

Московский государственный университет

имени М.В. Ломоносова

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа

Стандартные свечи на космологических расстояниях

Выполнил:

Студент 206 группы

Дьяченко Артём Андреевич

Научный руководитель:

член-корр. РАН, доктор физ.-
мат. наук, Горбунов Дмитрий

Сергеевич

г. Москва

2021

Оглавление

1 Введение	3
2 Новый подход	4
3 Проверка приближения фиктивной диаграммой Хаббла	6
4 Сравнение с разложением в ряд Тейлора по логарифмам	9
5 Заключение	11
6 Список литературы	12

1. Введение

Стандартные свечи – астрономические объекты с известной светимостью. Их красное смещение определяется по смещению их спектральных линий, по сравнению с неподвижными источниками. Наблюдение за такими объектами позволяет понять, как расширяется вселенная, и узнать больше о природе тёмной энергии. Для анализа зависимости расстояния от красного смещения (диаграммы Хаббла) строят кривую, которая аппроксимирует эту зависимость для стандартных свечей. При этом используется модельно независимый подход: выражение для этой кривой не постулирует какую-либо космологическую модель. После этого, анализируются полученные в ходе аппроксимации параметры кривой и делаются выводы о состоятельности той или иной космологической модели. Так в [2-4] для анализа совокупности квазаров и сверхновых в большом диапазоне z использовалось разложение фотометрического расстояния по степеням $\log(1+z)$:

$$d_L^{\log poly} = \ln(10) \frac{c}{H_0} \sum_{n=1}^5 a_n [\log(1+z)]^n$$

Аппроксимация этой формулой показывает, что диаграмма Хаббла для квазаров хорошо объясняется стандартной космологической моделью Λ CDM при $z < 2$, но при больших z данные наблюдений сильно отклоняются от стандартной модели. Позже ([1], [5]), было показано, что разложение по логарифмам не является модельно независимым: для $z > 2$ оно работает лишь для некоторых значений космологических параметров. Поэтому результатам, полученным на основе этого разложения, нельзя доверять, так как ошибка, вызванная самими разложением, может быть неверно интерпретирована как отклонение от Λ CDM. Цель этой курсовой работы – предложить новое приближение для формулы фотометрического расстояния, и проверить его на модельную независимость.

2. Новый подход

Так как использование ряда Тейлора работает только в окрестности точки, в которой проводят разложение, при работе с широкими диапазонами з более целесообразно использовать такие аппроксимации, которые дают хорошее на всём рассматриваемом промежутке. Например, можно использовать аппроксимацию рядом многочленов Чебышева.

Параметр Хаббла и фотометрическое расстояние связаны соотношением

$$d_L = (1 + z) \int_0^z \frac{1}{H(z')} dz'$$

Эту величину можно аппроксимировать многочленами Чебышева.

$$d_L \approx \sum_{i=0}^n c_i T_i$$

Многочлены Чебышева – ортогональны на сегменте $[-1; 1]$ с весовой функцией

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{fg}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Для того, чтобы аппроксимировать функцию на сегменте $[0; u]$, нужно отобразить $[-1; 1]$ на этот сегмент при помощи функции

$$y(x) = \frac{u}{2}(x + 1)$$

Тогда коэффициенты c_i определяются следующим образом:

$$c_0 = \langle d_L(y(x)), T_0(x) \rangle \frac{1}{\pi}$$

$$c_k = \langle d_L(y(x)), T_k(x) \rangle \frac{2}{\pi}, k > 0$$

Коэффициенты c_i это и есть новые космографические параметры, их значения зависят от рассматриваемой модели и рассматриваемого интервала z .

Так как при вычислении коэффициентов интеграл брался для $f(y(x))$, где $y(x) \in [-1, 1]$, необходимо использовать многочлены Чебышева относительно функции:

$$x(y) = \frac{2x - u}{u}$$

Таким образом, d_L можно аппроксимировать рядом

$$d_L^{approx} = \sum_{i=0}^n c_i T_i \left(\frac{2z - u}{u} \right)$$

Чтобы проверить точность этой аппроксимации, можно составить график относительной ошибки для Λ CDM:

$$\frac{d_L^{approx} - d_L}{d_L}$$

Параметр Хаббла в Λ CDM: $H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + 1 - \Omega_m}$

Для сегмента $[0; 5]$ при $n=5$ график будет иметь вид:

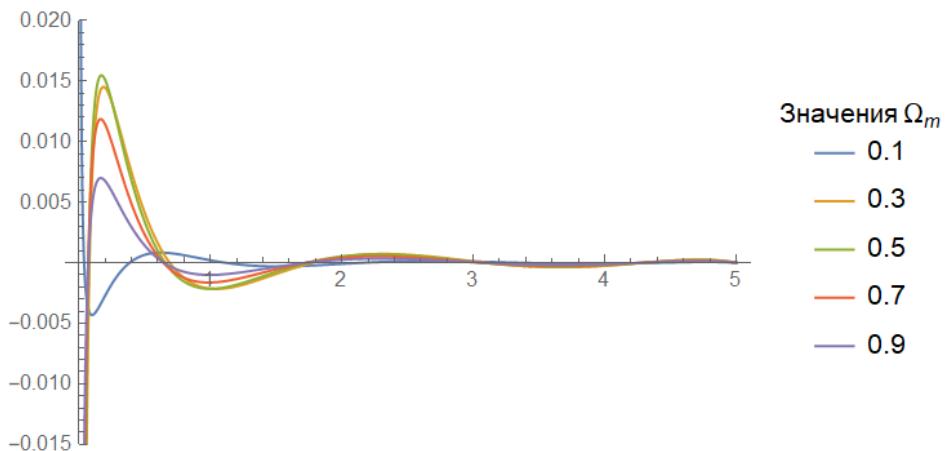


Рисунок 1. Относительная ошибка d_L и разложения по полиномам в Λ CDM

В случае ω CDM при $\Omega_m = 0.7$

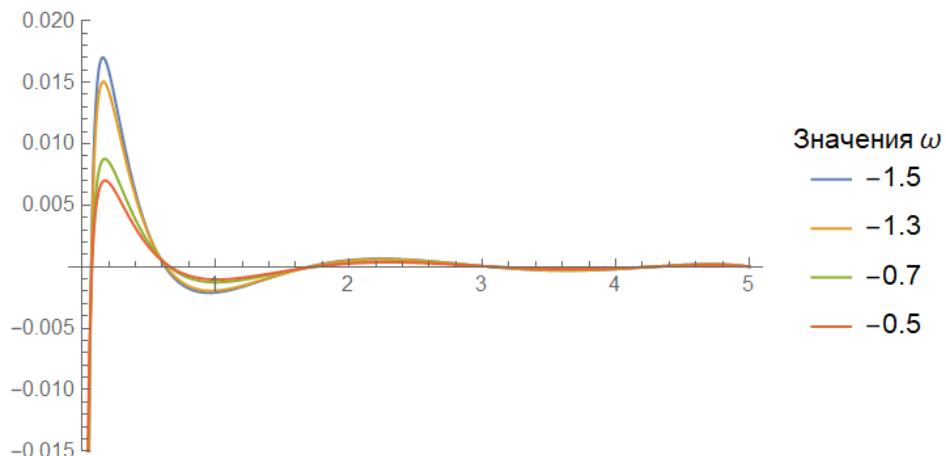


Рисунок 2. Относительная ошибка d_L и разложения по полиномам в ω CDM

3. Проверка аппроксимации фиктивной диаграммой Хаббла

Чтобы убедится в том, что эту аппроксимацию можно использовать для космографического анализа, я использую такой-же подход, как и в [1]. Сначала я составлю фиктивные зависимости модуля расстояния от z , которые будет воспроизводить плоскую Λ CDM с $H_0 = 70$ км/с/Мпк в двух случаях: при $\Omega_m = 0.1$ и $\Omega_m = 0.5$ (последнее значение выбрано таким потому, что моя аппроксимация при нём ведёт себя хуже всего). После этого я аппроксимирую получившуюся зависимость модуля расстояния от z используя d_L^{approx} при $n = 5$ (n выбрано таким потому, что это наименьшее число членов ряда, при котором относительная ошибка меньше 1% везде кроме окрестности точки $z=0$) и сравню получившиеся коэффициенты с теми, которые должны быть в плоской Λ CDM при тех-же параметрах.

Зависимость модуля расстояния от фотометрического расстояния:

$$\mu = 25 + 5 \log \left(\frac{d_L}{\text{Мпк}} \right)$$

Квазары будут распределены в промежутке $z \in [0.04; 5.098]$ (из-за этого $u = 5.098$) с шагом 0.003, относительная погрешность $\Delta\mu/\mu = 1\%$. Сверхновые будут распределены в промежутке $z \in [0.01; 2.254]$ с шагом 0.004, относительная погрешность $\Delta\mu/\mu = 0.5\%$. Значения μ - случайные числа сгенерированные по закону нормального распределения с математическим ожиданием $\mu(z_i)$ и стандартным отклонением $\Delta\mu$.

Чтобы убедится в том, что фиктивные данные согласуются с Λ CDM, я восстановлю значения космологических параметров путём аппроксимации данных формулой фотометрического расстояния в Λ CDM:

$$d_L(z, \Omega_m, H_0) = (1 + z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_m(1 + z')^3 + 1 - \Omega_m}} dz'$$

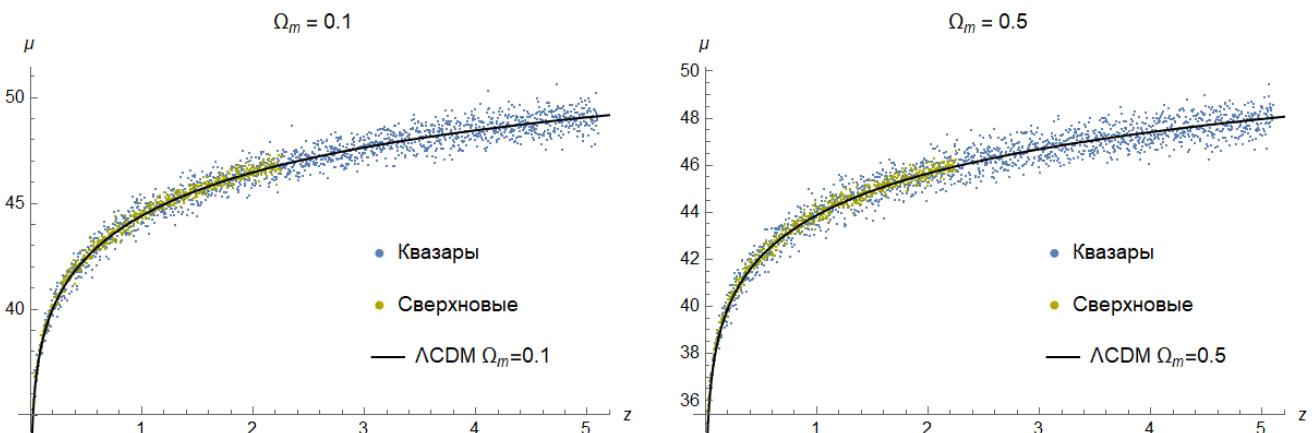


Рисунок 3. Фиктивные данные для Λ CDM при $\Omega_m = 0.1$ (слева) и $\Omega_m = 0.5$ (справа)

Фиктивные данные	H_0 (км/с/Мпк)	Ω_m
$\Omega_m = 0.1$	70.2 ± 0.7	0.099 ± 0.005
$\Omega_m = 0.5$	70.0 ± 1.0	0.495 ± 0.026

Таблица 1 - результат аппроксимации диаграммы Хаббла

Как и ожидалось, данные хорошо согласуются с Λ CDM. Далее, эти же наборы данных будут аппроксимироваться d_L^{approx} .

	Λ CDM: $\Omega_m = 0.1; H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
c_0	0.1005	0.1005 ± 0.0008
c_1	0.1141	0.1141 ± 0.0014
c_2	0.0101	0.0102 ± 0.0012
c_3	-0.0026	-0.0024 ± 0.0011
c_4	0.00068	0.0007 ± 0.0008
c_5	-0.00013	-0.00020 ± 0.00028

Таблица 2 коэффициенты ряда Чебышева при $\Omega_m = 0.1$

	Λ CDM: $\Omega_m = 0.5; H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
c_0	0.0631	0.0633 ± 0.0005
c_1	0.0679	0.0680 ± 0.0009
c_2	0.0035	0.0035 ± 0.0008
c_3	-0.00088	-0.0006 ± 0.0007
c_4	0.00029	0.0005 ± 0.0005
c_5	-0.00010	-0.00011 ± 0.00020

Таблица 3 коэффициенты ряда Чебышева при $\Omega_m = 0.5$

Полученные коэффициенты совпадают с теми, которые соответствуют Λ CDM с заданными параметрами, это говорит о том, что предложенное мною приближение – модельно независимо.

По этим коэффициентам можно оценить значения космологических параметров, для этого надо найти минимум функции:

$$f(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0) = \sum_{i=0}^5 \frac{(\hat{c}_i - c_i(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0))^2}{\sigma_i^2}$$

Где \hat{c}_i – статистическая оценка космографического коэффициента c_i , σ_i^2 – дисперсия, $c_i(\Omega_m, H_0)$ – космографический коэффициент как функция космологических параметров.

$$c_i(\Omega_m, H_0) = \int_{-1}^1 \frac{T_i(x) d_L\left(\frac{5.098}{2}(1+z), \Omega_m, H_0\right)}{\sqrt{1-z^2}} dz * \begin{cases} \frac{1}{\pi}; & i = 0 \\ \frac{2}{\pi}; & i > 0 \end{cases}$$

Минимум $f(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0)$ при $\Omega_m = 0.1$ достигается при:

$$\hat{\Omega}_m = 0.0985 \quad \hat{H}_0 = 70.3142 \text{ км/с/Мпк}$$

Для случая $\Omega_m = 0.5$:

$$\hat{\Omega}_m = 0.5020 \quad \hat{H}_0 = 69.7245 \text{ км/с/Мпк}$$

Для того, чтобы нагляднее показать точность в определении этих коэффициентов, можно изобразить на плоскости (c_i, c_j) доверительные интервалы статистических оценок первых трех коэффициентов ряда.

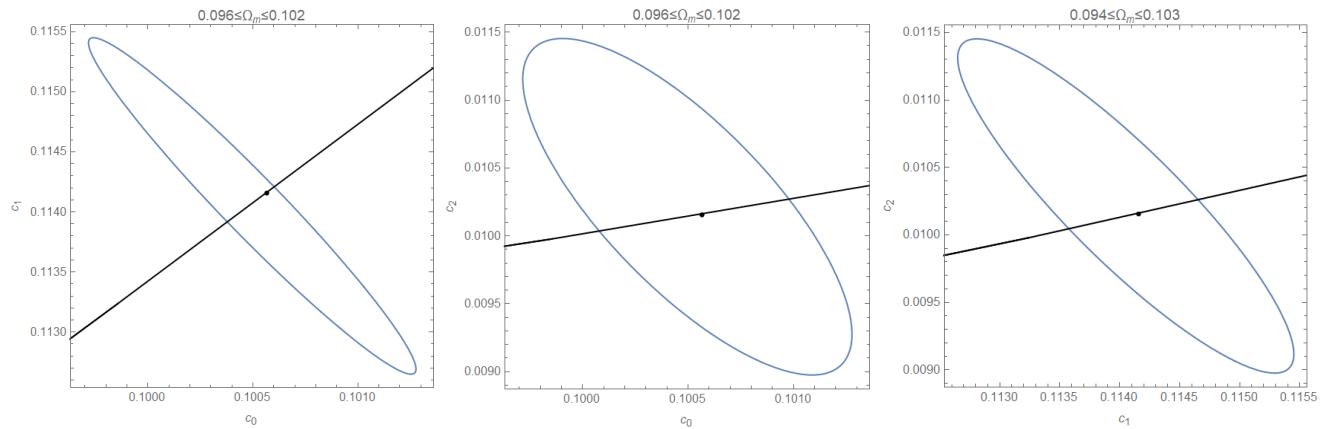


Рисунок 4. Доверительные интервалы в 1σ , соответствующие аппроксимации фиктивных данных при $\Omega_m = 0.1$. Черная кривая – параметрическая кривая связывающая коэффициенты c_i, c_j в Λ CDM при значении постоянной Хаббла из таблицы 1. Черная точка соответствует значениям коэффициентов при космологических параметрах из таблицы 1.

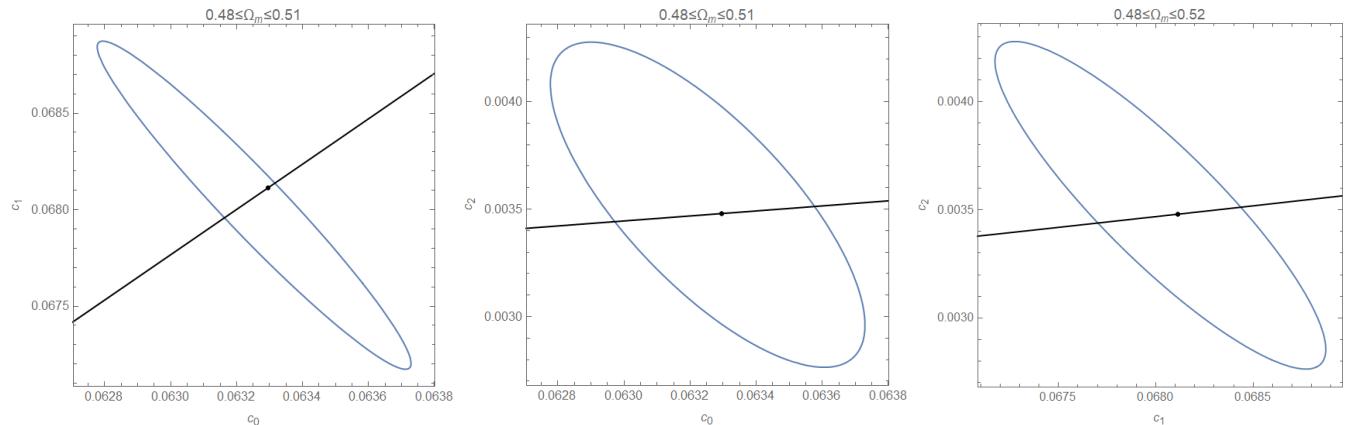


Рисунок 5. Доверительные интервалы в 1σ , соответствующие аппроксимации фиктивных данных при $\Omega_m = 0.5$.

4. Сравнение с разложением в ряд Тейлора по логарифмам

Для более честного сравнения можно сделать проверку на модельную независимость для разложения по логарифмам, используя те-же наборы данных которые использовались для проверки ряда Чебышева.

В этом случае, фотометрическое расстояние аппроксимируется рядом:

$$d_L^{\log poly} = \ln(10) \frac{c}{H_0} \sum_{n=1}^5 a_n [\log(1+z)]^n$$

В котором $a_1 = 1$, чтобы воспроизводить закон Хаббла в окрестности $z = 0$, а коэффициенты $a_2 \dots a_5$ – космографические коэффициенты. В Λ CDM они зависят от Ω_m следующим образом:

$$a_2 = \ln(10) \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \Omega_m \right), \quad a_3 = \ln(10)^2 \left(\frac{9}{8} \Omega_m^2 - 2\Omega_m + \frac{7}{6} \right),$$

$$a_4 = \ln(10)^3 \left(-\frac{135}{64} \Omega_m^3 + \frac{9}{2} \Omega_m^2 - \frac{47}{16} \Omega_m + \frac{5}{8} \right),$$

$$a_5 = \ln(10)^4 \left(\frac{31}{120} - \frac{25}{8} \Omega_m + \frac{315}{32} \Omega_m^2 - \frac{729}{64} \Omega_m^3 + \frac{567}{128} \Omega_m^4 \right)$$

	Λ CDM: $\Omega_m = 0.1$; $H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
H_0	70	68.2 ± 2.8
a_2	3.28	2.1 ± 0.9
a_3	5.18	13 ± 5
a_4	4.57	-13 ± 7
a_5	0.94	10 ± 7

Таблица 4. Коэффициенты ряда Тейлора и постоянная Хаббла при $\Omega_m = 0.1$

	Λ CDM: $\Omega_m = 0.5$; $H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
H_0	70	69.3 ± 2.7
a_2	1.90	2.3 ± 0.8
a_3	1.47	4 ± 4
a_4	1.08	-3 ± 9
a_5	0.61	3 ± 6

Таблица 5. Коэффициенты ряда Тейлора и постоянная Хаббла при $\Omega_m = 0.5$

Минимум функции:

$$f(\hat{\Omega}_m) = \sum_{i=2}^5 \frac{(\hat{a}_i - a_i(\hat{\Omega}_m))^2}{\sigma_i^2}$$

для $\Omega_m = 0.1$ достигается при $\hat{\Omega}_m = 0.0164$, а для $\Omega_m = 0.5$ при $\hat{\Omega}_m = 0.6$. Используя разложение по логарифмам, нельзя определить космологические параметры даже в том случае, когда данные полностью соответствуют им.

5. Заключение

В работе было предложено новое приближение для космографического анализа. Выполнена проверка на модельную независимость путём аппроксимации фиктивной диаграммы Хаббла. Полученные значения коэффициентов и оценки параметров совпадают с теми, которые должны получится теоретически даже в том случае, когда разложение ведёт себя хуже всего ($\Omega_m = 0.5$). Следовательно, это приближение лучше используемого ранее разложения по логарифмам.

6. Список литературы

- [1] A. Banerjee, E. O Colgain, M. Sasaki, M. M. Sheikh-Jabbari and T. Yang, “On cosmography in the cosmic dark ages: are we still in the dark?,” [arXiv:2009.04109 [astro-ph.CO]].
- [2] G. Risaliti and E. Lusso, “Cosmological constraints from the Hubble diagram of quasars at high redshifts,” *Nature Astron.* 3, no.3, 272-277 (2019) [arXiv:1811.02590 [astro-ph.CO]].
- [3] E. Lusso, E. Piedipalumbo, G. Risaliti, M. Paolillo, S. Bisogni, E. Nardini and L. Amati, “Tension with the Λ CDM model from a high-redshift Hubble diagram of supernovae, quasars, and gamma-ray bursts,” *Astron. Astrophys.* 628, L4 (2019) [arXiv:1907.07692 [astro-ph.CO]].
- [4] E. Lusso, G. Risaliti, E. Nardini, G. Bargiacchi, M. Benetti, S. Bisogni, S. Capozziello, F. Civano, L. Eggleston, M. Elvis, G. Fabbiano, R. Gilli, A. Marconi, M. Paolillo, E. Piedipalumbo, F. Salvestrini, M. Signorini and C. Vignali, “Quasars as standard candles III. Validation of a new sample for cosmological studies,” [arXiv:2008.08586 [astro-ph.GA]].
- [5] T. Yang, A. Banerjee and E. O Colgain, “On cosmography and at Λ CDM tensions at high redshift,” [arXiv:1911.01681 [astro-ph.CO]].
- [6] Hans Petter Langtangen “Approximation of functions”.