

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет  
Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа

# Конформная гравитация вместо тёмной материи в галактиках

Студент 207 группы  
Самодинов Мурат Алибекович

Научный руководитель  
член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук,  
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва, 2021

# Содержание

1. Введение.....	3
2. Общая теория относительности .....	3
3. Конформная гравитация.....	4
3.1. Вакуумное решение.....	4
3.2. Материальное решение .....	7
3.3. Гравитационный потенциал.....	9
4. Кривые вращения галактик.....	10
4.1. Классическое описание .....	10
4.2. Описание в конформной гравитации.....	12
5. Шаровые скопления.....	15
6. Результаты.....	18
7. Заключение.....	22
Список литературы .....	23

# 1. Введение

Наблюдения за движением звезд в галактиках показывают, что полученные зависимости скоростей вращения галактик от расстояния не согласуются с предсказаниями ньютоновско-эйнштейновской теорией гравитации. В последней скорости вращения должны уменьшаться как  $\frac{1}{\sqrt{R}}$ ,  $R$  – расстояние до центра галактики. Наблюдения же показывают, что при определенном расстоянии кривые вращения остаются постоянными.

Наблюдения показывают, что в галактиках не хватает видимого барионного вещества, для создания необходимого потенциала. Наиболее популярное объяснение — введение т. н. темной материи – вещества, взаимодействующего с барионным веществом только гравитационно.

Но это не единственное объяснение – существуют альтернативные теории гравитации. Одна из них – конформная гравитация – рассмотрена в данной работе.

## 2. Общая теория относительности

Главным уравнением ОТО является уравнение Эйнштейна, полученное им из принципа наименьшего действия. Действие Эйнштейна-Гилберта:

$$I_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (1)$$

где  $R = R^\mu_\mu$  – свертка тензора Риччи.

Из этого действия получается уравнение Эйнштейна для гравитационного поля:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G T^{\mu\nu} \quad (2)$$

где  $T^{\mu\nu}$  – тензор энергии-импульса материи, которая определяет гравитационное поле.

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (3)$$

Шварцшильдом было получено следующее статическое сферически-симметрическое решение этого уравнения в вакууме, т. е. в области пространства, где  $T^{\mu\nu} = 0$ , а распределение материи – сферически-симметричное:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} dr^2 - r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (4)$$

В слабых гравитационных полях и при нерелятивистской материи  $g_{00} = 1 + 2\varphi$ , где  $\varphi$  – гравитационный потенциал. В этом случае уравнения поля дают:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность распределения материи. Это классическое уравнение Пуассона.

## 3. Конформная гравитация

### 3.1. Вакуумное решение

Действие Эйнштейна-Гилберта выбрано так, чтобы уравнения содержали в себе производные метрического тензора не выше второго порядка. Но это не является необходимым условием, то есть действие, вообще говоря, может быть выбрано другим образом.

В основу теории конформной гравитации закладывается принцип локальной конформной инвариантности (по аналогии с локально калибровочным принципом инвариантности). Этот принцип требует, чтобы действие оставалось инвариантным при любых локальных растяжениях  $g^{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x)g^{\mu\nu}(x)$ .

Этому условию удовлетворяет действие, основанное на тензоре Вейля

$$C_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\lambda\mu\nu\kappa} - \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu}) + \frac{1}{6}R(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) \quad (6)$$

который остается инвариантным при конформном преобразовании  $g^{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x)g^{\mu\nu}(x)$ .

Таким образом действие будет следующим [1]

$$I_W = -\alpha \int d^4x \sqrt{-g} C^{\lambda\mu\nu\kappa} C_{\lambda\mu\nu\kappa} = -2\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\kappa} R^{\mu\kappa} - \frac{1}{3} (R^\alpha_\alpha)^2 \right] \quad (7)$$

где  $\alpha$  – безразмерный коэффициент.

Действие (7) приводит к следующему уравнению гравитационного поля:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\delta I_W}{\delta g_{\alpha\beta}} = -2\alpha W_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} T_{\mu\nu}$$

$$\text{где } W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R^\alpha_\alpha)^{;\beta}_{;\beta} + R_{\mu\nu}^{;\beta}_{;\beta} - R_\mu^{;\beta}_{;\nu;\beta} - R_\nu^{;\beta}_{;\mu;\beta} - 2R_{\mu\beta} R_\nu^{;\beta} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \left[ 2g_{\mu\nu} (R^\alpha_\alpha)^{;\beta}_{;\beta} - 2(R^\alpha_\alpha)_{;\mu;\nu} - 2R^\alpha_\alpha R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R^\alpha_\alpha)^2 \right] \quad (8)$$

$T_{\mu\nu}$  – обычный тензор энергии-импульса.

Таким образом, получаем уравнение конформной гравитации (уравнение Баха):

$$4\alpha W_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (9)$$

Из уравнения (8) видно, что при обращении  $R_{\mu\nu}$  в нуль тензор  $W_{\mu\nu}$  также обращается в нуль. Поэтому любое вакуумное решение уравнения Эйнштейна является также решением уравнения Баха. Но  $W_{\mu\nu}$  может обращаться в нуль и при ненулевом тензоре Риччи. Это приводит к тому, что существует статическое сферически-симметричное вакуумное решение гравитационного поля, отличное от решения Шварцшильда.

Как показано в [1] общий, статический, сферически-симметричный элемент

$$ds^2 = b(\rho)dt^2 - a(\rho)d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (10)$$

при преобразовании координат

$$\rho = p(r), \quad B(r) = \frac{r^2 b(r)}{p^2(r)}, \quad A(r) = \frac{r^2 a(r) p'^2(r)}{p^2(r)}$$

может быть переписан в виде

$$ds^2 = \frac{p^2(r)}{r^2} [B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)] \quad (11)$$

где функция  $p(r)$  выбирается произвольно.

Выбирая  $p(r)$  в соответствии с

$$-\frac{1}{p(r)} = \int \frac{dr}{r^2 [a(r)b(r)]^{1/2}}$$

получим

$$ds^2 = \frac{p^2(r)}{r^2} \left[ B(r)dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right] \quad (12)$$

Поскольку теория Вейля сама по себе конформна, тензор  $W_{\mu\nu}(\rho)$ , связанный с уравнением (9) преобразуется как  $W_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^{-2}(x)W_{\mu\nu}(x)$ . То есть тензор  $W_{\mu\nu}(\rho)$  конформен тензору  $W_{\mu\nu}(r)$ , связанному с линейным элементом

$$ds^2 = B(r)dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (13)$$

Таким образом, решение ищется в виде (13).

Все компоненты  $W_{0r}$  равны нулю. При этом оставшиеся четыре компоненты  $W_{\mu\nu}$  связаны между собой тождеством Бьянки и условием бесследности тензора, поэтому при решении используется одна независимая координата  $W_{rr}$ .

Проделав соответствующие вычисления [1], получим решение для симметричного источника радиуса  $R$

$$B(r > R) = 1 - \frac{\beta(2-3\beta\gamma)}{r} - 3\beta\gamma + \gamma r - kr^2 \quad (14)$$

## 3.2. Материальное решение

Для нахождения не вакуумного сферически-симметричного решения рассмотрим две компоненты  $W^{\mu\nu}$  для элемента (13)

$$\frac{W^{rr}}{B(r)} = \frac{B'B'''}{6} - \frac{B''^2}{12} - \frac{BB''' - B'B''}{3r} - \frac{BB'' + B'^2}{3r^2} + \frac{2BB'}{3r^3} - \frac{B^2}{3r^4} + \frac{1}{3r^4} \quad (15)$$

$$W^{00} = -\frac{B''''}{3} + \frac{B''^2}{12B} - \frac{B'''B'}{6B} - \frac{B'''}{r} - \frac{B''B'}{3rB} + \frac{B''}{3r^2} + \frac{B'^2}{3r^2B} - \frac{2B'}{3r^3} - \frac{1}{3r^4B} + \frac{B}{3r^4} \quad (16)$$

здесь  $B'$  - производная по координате.

Объединяя (15) и (16), получим [2]

$$\frac{3(W_0^0 - W_r^r)}{B(r)} = B'''' + \frac{4B'''}{r} = \frac{(rB)''''}{r} = \nabla^4 B(r) \quad (17)$$

В случае статического, сферически-симметричного источника определим удобную функцию распределения материи

$$f(r) = \frac{3(T_0^0 - T_r^r)}{4\alpha B(r)} \quad (18)$$

Тогда с учетом уравнения Баха (9)

$$\nabla^4 B(r) = f(r) \quad (19)$$

Для жидкости в покое тензор энергии-импульса сводится к диагональной матрице  $diag(\rho c^2, p, p, p)$ , где  $\rho$  – есть плотность массы, а  $p$  – гидростатическое давление.

В простом случае пылевидной материи  $T_\mu^\mu = \rho$ .

Откуда получаем уравнение Пуассона 4-го порядка

$$\nabla^4 B(r) = \frac{3}{4\alpha B(r)} \rho(r) \quad (20)$$

Для решения данного уравнения будем использовать метод функции Грина. Для оператора  $\nabla^4$ , при отсутствии граничных условий, она имеет вид [2]:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{8\pi} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (21)$$

Считая граничную поверхность бесконечно большой, получаем решение уравнения (21):

$$B(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int f(r') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| d^3 \mathbf{r}' \quad (22)$$

В случае сферически-симметричного распределения материи можно переписать в виде

$$B(r > R) = -\frac{r}{2} \int_0^R dr' f(r') r'^2 - \frac{1}{6r} \int_0^R dr' f(r') r'^4 \quad (23)$$

$$B(r < R) = -\frac{r}{2} \int_0^r dr' f(r') r'^2 - \frac{1}{6r} \int_0^r dr' f(r') r'^4 - \frac{1}{2} \int_r^R dr' f(r') r'^3 - \frac{r^2}{6} \int_r^R dr' f(r') r' \quad (24)$$

Решения (14), (24) и (25) совпадают при  $r = R$ .

Что позволяет определить

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= -\frac{1}{2} \int_0^r dr' r'^2 f(r') \\ \beta(r) &= \frac{1}{12} \int_0^r dr' r'^4 f(r') \end{aligned} \quad (25)$$

$\nabla^4(r^2)$  равно нулю для всех  $r$ , где  $T_{\mu\nu}(r) = 0$ . Поэтому член  $kr^2$  является тривиальным вакуумным решением и не связан с источником материи.



### 3.3. Гравитационный потенциал

В слабых гравитационных полях и при нерелятивистской материи  $B(r) = 1 + 2\varphi$ . В этом случае  $\varphi \ll 1$ , т. е.  $B(r) \approx 1$ .

Тогда уравнение (20) примет вид

$$\nabla^4 \varphi(r) = \frac{3}{4\alpha} \rho(r) = f(r) \quad (26)$$

Его решение аналогично решению уравнения (20)

$$\begin{aligned} \varphi(r) = & -\frac{r}{2} \int_0^r dr' f(r') r'^2 - \frac{1}{6r} \int_0^r dr' f(r') r'^4 \\ & - \frac{1}{2} \int_r^\infty dr' f(r') r'^3 - \frac{r^2}{6} \int_r^\infty dr' f(r') r' \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, видно, что хотя уравнения Пуассона 2-го порядка достаточно для генерации потенциала  $1/r$ , его можно получить и другим способом.

Из (24) видно, что коэффициент перед ньютоновским потенциалом определяет не массу объекта, т. к. при подстановке функции распределения материи для точечного объекта  $f(r) = mG \frac{\delta r}{r^2}$  возникают проблемы, что означает, что для получения ньютоновского потенциала источник не может быть точечным.

Мангейм предлагает следующее распределение материи [2]

$$f(r) = -2\gamma(r) \frac{\delta(r)}{r^2} - \frac{3\beta(2 - 3\beta\gamma)}{2} \left[ \nabla^2 - \frac{r^2}{12} \nabla^4 \right] \left[ \frac{\delta(r)}{r^2} \right] \quad (28)$$

Подставив эту функцию в выражение для потенциала, получим

$$\varphi(r) = -\frac{\beta}{r} + \frac{\gamma r}{2} \quad (29)$$

## 4. Кривые вращения галактик

Проблема с кривыми вращения, заключается в том, что в соответствии с классическими представлениями скорости вращения должны зависеть от расстояния как  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ , то есть скорости должны уменьшаться с увеличением расстояния. Согласно наблюдениям такого не происходит – скорости после определенного расстояния остаются постоянными.

### 4.1. Классическое описание

В классической теории потенциал уединенного объекта равен

$$V(r) = -\frac{GM}{r} \quad (30)$$

Найдем потенциал всей галактики.

Предположим, что гравитационный потенциал пропорционален светимости звездной поверхности спиральной галактики.

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-\frac{R}{R_0}} \quad (31)$$

где  $\Sigma_0$  – светимость в центре галактики.

Тогда полная светимость галактики будет равна интегралу

$$L = 2\pi \int_0^\infty R \Sigma(R) dR = 2\pi \int_0^\infty R \Sigma_0 e^{-\frac{R}{R_0}} dR = 2\pi \Sigma_0 R_0^2 \quad (32)$$

Для упрощения задачи будем рассматривать галактики со звездами массы Солнца. Определим соотношение масса-светимость  $\gamma = \frac{M}{L}$ . Тогда  $M = \gamma L = NM_\odot$ , где  $M_\odot$  – масса Солнца,  $N$  – число звезд в галактике с такой массой.

Предполагая, что поверхностная концентрация имеет такой же закон, как и светимость, получаем

$$\theta(R) = \theta_0 e^{-\frac{R}{R_0}} \quad (33)$$

Поверхностный интеграл по концентрации дает

$$N = 2\pi\theta_0 R_0^2 \quad (34)$$

Потенциал Солнца в ОТО равен  $V(r) = -\frac{\beta}{r}$ , где  $\beta = GM_\odot$ . Проинтегрируем этот потенциал по диску спиральной галактики со звездами солнечной массы

$$V_\beta(R, z) = -GM_\odot \int_0^\infty dR' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^\infty dz' \frac{R' \rho(R', z')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \quad (35)$$

где  $\rho(R, z) = \theta(R)\delta(z)$  – объемная концентрация в полярных координатах.

Используя соотношение [3]

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} dk J_m(kR) J_m(kR') e^{-im(\phi - \phi') - k|z - z'|} \quad (36)$$

где  $J_m$  – функция Бесселя с целым аргументом

Перепишем (32) в виде

$$-2\pi GM_\odot \int_0^\infty dR' \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty dz' R' \rho(R', z') J_0(kR) J_0(kR') e^{-k|z - z'|} \quad (37)$$

В плоскости  $z = 0$  можно написать

$$V(R) = -2\pi GM_\odot \int_0^\infty dk \int_0^\infty dR' R' \theta(R') J_0(kR) J_0(kR') \quad (38)$$

Используя следующие тождества

$$\int_0^\infty R J_0(kR) e^{-\alpha R} dR = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + k^2)^{3/2}} \quad (39)$$

$$\int_0^\infty \frac{J_0(kR)}{(\alpha^2 + k^2)^{3/2}} dk = \frac{R}{2\alpha} \left[ I_0\left(\frac{R\alpha}{2}\right) K_1\left(\frac{R\alpha}{2}\right) - I_1\left(\frac{R\alpha}{2}\right) K_0\left(\frac{R\alpha}{2}\right) \right] \quad (40)$$

(здесь  $I_m$  – функция Инфельда, а  $K_m$  – функция Макдональда, являющиеся модифицированными функциями Бесселя)

и выбирая  $\alpha = \frac{1}{R_0}$  получим

$$V(R) = -\pi G M_{\odot} \theta_0 R \left[ I_0 \left( \frac{R}{2R_0} \right) K_1 \left( \frac{R}{2R_0} \right) - I_1 \left( \frac{R}{2R_0} \right) K_0 \left( \frac{R}{2R_0} \right) \right] \quad (41)$$

Далее, используя следующие соотношения

$$\begin{aligned} I'_0(x) &= I_1(x), I'_1(x) = I_0(x) - \frac{I_1(x)}{x}, K'_0(x) = -K_1(x), \\ K'_1(x) &= -K_0(x) - \frac{K_1(x)}{x} \end{aligned} \quad (42)$$

и дифференцируя (38) получаем

$$V'(R) = \frac{NGM_{\odot}R}{2R_0^3} \left[ I_0 \left( \frac{R}{2R_0} \right) K_0 \left( \frac{R}{2R_0} \right) - I_1 \left( \frac{R}{2R_0} \right) K_1 \left( \frac{R}{2R_0} \right) \right] \quad (43)$$

Для пробной частицы, движущейся по круговой орбите вокруг массивного объекта (т. к. движение финитное), можем использовать теорему вириала

$$v^2 = RV'(R) \quad (44)$$

Откуда получаем зависимость скорости вращения от расстояния

$$v^2 = \frac{NGM_{\odot}R^2}{2R_0^3} \left[ I_0 \left( \frac{R}{2R_0} \right) K_0 \left( \frac{R}{2R_0} \right) - I_1 \left( \frac{R}{2R_0} \right) K_1 \left( \frac{R}{2R_0} \right) \right] \quad (45)$$

## 4.2. Описание в конформной гравитации

Как было показано ранее потенциал уединенного объекта в конформной гравитации имеет вид  $V^*(R) = -\frac{\beta^*}{R} + \frac{\gamma^* R}{2}$ .

где мы нормировали

$$\beta^* = \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) \beta(r); \quad \gamma^* = \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) \gamma(r)$$

Применим аналогичный метод для нахождения потенциала всей галактики.

## Линейный потенциал

$$\begin{aligned}
 V_Y^*(R, z) &= \frac{\gamma^*}{2} \int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty dz' R' \rho(R', z') |\vec{R} - \vec{R}'| \\
 &= \pi \gamma^* \int_0^\infty dk \int_0^\infty dR' \int_{-\infty}^\infty dz' R' \rho(R', z') [(R^2 + R'^2 \\
 &\quad - (z - z')^2) J_0(kR) J_0(kR') - 2RR' J_1(kR) J_1(kR')] e^{-k|z_1 - z_2|} \quad (46)
 \end{aligned}$$

где использовалось, что  $|\vec{R} - \vec{R}'| = \frac{(R-R')^2}{|\vec{R} - \vec{R}'|}$ .

В плоскости  $z = 0$

$$\begin{aligned}
 V_Y^*(R) &= \pi \gamma^* \int_0^\infty dk \int_0^\infty dR' \int_{-\infty}^\infty dz' R' \theta(R') [R^2 + R'^2 \\
 &\quad - 2RR' J_1(kR) J_1(kR')] \quad (47)
 \end{aligned}$$

Далее, используя соотношения (36), (37) и [3]

$$\int_0^\infty dR' R'^2 J_1(kR') e^{-\alpha R} = \frac{3\alpha k}{(\alpha^2 + k^2)^{5/2}} \quad (48)$$

Получаем

$$\begin{aligned}
 V_Y^*(R) &= \pi \gamma^* \theta_0 R R_0^2 \left[ I_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) \right] \\
 &\quad + \frac{\pi \gamma^* \theta_0 R^2 R_0}{2} \left[ I_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) \right. \\
 &\quad \left. - I_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) \right] \quad (49)
 \end{aligned}$$

Дифференцируя и используя соотношения (39) получаем

$$R V_Y'(R) = \frac{N \gamma^* R^2}{2R_0} I_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) \quad (50)$$

В результате, объединяя (42) и (47) находим выражение зависимости скорости вращения от расстояния

$$\begin{aligned}
 v_{Loc}^2 &= \frac{N \beta^* R^2}{2R_0^3} \left[ I_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) \right] + \\
 &\quad + \frac{N \gamma^* R^2}{2R_0} I_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) \quad (51)
 \end{aligned}$$

В пределе при  $R \gg R_0$

$$v_{Loc}^2 \rightarrow \frac{N\beta^*}{R} + \frac{N\gamma^*R}{2} \quad (52)$$

Основное отличие ньютоновской гравитации от конформной состоит в следующем. В классической теории гравитационное влияние на объект оказывает только материя внутри объема, заданного сферой радиуса  $r$ . Остальная же Вселенная не вносит своего вклада. Но это поведение справедливо только для сферически симметричных потенциалов  $1/r$ , поэтому оно больше не сохраняется в конформной гравитации.

Поэтому на вращение галактик будет оказывать влияние не только сама галактика, но и внешние факторы. Внешними факторами являются глобальный космологический фон и флуктуации относительно этого фона (в виде скоплений галактик и сверхскоплений).

Для фоновой части Вселенной обычно предполагают метрику Робертсона-Уокера (RW)

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(\tau)}{\left(1 + \frac{K\rho^2}{4}\right)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2) \quad (53)$$

Движение астрономических объектов, обусловленное расширением Вселенной, описывается координатами, задаваемыми уравнением (53). Но галактические скорости вращения измеряются в системе координат, привязанной к центру галактики, то есть галактика находится в состоянии покоя. Поэтому необходимо найти преобразование между этими двумя системами координат.

$$r = \frac{\rho}{\left(1 - \frac{\gamma_0 r}{4}\right)^2}; \quad \tau = \int R(t) dt \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \Omega^2(\tau, \rho) & \left[ d\tau^2 - \frac{R^2(\tau)}{\left[1 - \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{16}\right]^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2) \right] \\ & = \frac{\left(\frac{1 + \frac{\gamma_0 r}{4}}{1 - \frac{\gamma_0 r}{4}}\right)^2}{R^2(\tau)} \left[ d\tau^2 - \frac{R^2(\tau)}{\left[1 - \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{16}\right]^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2) \right] \end{aligned}$$

$$= (1 + \gamma_0 r) dt^2 - \frac{dr^2}{(1 + \gamma_0 r)} - r^2 d\Omega^2 \quad (55)$$

Таким образом, после конформного преобразования метрика Робертсона-Уокера, записанная в статической системе координат, эквивалентна статическому линейному элементу с универсальным линейным членом  $\gamma_0 r$ .

Следовательно, по аналогии с расчетом для линейного члена уравнения (30) получаем дополнительный вклад в уравнение (52). И в пределе при  $R \gg R_0$

$$v^2 \rightarrow \frac{N\beta^*}{R} + \frac{N\gamma^* R}{2} + \frac{\gamma_0 R}{2} \quad (56)$$

Как видно из уравнения (27) для потенциала, есть еще один фактор, который [3] отвечает за флуктуации относительно глобального фона.

Из уравнения (27) находим, что коэффициент, стоящий перед  $-r^2$  равен

$$k = \frac{1}{6} \int_r^\infty dr' r' f(r')$$

В результате получаем зависимость скорости вращения галактик от радиуса [3]

$$v_{TOT}^2 = \frac{N\beta^*}{r} + \frac{N\gamma^* r}{2} + \frac{\gamma_0 r}{2} - kr^2 \quad (57)$$

Значения введенных констант следующие [3]

$$\beta^* = 1,48 \times 10^5 \text{ см}; \gamma^* = 5,42 \times 10^{-41} \text{ см}^{-1}; \gamma_0 = 3,06 \times 10^{-30} \text{ см}^{-1}; \\ k = 9,54 \times 10^{-54} \text{ см}^{-2}.$$

## 5. Шаровые скопления

Шаровое звёздное скопление — звёздное скопление, содержащее большое число звёзд, тесно связанное гравитацией и обращающееся вокруг галактического центра в качестве спутника. В отличие от рассеянных звёздных скоплений, которые располагаются в галактическом диске,

шаровые находятся в гало; они значительно старше, содержат гораздо больше звёзд, обладают симметричной сферической формой и характеризуются увеличением концентрации звёзд к центру скопления.

Диаметры шаровых скоплений составляют 20–60 пк, массы —  $10^4$ – $10^6$  солнечных.

Для получения потенциала шаровых скоплений будем использовать модель Пламмера – закон распределения концентрации, впервые примененный им при изучении шаровых скоплений:

$$\rho(r) = \frac{3M_0}{4\pi a^3 M_\odot} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \quad (58)$$

где  $M_0$  – полная масса звездного скопления,  $a \approx 1,56r_\text{я}$  – радиус Пламмера,  $r_\text{я}$  – радиус ядра скопления - расстояние от центра, на котором видимая светимость скопления падает в два раза.

Тогда общий потенциал всех звезд равен:

$$V(r) = -\beta \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \int_0^\infty dr' r'^2 \sin(\theta) \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \gamma \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \int_0^\infty dr' r'^2 \sin(\theta) \rho(r') |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (59)$$

$$V(r) = -\frac{4\pi G M_\odot}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' - 4\pi G M_\odot \int_r^\infty \rho(r') r' dr' + \frac{2\pi\gamma}{r} \int_0^r \rho(r') (3r^2 r'^2 + r'^4) dr' + 2\pi\gamma \int_r^\infty \rho(r') (3r'^3 + r'^2) dr' \quad (60)$$

Для характеристики шаровых скоплений используют такое понятие как дисперсия скорости. Будем использовать уравнения Джинса, которые вытекают из бесстолкновительного уравнения Больцмана [4]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v_i - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \quad (61)$$

где  $f$  – функция распределения,  $\varphi$  – гравитационный потенциал,  $v_i$  – скорость.

Умножив это уравнение на  $v_j$  и проинтегрировав, учитывая, что плотность распределения звезд в пространстве связана с функцией распределения соотношением



$$\rho = \int f(x, v) d^3 v \quad (62)$$

получаем

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (63)$$

Используя определение дисперсии скорости

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \quad (64)$$

перепишем (56) в виде

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial(\rho \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad (65)$$

Это и есть искомое уравнение Джинса, которое в сферических координатах записывается в виде:

$$\frac{\partial(\rho \sigma^2)}{\partial r} + \frac{2\rho(r)\beta \sigma^2(r)}{r} = -\rho(r) \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (66)$$

где  $\beta \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{\sigma_\theta^2 - \sigma_\phi^2}{2\sigma_r^2}$  – параметр анизотропии.

Считая шаровые скопления симметричными, изотропными системами, мы можем положить параметр анизотропии равным нулю.

Тогда

$$\frac{\partial(\rho \sigma^2)}{\partial r} = -\rho(r) \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (67)$$

Откуда

$$\sigma^2 = \frac{1}{\rho} \int_r^\infty \rho(r) \frac{\partial \phi}{\partial r} dr \quad (68)$$

## 6. Результаты

Ниже представлены кривые вращения для четырех карликовых галактик (UGC 4459, UGC 7559, UGC 9211, UGC 7232, UGC 5423) и зависимости дисперсии скоростей от радиуса для трех шаровых звездных скоплений (NGC 1851, NGC 1904, NGC 5139).

Исходя из следующих данных [5]

Galaxy	Distance (Mpc)	$L_B$ ( $10^9 L_\odot^B$ )	$(R_0)_{disk}$ (kpc)	$R_{last}$ (kpc)	$M_{HI}$ ( $10^9 M_\odot$ )	$M_{disk}$ ( $10^9 M_\odot$ )	$(M/L_B)_{disk}$ ( $M_\odot/L_\odot^B$ )	$(v^2/c^2 R)_{last}$ ( $10^{-30} \text{ cm}^{-1}$ )
UGC 4459	3.06	0.03	0.60	2.47	0.04	0.01	0.20	0.97
UGC 7559	4.20	0.03	0.87	2.75	0.12	0.05	1.32	1.43
UGC 9211	14.7	0.33	1.54	9.62	1.43	1.23	3.69	1.55
UGC 7232	3.14	0.08	0.30	0.91	0.06	0.14	1.76	7.64
UGC 5423	7.14	0.14	0.61	1.97	0.05	0.28	2.01	1.82

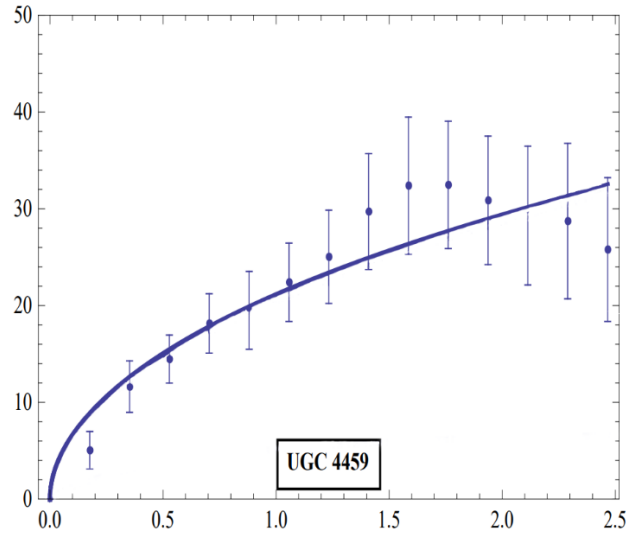


Рис. 1. Зависимость скорости вращения галактики UGC 4459 (км/с) от радиуса (кк).

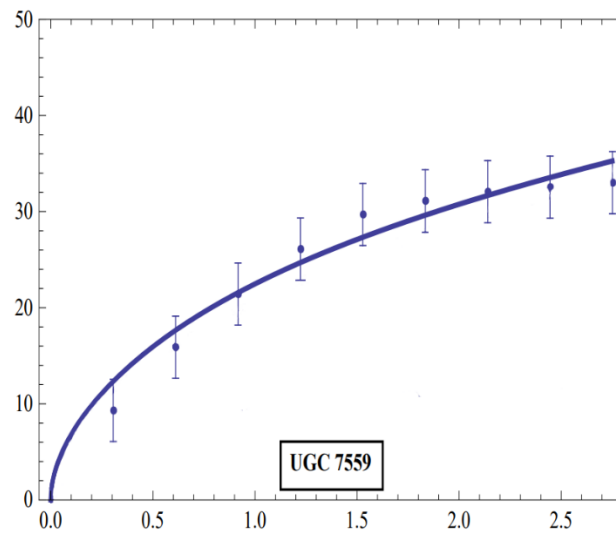


Рис. 2. Галактика UGC 7559.

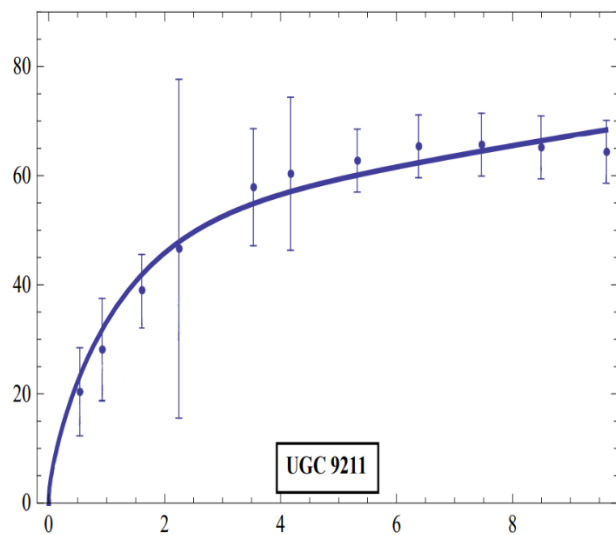


Рис. 3. Галактика UGC 9211.

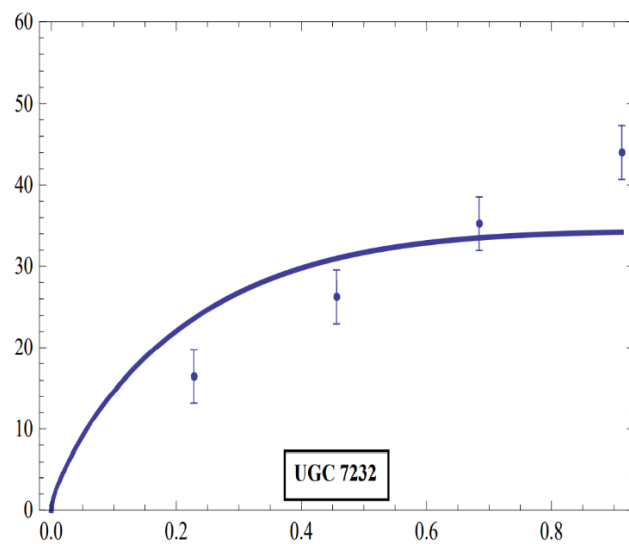


Рис. 4. Галактика UGC 7232.

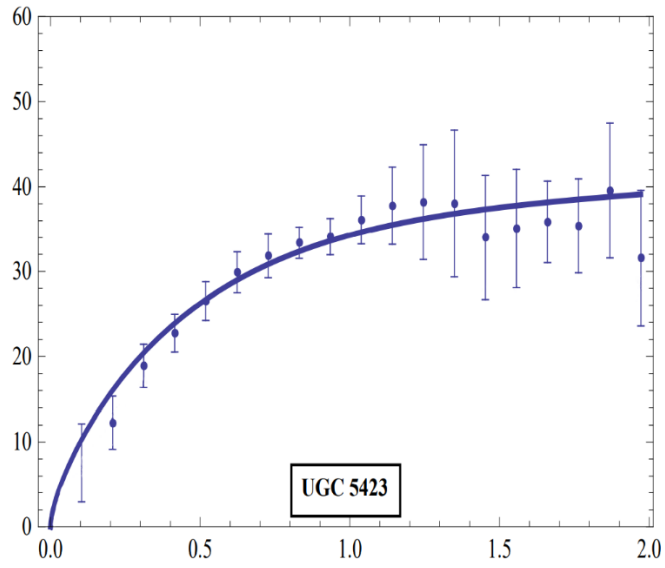


Рис. 3. Галактика UGC 5423.

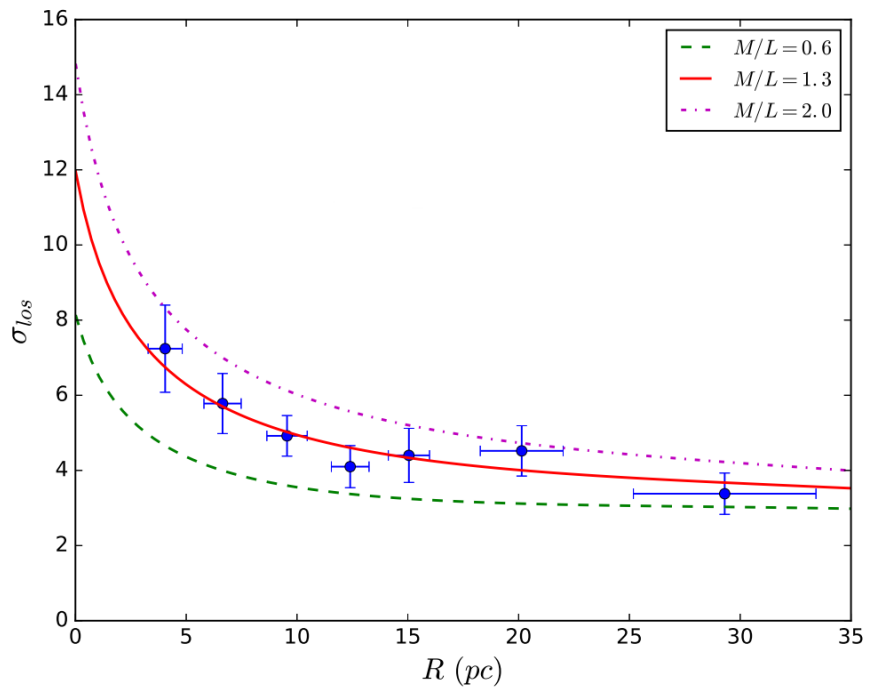


Рис. 4. Зависимость дисперсии скорости (км/с) от радиуса (пк) для разных отношений масса-светимость для шарового скопления NGC 1851.

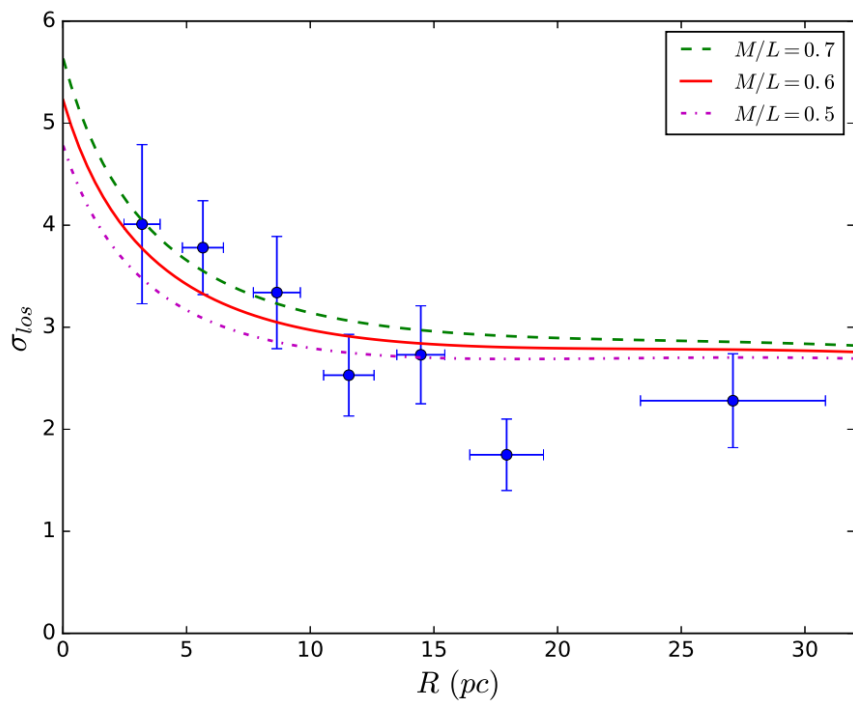


Рис.5. NGC 1904.

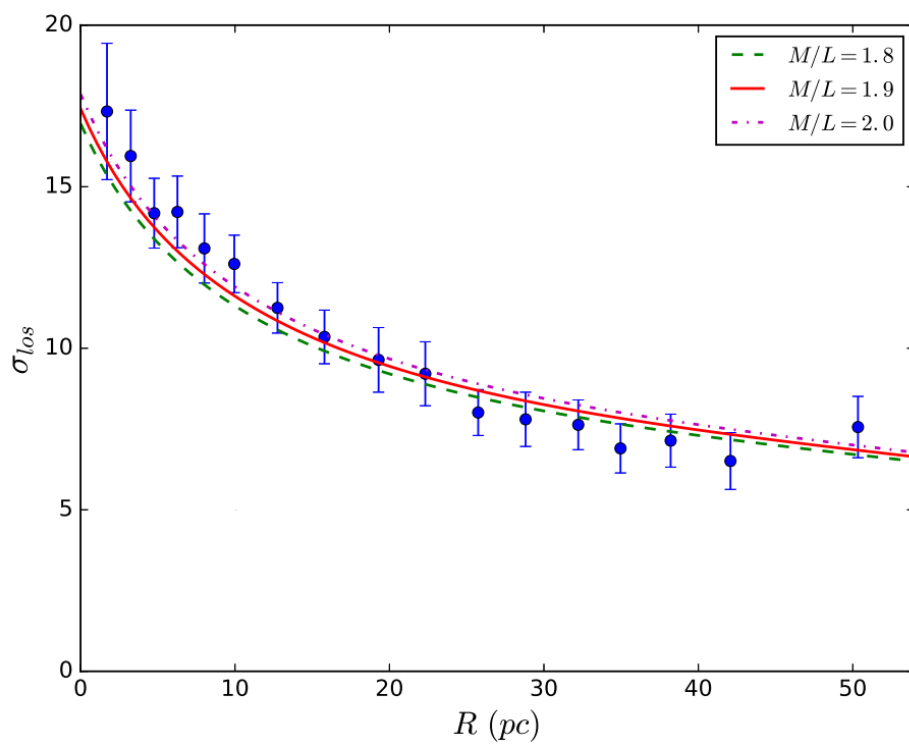


Рис. 6. NGC 5139.

## 7. Заключение

В данной работе изучалась альтернативная ОТО теория – теория конформной гравитации. Были построены кривые вращения для нескольких карликовых галактик и зависимости дисперсии скоростей от радиуса для шаровых скоплений. Как видно из построенных зависимостей, конформная теория довольно хорошо описывается наблюдаемые закономерности без введения темной материи.

## Список литературы

- [1] P.D. Mannheim, D. Kazanas, Exact vacuum solution to Conformal Weyl Gravity and galactic rotation curves, *Astrophys. J.*, 342, 635, 1988.
- [2] P.D. Mannheim, D. Kazanas, Newtonian limit of Conformal Gravity and the lack of necessity of the second order poisson equation, *Gen. Rel. Grav.*, Vol. 26, No. 4, 1994.
- [3] Patric Hölscher, Conformal Gravity.
- [4] J. Binney and S. Tremaine, "Galactic dynamics, Princeton univ" (2008).
- [5] J.G. O'Brien, P. D. Mannheim, Fitting dwarf galaxy rotation curves with conformal gravity, arXiv:1107.5229 [astro-ph.CO].