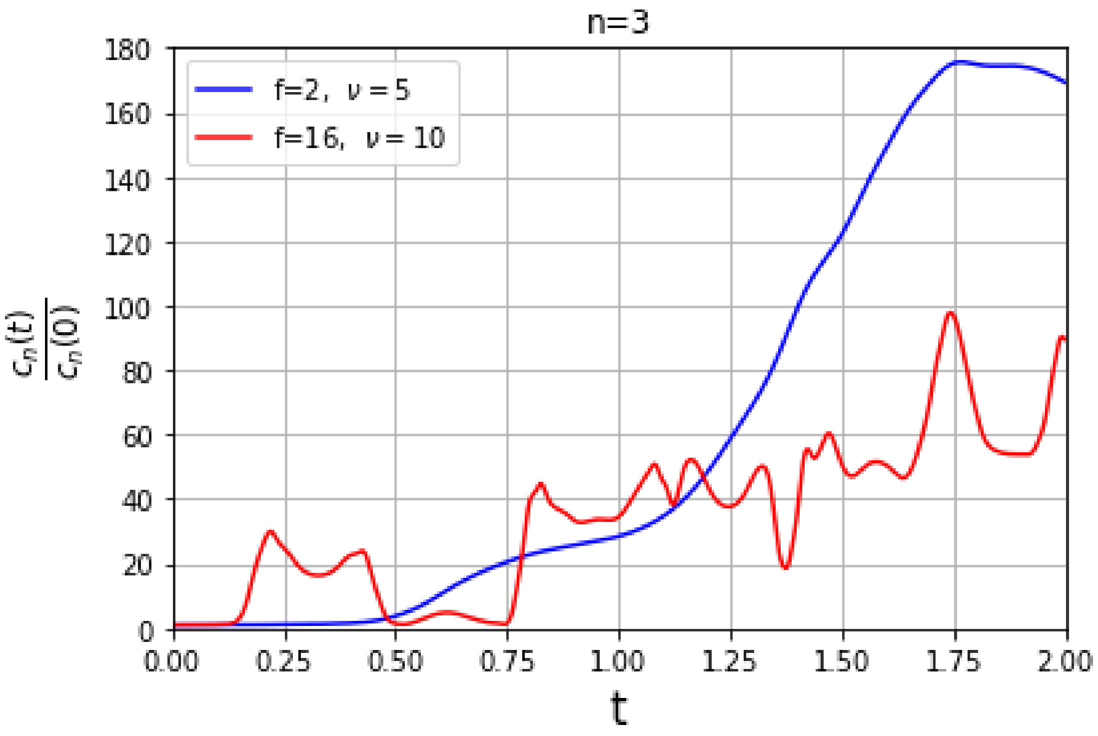
- x , p удовлетворяют системе уравнений
- $\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -\Omega^2 x \end{cases}$
- Сложность возрастает только в том случае, когда неустойчиво решение классической задачи

Численные результаты

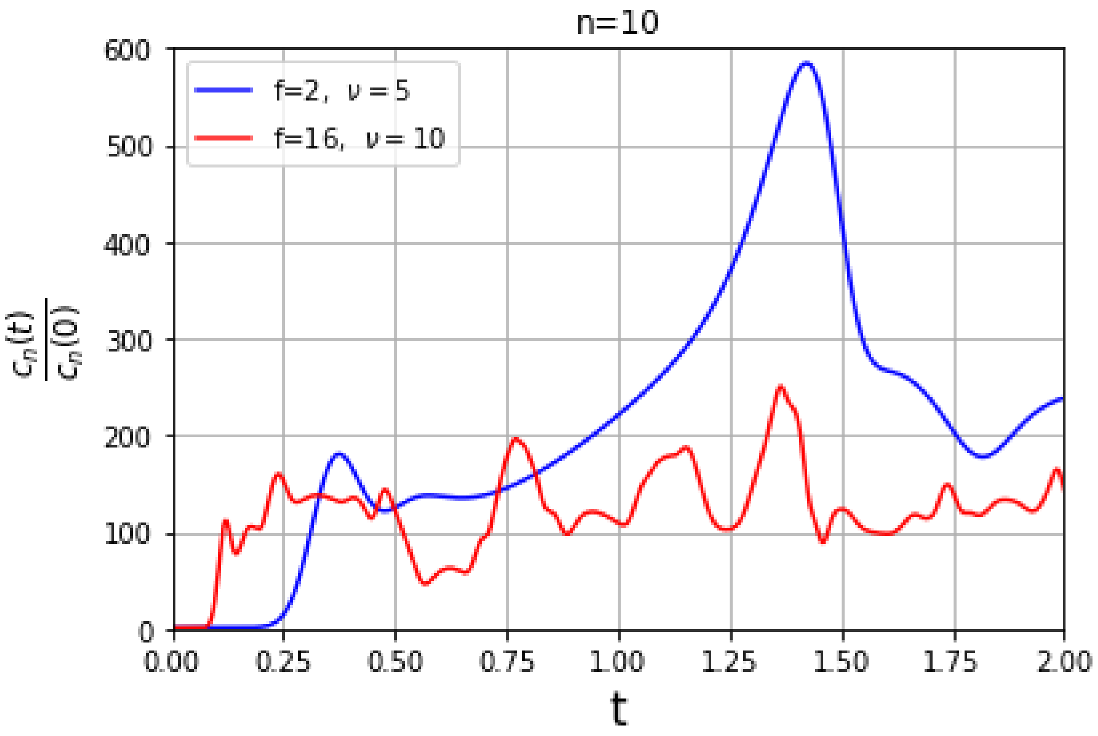
- Для перевёрнутого маятника с зависимостью частоты от времени
$$\omega^2(t) = 1 + \mathrm{f}\sin(\nu t)$$
- При различных значениях f и ν вычислялась величина
$$\mathrm{c}_n(t) = | < n\big|[\hat{x}(t), \hat{p}(0)]^2\big|n >|$$
- В качестве начального состояния $|n >$ выбиралось n-е состояние гармонического осциллятора.
- В классической задаче для устойчивости верхнего положения равновесия необходимо $\mathrm{f} > \sqrt{2}\,\nu$


n=0
f=2, $\nu = 5$
f=16, $\nu = 10$
$\frac{c_n(t)}{c_n(0)}$
t
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
0
10
20
30
40
50
60


n=1
f=2, $\nu = 5$
f=16, $\nu = 10$
$\frac{c_n(t)}{c_n(0)}$
t
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
0
20
40
60
80
100
120



n=3
f=2, $\nu = 5$
f=16, $\nu = 10$
$\frac{c_n(t)}{c_n(0)}$
t
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00



n=10
f=2, $\nu = 5$
f=16, $\nu = 10$
$\frac{c_n(t)}{c_n(0)}$
t
0
100
200
300
400
500
600
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

Заключение

- Была рассмотрена задача об устойчивости верхнего положения математического маятника, установлена связь между неустойчивостью в классической системе и ростом сложности в соответствующей квантовой системе
- Численно исследовано поведение OTOC для квантовой системы, аналогичной тому же маятнику, рассмотрен случай, когда точка подвеса колеблется по гармоническому закону. Результаты сопоставлены с устойчивостью в классическом случае.

Литература

- [1] Арнольд В. И. "Математические методы классической механики” :5-е изд. М.: УРСС, 2003.
- [2] R. A. Jefferson and R. C. Myers, Circuit complexity in quantum field theory, JHEP 10 (2017) 107, [arXiv:1707.08570[hep-th]].
- [3] Tibra Ali, Arpan Bhattacharyya, S. Shajidul Haque, Eugene H. Kim, Nathan Moynihan, Jeff Murugan, "Chaos and Complexity in Quantum Mechanics" JHEP arXiv:1905.13534v2 [hep-th]