Курсовая работа

Конформная гравитация вместо тёмной материи в галактиках

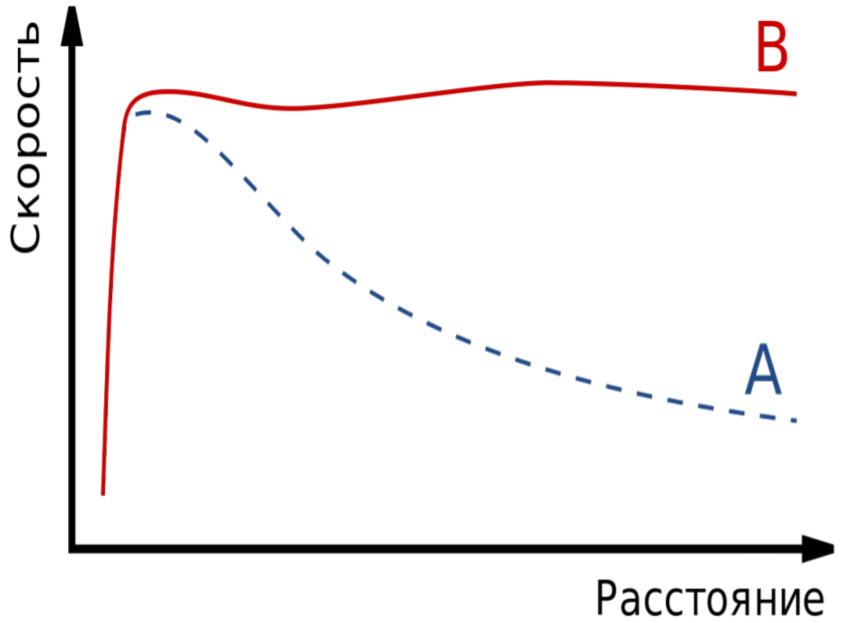
Студент 207 группы
Самодинов Мурат Алибекович

Научный руководитель член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук,
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Введение

Ньютоновская гравитация предсказывает падение величины скорости вращения галактики с расстоянием от центра галактики

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$



Введение

Наиболее популярное объяснение — введение т. н. темной материи – вещества, взаимодействующего с барионным веществом только гравитационно.

Но это не единственное объяснение – существуют альтернативные теории гравитации. Одна из них – конформная гравитация – рассмотрена в данной работе.

Действие

В основе теории заложено действие вида

$$I_W = -\alpha \int d^4x\sqrt{-g}\,C^{\lambda\mu\nu\kappa}C_{\lambda\mu\nu\kappa} \qquad (1)$$

где

$$C_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\lambda\mu\nu\kappa} - \frac{1}{2}\left(g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu}\right) +$$

$$+\frac{1}{6}R\left(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}\right) \qquad (2)$$

Действие

Это действие остается инвариантным при любых локальных растяжениях

$$g^{\mu\nu}(x) \to \Omega^2(x) g^{\mu\nu}(x) \tag{3}$$

Уравнение Баха

Уравнение конформной гравитации

$$4\alpha W_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{4}$$

где

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R^{\alpha}{}_{\alpha})^{;\beta}{}_{;\beta} + R_{\mu\nu}{}^{;\beta}{}_{;\beta} - R_{\mu}{}^{\beta}{}_{;\nu;\beta} - R_{\nu}{}^{\beta}{}_{;\mu\beta} - 2R_{\mu\beta}R_{\nu}{}^{\beta} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} -$$
$$- \frac{1}{3}\left[2g_{\mu\nu}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^{;\beta}{}_{;\beta} - 2(R^{\alpha}{}_{\alpha})_{;\mu;\nu} - 2R^{\alpha}_{\alpha}R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^2\right] \tag{5}$$

Вакуумное решение

Вакуумное сферически-симметричное решение

$$ds^2 = B(r)dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2(d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2) \tag{6}$$

где

$$B(r) = 1 - \frac{\beta(2-3\beta\gamma)}{r} - 3\beta\gamma + \gamma r - kr^2 \tag{7}$$

Материальное решение

$$\frac{3(W^0_0 - W^r_r)}{B(r)} = B'''' + \frac{4B'''}{r} = \frac{(rB)''''}{r} = \nabla^4 B(r) \tag{8}$$

$$f(r) = \frac{3({T^0}_0 - {T^r}_r)}{4\alpha B(r)} \tag{9}$$

Тогда с учетом уравнения Баха (4)

$$\nabla^4 B(r) = f(r) \tag{10}$$

Материальное решение

В случае сферически-симметричного распределения материи решение

$$B(r > R) = -\frac{r}{2}\int_0^R dr' f(r') {r'}^2 - \frac{1}{6r}\int_0^R dr' f(r') {r'}^4 \qquad (11)$$

$$B(r < R) = -\frac{r}{2}\int_0^r dr' f(r') {r'}^2 - \frac{1}{6r}\int_0^r dr' f(r') {r'}^4 \ -\frac{1}{2}\int_r^R dr' f(r') {r'}^3$$
$$-\frac{r^2}{6}\int_r^R dr' f(r') r' \qquad (12)$$

Гравитационный потенциал

В слабых гравитационных полях и при нерелятивистской материи

$$\nabla^4\varphi(r) = \frac{3}{4\alpha}\rho(r) = f(r) \tag{13}$$

Его решение для сферически-симметричной материи

$$\varphi(r) = -\frac{r}{2}\int_0^r dr' f(r') {r'}^2 - \frac{1}{6r}\int_0^r dr' f(r') {r'}^4 \; - \frac{1}{2}\int_r^\infty dr' f(r') {r'}^3$$
$$-\frac{r^2}{6}\int_r^\infty dr' f(r') r' \tag{14}$$

Параметры

Откуда получаем

$$\gamma(r) = -\frac{1}{2}\int_0^r dr' {r'}^2 f(r') \qquad (15)$$

$$\beta(r) = \frac{1}{12}\int_0^r dr' {r'}^4 f(r') \qquad (16)$$

$$k = \frac{1}{6}\int_r^\infty dr' r' f(r') \qquad (17)$$

Кривые вращения

Поверхностная концентрация:

$$\theta(R) = \theta_0 e^{-\frac{R}{R_0}} \tag{18}$$

Потенциал уединенного объекта:

$$\varphi(r) = -\frac{\beta}{r} + \frac{\gamma r}{2} \tag{19}$$

Потенциал всей галактики:

$$V(r,z) = \int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} dz' r' \rho(r', z') \varphi(r) \tag{20}$$

Потенциал

$$
\begin{aligned}
&V_{\gamma}{}^{*}(R) \\
&= \pi\gamma^{*}\theta_0 R R_0^2 \left[I_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) \right] \\
&+ \frac{\pi\gamma^{*}\theta_0 R^2 R_0}{2} \left[I_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) \right] \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Теорема вириала

Теорема вириала:

$$v^2 = RV'(R) \tag{22}$$

Тогда

$$v_{LOC}^2 = \frac{N\beta^* R^2}{2R_0^3}\left[I_0\left(\frac{R}{2R_0}\right)K_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_0}\right)K_1\left(\frac{R}{2R_0}\right)\right]$$

$$+ \frac{N\gamma^* R^2}{2R_0} I_1\left(\frac{R}{2R_0}\right)K_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) \tag{23}$$

где $\beta^* = \left(\frac{M_\odot}{M}\right)\beta$; $\gamma^* = \left(\frac{M_\odot}{M}\right)\gamma$.

Внешние факторы

На вращение галактик будет оказывать влияние не только сама галактика, но и внешние факторы. Внешними факторами являются глобальный космологический фон и флуктуации относительно этого фона.

В результате получаем зависимость скорости вращения галактик от радиуса

$$v_{TOT}^2 = \frac{N\beta^*}{r} + \frac{N\gamma^* r}{2} + \frac{\gamma_0 r}{2} - kr^2 \tag{24}$$

Значения констант

$$\beta^* = 1{,}48 \times 10^5 \text{ см}$$

$$\gamma^* = 5{,}42 \times 10^{-41} \text{см}^{-1}$$

$$\gamma_0 = 3{,}06 \times 10^{-30} \text{см}^{-1}$$

$$k = 9{,}54 \times 10^{-54} \text{см}^{-2}$$

Шаровые скопления

Шаровое звёздное скопление — звёздное скопление, содержащее большое число звёзд, тесно связанное гравитацией и обращающееся вокруг галактического центра в качестве спутника.

Для получения потенциала шаровых скоплений будем использовать модель Пламмера – закон распределения концентрации, впервые примененный им при изучении шаровых скоплений:

$$\rho(r) = \frac{3M_0}{4\pi a^3 M_\odot}\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \qquad (25)$$

где M_0 – полная масса звездного скопления, $a \approx 1{,}56 r_я$ – радиус Пламмера, $r_я$ – радиус ядра скопления - расстояние от центра, на котором видимая светимость скопления падает в два раза.

Уравнения Джинса

Для характеристики шаровых скоплений используют такое понятие как дисперсия скорости. Будем использовать уравнения Джинса, которые вытекают из уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v_i - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \qquad (26)$$

где f – функция распределения, φ – гравитационный потенциал, v_i – скорость.

Уравнения Джинса

Умножив это уравнение на v_j и проинтегрировав, учитывая, что плотность распределения звезд в пространстве связана с функцией распределения соотношением

$$\rho = \int f(x, v) d^3 v \tag{27}$$

получаем

$$\rho \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial t} + \rho \overline{v_i} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \tag{28}$$

Уравнения Джинса

Используя определение дисперсии скорости

$$\sigma_{ij}{}^2 = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \tag{29}$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \frac{\partial \left(\rho \sigma_{ij}{}^2\right)}{\partial x_i} \tag{30}$$

Это и есть искомое уравнение Джинса, которое в сферических координатах записывается в виде:

$$\frac{\partial (\rho \sigma^2)}{\partial r} + \frac{2\rho(r)\beta\sigma^2(r)}{r} = -\rho(r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \tag{31}$$

где $\beta \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{\sigma_\theta^2 - \sigma_\phi^2}{2\sigma_r^2}$ – параметр анизотропии.

Уравнения Джинса

Считая шаровые скопления симметричными, изотропными системами, мы можем положить параметр анизотропии равным нулю.

Тогда

$$\frac{\partial(\rho\sigma^2)}{\partial r} = -\rho(r)\frac{\partial\varphi}{\partial r} \tag{32}$$

Откуда

$$\sigma^2 = \frac{1}{\rho}\int_r^\infty \rho(r)\frac{\partial\varphi}{\partial r}dr \tag{33}$$

Карликовые галактики

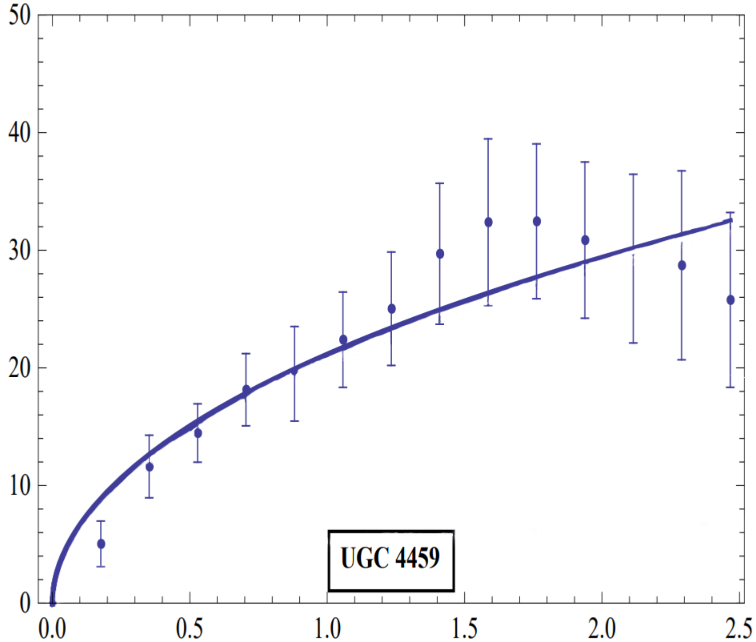


Рис. 1. Галактика UGC 4459

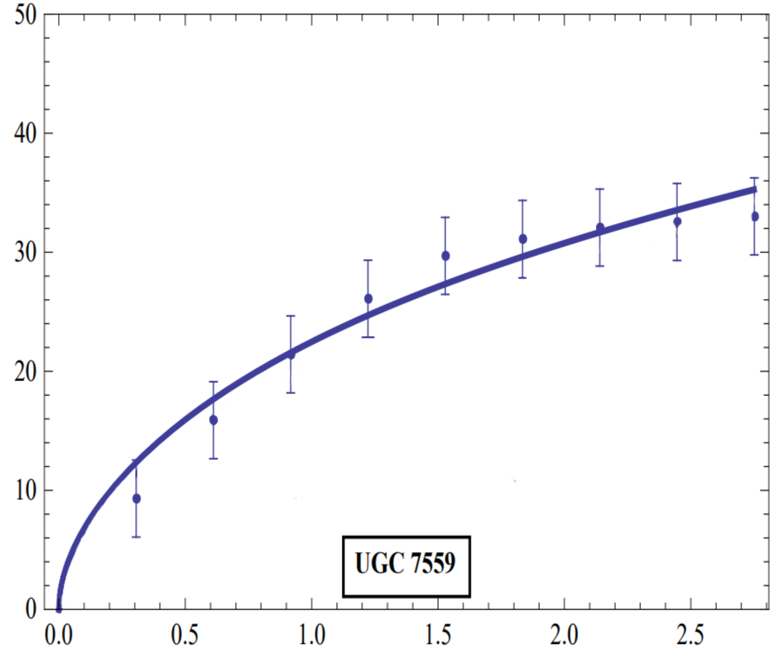


Рис. 2. Галактика UGC 7559

Карликовые галактики

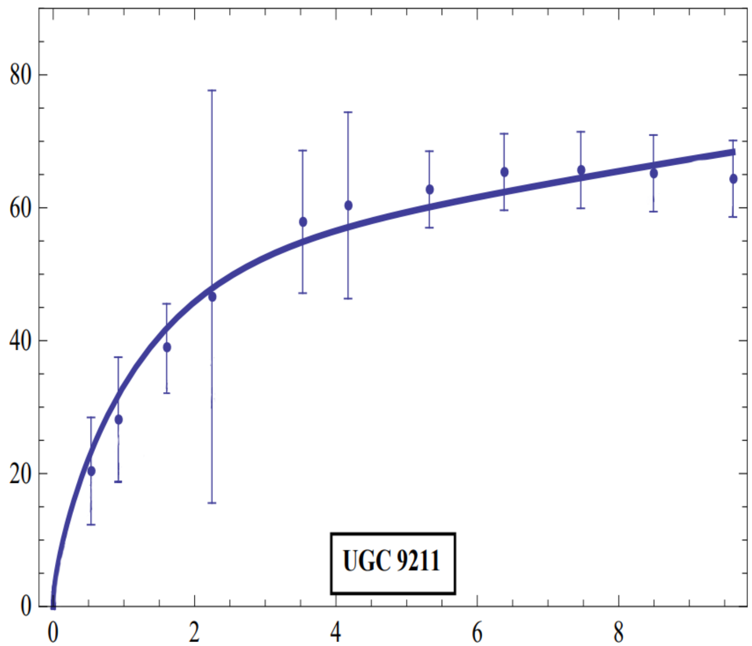


Рис. 3. Галактика UGC 9211

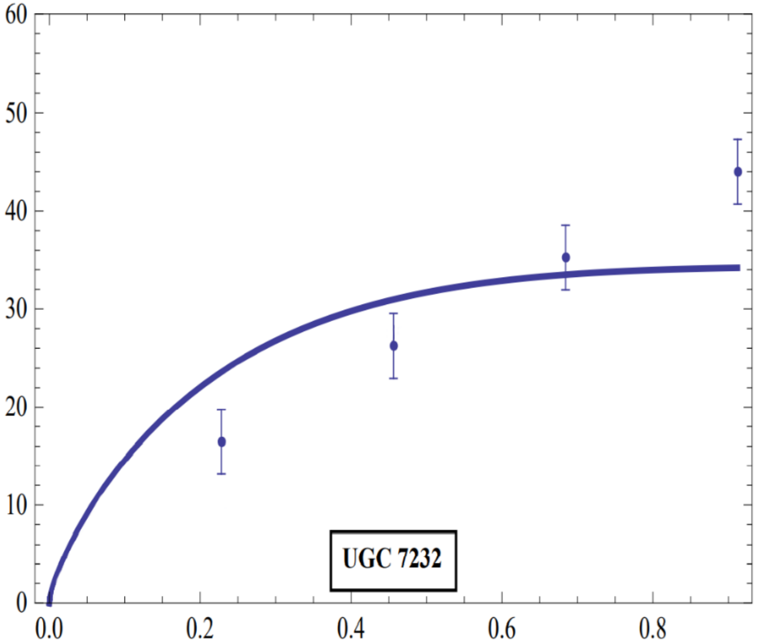


Рис. 4. Галактика UGC 7232

Карликовые галактики

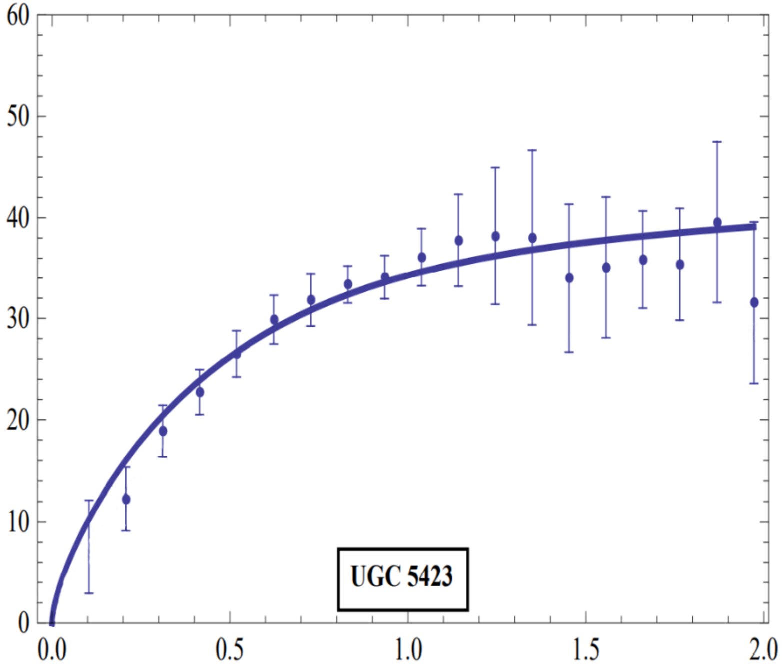


Рис. 5. Галактика UGC 5423

Шаровые скопления

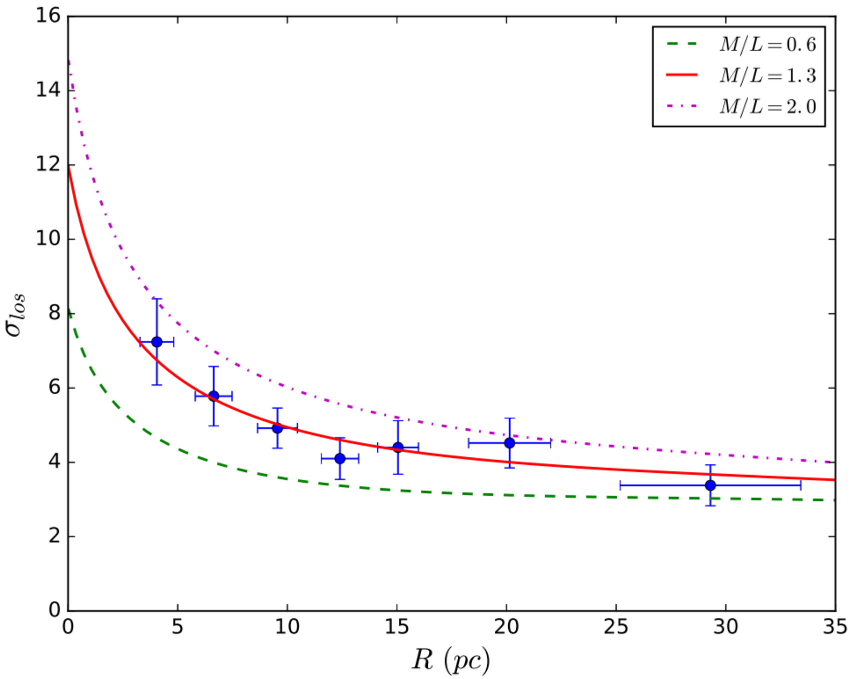


Рис. 6. Галактика NGC 1851

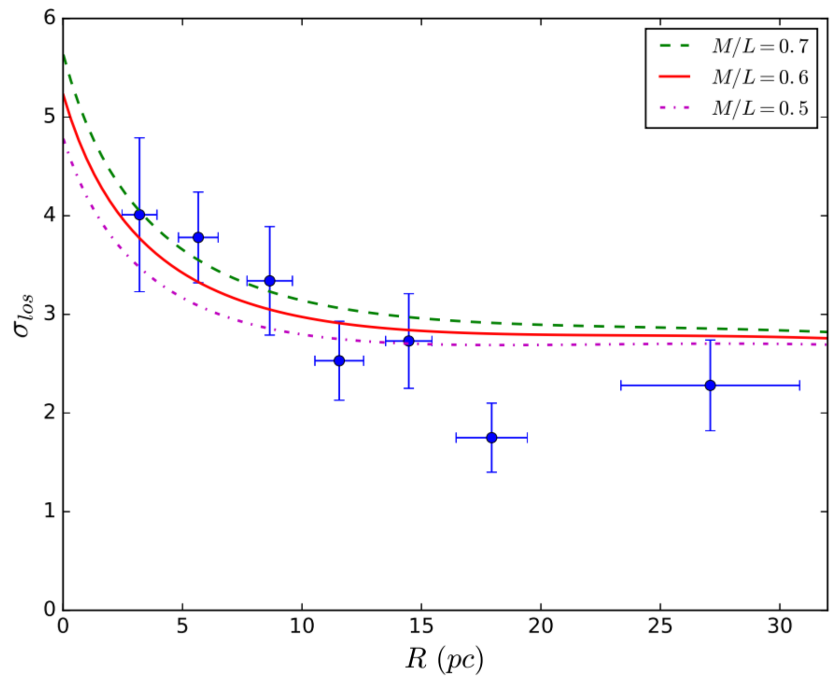


Рис. 7. Галактика NGC 1904

Шаровые скопления

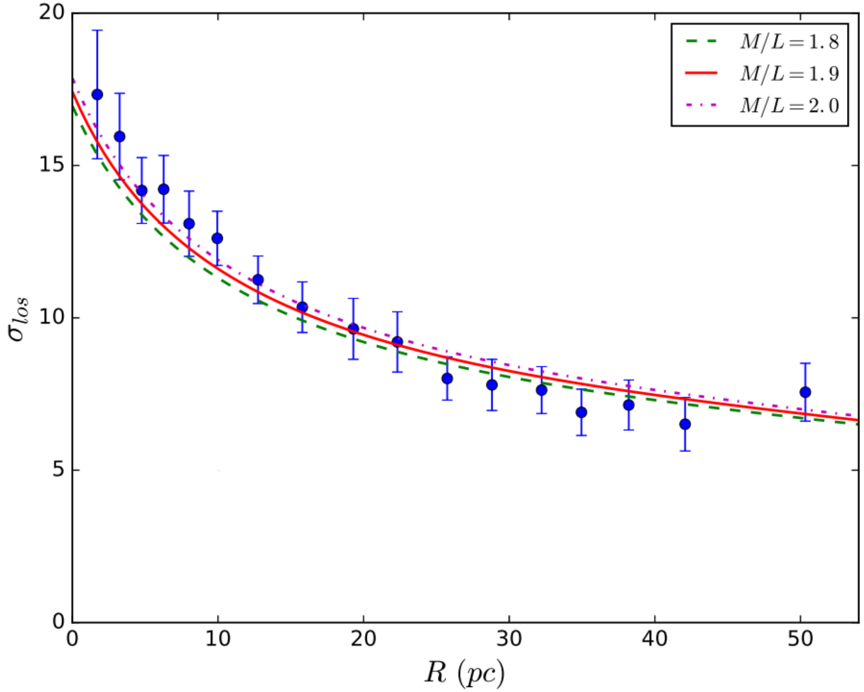


Рис. 8. Галактика NGC 5139

Заключение

В данной работе изучалась альтернативная ОТО теория – теория конформной гравитации. Были построены кривые вращения для нескольких карликовых галактик и зависимости дисперсии скоростей от радиуса для шаровых скоплений. Как видно из построенных зависимостей, конформная теория довольно хорошо описывается наблюдаемые закономерности без введения темной материи.