ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ ГРАВИТАЦИИ В ТРЁХ ИЗМЕРЕНИЯХ В РАМКАХ ФОРМАЛИЗМА АЛЕКСАНДРОВА-КОНЦЕВИЦА-ШВАРЦА-ЗАБОРОНСКОГО-БАТАЛИНА-ВИЛКОВЫСКОГО

Выполнил студент
443 группы
Агафонов Григорий Алексеевич
____

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Григорьев Максим Анатольевич
____

Допущена к защите
Зав. кафедрой _____________

МОСКВА
2021

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Асимптотические симметрии в гравитации были известны по крайней мере с 60-ых годов прошлого века [6] [7], и в последнее время наблюдается значительный всплеск интереса к этой теме. Современные исследования асимптотических симметрий ведутся в основном по двум направлениям: для асимптотически плоских пространств и для асимптотически AdS пространств. С первым направлением во многом связан интерес к "эффекту памяти" в гравитации [9] [8] . Интерес ко второму направлению послужил толчком для активной разработки голографического принципа [10].

В общем случае произвольного числа измерений вопрос изучения асимптотических симметрий является довольно сложным. Поэтому для упрощения зачастую рассматриваются специальные случаи. Таким специальным случаем является случай d=3. В трёх измерениях и при отсутствии границы гравитация становится топологической теорией. Этот случай во многом исследован в классических работах [1] [14], где в качестве многообразия было взято асимптотическое AdS_3. Стоит отметить, что изучение асимптотических степеней свободы в данном случае позволяет лучше понять AdS_3/CFT_2 соответсвие. Действительно, в работе [11] было показано, что Эйнштейновская гравитации с асимптотической AdS границей, при подходящим образом поставленных граничных условиях, полностью характеризуется действием Весс-Зумино-Виттена, определённом на границе. Стоит также отметить, что это соответствие было открыто задолго до того, как был сформулирован принцип голографии.

Довольно удобным формализмом для описание калибровочных теорий являтся формализм Баталина-Вилковыского [15] [4]. Его более геометрической формой является так называемы AKSZ-BV подход [5] [26]. Хотя AKSZ-BV подход изначально был разработан для топологических теорий поля, но в дальнейшем он был обобщён на нетопологические теории [31] [32]. Геометричность AKSZ-BV формализма позволяет лучше понимать поведение теорий с границей. Это происходит за счёт того, что в таком подходе определяющие объекты теории: БРСТ дифференциал и пространство полей-антиполей, могут быть естественно сужены на любое подмногообразие пространства времени. Успешный пример применения AKSZ-BV формализма для теорий с границами можно найти в работах [29] [30]. Перспективной является задача описания асимптотических симметрий в рамках AKSZ-BV подхода. Стоит отметить, что в этом направлении ведется активная работа [33] [34]

В данной работе исследуются асимптотические симметрии в теории гравитации в трёх измерениях с отрицательной космологической постоянной на многообразии с топологией цилиндра. В разделе 1.1 даётся описание того, как возможен переход от теории гравитации к теории Черна-Саймонса. В разделе 1.2 обсуждается постановка граничных условий и связанная с этим дифференцируемость исходного действия. Далее следует небольшое введение в теорию Весс-Зумино-Виттена (раздел 2.1) для того, чтобы в дальнейшем (раздел 2.3) показать, как связаны между собой теория Черна-Саймонса с граничной теорией Весс-Зумино-Виттена. Раздел 3 посвящен возникновению асимптотических симметрий в исходной теории и исследованию алгебры генераторов. Разделы 4.1 и 4.2 посвящены введению в BFV и BV формализмы, для дальнейшего их применения к исходной теории. В разделе 4.3 даётся описание AKSZ конструкции, для построения BV формулировки гравитации.

1. Гравитация в трёх измерениях при наличии границы

1.1. Гравитация в трёх измерениях как теория Черна-Саймонса

Для начала рассмотрим теорию гравитации Эйнштейна в (2+1) измерениях с отрицательной космологической постоянной, и покажем что такая теория эквивалентна теории с действием Черна-Саймонса. Данная теория определяется действием Эйнштейна-Гильберта, которое записывается в терминах метрики $g_{\mu\nu}$.

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G}\int d^3x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) \tag{1..1}$$

Обобщением данного действия на вырожденный случай является действие Картана, записанное в терминах тетрады e^a и спин связности ω_b^a.

$$S[e^a, \omega_b^a] = \frac{1}{16\pi G}\int (R^{ab}\wedge e^c - \frac{\Lambda}{3}e^a\wedge e^b\wedge e^c)\epsilon_{abc} \tag{1..2}$$

где величины, входящие в действие, определяются следующим образом:

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_c^a\wedge\omega^{cb} \tag{1..3}$$

$$\eta_{ab} = diag(-++) \tag{1..4}$$

$$\epsilon_{012} = 1 \tag{1..5}$$

Далее пользуясь тем, что теория задана в (2+1) измерениях, введём следующие дуальные величины:

$$\omega^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\omega_{bc} \tag{1..6}$$

$$R^a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}R^{bc} \qquad (1..7)$$

В таком случае, действие (1..2) с учётом отрицательности космологиеческой постоянной $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$ перепишется в виде:

$$S[e,\omega] = \frac{1}{8\pi G}\int e^a \wedge R^b \eta_{ab} + \frac{1}{6l^2}(e^a \wedge e^b \wedge e^c)\epsilon_{abc} \qquad (1..8)$$

Теперь будем работать с данным действием (1..8) и покажем, что оно сводится к разности двух действий Черна-Саймонса. Действительно, пусть x - комплексное число. Введём два новых поля $A^a = \omega^a + xe^a$ и $\overline{A^a} = \omega^a - xe^a$. Тогда непосредственной подстановкой можно убедиться в справедливости равенства:

$$2e^a \wedge R_a + \frac{x^2}{3}\epsilon_{abc}e^a \wedge e^b \wedge e^c = \frac{1}{2x}(A^a \wedge dA_a + \frac{1}{3}\epsilon_{abc}A^a \wedge A^b \wedge A^c) -$$
$$-\frac{1}{2x}(\overline{A^a} \wedge \overline{dA_a} + \frac{1}{3}\epsilon_{abc}\overline{A^a} \wedge \overline{A^b} \wedge \overline{A^c}) + dB \qquad (1..9)$$

где $B = \omega^a \wedge e_a$.

Выбирая в качестве $x = \frac{1}{l}$, получаем полное соответсвие с подынтегральным выражением для действия (1..8). Далее выберем следующее стандартное представление алгебры sl(2,R)

$$j_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} j_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} j_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (1..10)$$

Для этих матриц справедливо:

$$Tr(j_a, j_b) = \frac{1}{2}\eta_{ab} \quad \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [j_a, j_b] = \epsilon_{abc}j^c$$

Вводя $A = A^a j_a$ и $\overline{A} = \overline{A}^a j_a$, а также выбирая тетрады связанные со световым конусом, действие перепишется в виде:

$$S[e,\omega] = S[A,\overline{A}] = S_{CS}(A) - S_{CS}(\overline{A}) + C \qquad (1..11)$$

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int d^3x Tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \qquad (1..12)$$

где C - это кусок связанный с граничным членом dB

$$k = \frac{l}{4G}$$

Заметим то что $sl(2, R) \oplus sl(2, R) = so(2, 2)$, что совпадает с алгеброй группы изометрий пространства Анти-де-Ситтера. Вместо двух полей A и $\overline{A}$ можно думать об одном поле, которое принимает значение в алгебре so(2,2), а билинейная форма есть разность билинейных форм по каждой компоненте sl(2,R)

1.2. Описание граничных условий модели и дифференцируемость действия

Давайте теперь будем явно учитывать границу в нашей теории гравитации. Будем считать, что многообразие M на котором задана теория имеет топологию цилиндра. В координатах (ρ, ϕ, t) граница находится на $\rho \to \infty$ а координата ϕ - циклическая. Введём координаты светового конуса:

$$x^+ = t + \phi \qquad (1..13)$$

$$x^- = t - \phi \qquad (1..14)$$

И в этих координатах наложим следующие граничные условия на поля A и $\overline{A}$:

$$A_-|_{\partial M} = 0 \qquad (1..15)$$

$$\overline{A}_+|_{\partial M} = 0 \qquad (1..16)$$

Такой выбор граничных условий позволит в дальнейшем свести рассматриваемую теорию Черна-Саймонса к другой известной теории - теории Весс-Зумино-Виттена, но уже определённой на ∂M. Ограничение на границу $|_{\partial M}$ в данных формулах означает pullback один формы A на ∂M. Также эта запись будет трактоваться и далее.

Теперь обсудим дифференцируемость действия (1..11). Под дифференцируемостью мы будем понимать отстутствие граничных кусков при варьировании. Как можно видеть, граничный член в формуле (1..11) присутствует. Чтобы избавиться от него, выберем координаты (ρ, ϕ, t), запишем $S_{CS}[A]$ в этих координатах и приведём $S_{CS}[A]$ к гамильтонову виду, просто перекидывая члены типа $\partial_\rho A_t$ и $\partial_\phi A_t$ по теореме Стокса, тогда:

$$S_{CS}[A_\rho, A_\phi, A_t] = \kappa \int_M d\rho dt d\phi Tr[A_\rho \dot{A}_\phi - A_\phi \dot{A}_\rho + 2A_t F_{\phi\rho}] - \kappa \int_{\partial M} dt d\phi Tr[A_t A_\phi] \tag{1..17}$$

где

$$\kappa = \frac{k}{4\pi} \tag{1..18}$$

$$F = dA + A \wedge A \tag{1..19}$$

Проделывая те же действия с $S_{CS}[\overline{A}]$, в полной аналогии получаем:

$$S_{CS}[\overline{A}_\rho, \overline{A}_\phi, \overline{A}_t] = \kappa \int_M d\rho dt d\phi Tr[\overline{A}_\rho \dot{\overline{A}}_\phi - \overline{A}_\phi \dot{\overline{A}}_\rho + 2\overline{A}_t \overline{F}_{\phi\rho}] - \kappa \int_{\partial M} dt d\phi Tr[\overline{A}_t \overline{A}_\phi] \tag{1..20}$$

Если подставить (1..20) и (1..17) в (1..11), то окажется, что граничные члены от (1..20) и (1..17) сократят граничный член С в (1..11), то есть в итоге мы имеем:

$$S[e, \omega] := S^H_{CS}(A) - S^H_{CS}(\overline{A}) \tag{1..21}$$

$$S^H_{CS}(A) = \kappa \int_M d\rho dt d\phi Tr[A_\rho \dot{A}_\phi - A_\phi \dot{A}_\rho + 2A_t F_{\phi\rho}] \tag{1..22}$$

$$S^H_{CS}(\overline{A}) = \kappa \int_M d\rho dt d\phi Tr[\overline{A}_\rho \dot{\overline{A}}_\phi - \overline{A}_\phi \dot{\overline{A}}_\rho + 2\overline{A}_t \overline{F}_{\phi\rho}] \tag{1..23}$$

На первый взгляд кажется, что проблема с дифференцируемостью исходного действия решена, то есть при заданных граничных условиях при вариации не возникнет граничных членов, посмотрим так ли это.

$$\delta S[e, \omega] = \kappa \int_M (F \delta A) - \kappa \int_M (\overline{F} \delta \overline{A}) - 2\kappa \int_{\partial M} dt d\phi Tr[A_t \delta A_\phi - \overline{A}_t \delta \overline{A}_\phi] \tag{1..24}$$

Как мы можем видеть, граничные условия на A_- и $\overline{A_+}$ не делают действие дифференцируемым, чтобы это исправить, нам ничего не остается кроме того, чтобы переопределить действие, добавив дополнительный граничный член I.

$$I = \kappa \int_{\partial M} dt d\phi Tr[A_\phi^2 + \overline{A}_\phi^2] \tag{1..25}$$

Тут учтены граничные условия $A_t = A_\phi$ и $\overline{A}_t = -\overline{A}_\phi$ на ∂M. В итоге будем рассматривать теорию следующего вида:

$$S[A, A] = S_{CS}^H(A) - S_{CS}^H(\overline{A}) + I \tag{1..26}$$

$$A_-|_{\partial M} = 0 \tag{1..27}$$

$$\overline{A}_+|_{\partial M} = 0 \tag{1..28}$$

2. Переход от теории гравитации к теории Весс-Зумино-Виттена

2.1. Введение в теорию WZW

2.1.1. Нелинейная сигма модель

В квантовой теории поля нелинейная сигма модель описывает поля ϕ^i где $i = 1...n$, которые являются отображениями из плоского пространства времени в таргет многообразие. Таргет многообразие должно обладать метрикой $g(\phi)$, которая зависит от полей. Действие такой теории:

$$S_\sigma[\phi] = \frac{1}{4a^2} \int d^d x g_{ij}(\phi) \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j \tag{2..1}$$

где $a^2 > 0$ безразмерная константа. Так называемая модель Весс-Зумино-Виттена - это двумерная нелинейная сигма модель, в которой таргет многообразием служит полупростая группа Ли G, сами поля обозначаются g(x), а действие устроено следующим образом:

$$S_\sigma[g] = \frac{1}{4a^2} \int_\Sigma d^2 x Tr[\eta^{\mu\nu} \partial_\mu g \partial_\nu g^{-1}] \tag{2..2}$$

Уравнения движения такой теории в координатах светового конуса $x^+ = t + \phi$ и $x^- = t - \phi$

$$\partial_+ J_- + \partial_- J_+ = 0 \tag{2..3}$$

$$J_+ = g^{-1} \partial_+ g \tag{2..4}$$

$$J_- = g^{-1} \partial_- g \tag{2..5}$$

Отсюда видно, что токи не сохраняются независимо, что является мотивацией для изменения исходного действия.

2.1.2. Добавление члена Весс-Зумино

Чтобы получить теорию в которой токи будут сохраняться независимо, к сигма модели добавляют дополнительный член, который называется членом Весс-Зумино:

$$S[g] = S_\sigma[g] + k\Gamma[G] \tag{2..6}$$

$$\Gamma[G] = \frac{1}{3}\int_V Tr(G^{-1}dG)^3 \tag{2..7}$$

где $\partial V = \Sigma$, а G - это продолжение g на многообразие V. Уравнения движения данной теории:

$$(1-2a^2k)\partial_+(g^{-1}\partial_- g) + (1+2a^2k)\partial_-(g^{-1}\partial_+ g) = 0 \tag{2..8}$$

Подробный вывод в [20]. Выбирая $a^2 = -\dfrac{1}{2k}$ получаем уравнения $\partial_+ J_- = 0$, а выбирая $a^2 = \dfrac{1}{2k}$ получаем уравнения $\partial_- J_+ = 0$, где:

$$J_- = g^{-1}\partial_- g \tag{2..9}$$

$$J_+ = -\partial_+ g g^{-1} \tag{2..10}$$

При любом выборе параметра сохранятся будут оба тока независимо. Выбирая $a^2 = -\dfrac{k}{2}$ получим действие Весс-Зумино-Виттена-Новикова:

$$S[g] = \frac{k}{2}\int d^2x Tr[\eta^{\mu\nu} g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g] + k\Gamma[G] \tag{2..11}$$

2.2. Переход от теории Черна-Саймонса к WZW

Давайте теперь покажем в каком смысле можно перейти от теории Черна-Саймонса к теории Весс-Зумино-Виттена. Будем исследовать действие (1..26). Начнём для начала с части, которая зависит только от A, то есть:

$$S[A] = S^H_{CS}(A) + \kappa\int_{\partial M} dt d\phi Tr[A^2_\phi] \tag{2..12}$$

Если варьировать по A_t, то получим следующее уравнение:

$$F_{\phi,\rho} = 0 \tag{2..13}$$

Давайте решим это уравнение, при том условии, что наложена следующая калибровка:

$$A_\rho = h^{-1}(\rho)\partial_\rho h(\rho) \tag{2..14}$$

Обсуждение того, что такая калибровка всегда достижима смотрите в Приложении А. Тогда общее решение этих уравнений:

$$A_\rho = G^{-1}\partial_\rho G \tag{2..15}$$

$$A_\phi = G^{-1}\partial_\phi G \tag{2..16}$$

где G - это отображение из M в группу Ли SL(2,R). Стоит также отметить, что из-за условия калибровки, G факторизуется $G = g(\phi, t)h(\rho)$. Давайте теперь посмотрим, как устроено действие на своих решениях в данной калибровке, то есть:

$$S[A]|_{sol} = S^H_{CS}[A]|_{sol} + \kappa \int_{\partial M} dtd\phi(g^{-1}\partial_\phi g)^2 \tag{2..17}$$

$$S^H_{CS}[A]|_{sol} = -\kappa \int_M d\rho dtd\phi Tr[\partial_\rho hh^{-1}\dot{h}h^{-1}g^{-1}g' + \partial_\rho hh^{-1}g^{-1}\dot{g}g^{-1}g' - \\ \text{-}\partial_\rho hh^{-1}g^{-1}\dot{g}' - h^{-1}\partial_\rho hh^{-1}g^{-1}g'\dot{h} - h^{-1}g^{-1}g\dot{h}h^{-1}\partial_\rho h + \\ +\mathrm{h}^{-1}g^{-1}g'\partial_\rho\dot{h}] \tag{2..18}$$

С другой стороны можно заметить:

$$\frac{\kappa}{3}\int_M Tr[(G^{-1}dG)^3] = \kappa \int_M d\rho dtd\phi Tr[\partial_\rho hh^{-1}\dot{h}h^{-1}g^{-1}g' + \partial_\rho hh^{-1}g^{-1}\dot{g}g^{-1}g' - \\ \text{-}\partial_\rho hh^{-1}g^{-1}g'g^{-1}\dot{g} - h^{-1}\partial_\rho hh^{-1}g^{-1}g'\dot{h}] \tag{2..19}$$

Совмещая эти уравнения:

$$S_{CS}^{H}[A]|_{sol} = -\frac{\kappa}{3}\int_M Tr[(G^{-1}dG)^3] - \kappa\int_M d\rho dt d\phi Tr[-h^{-1}g^{-1}g^{'}\dot{h}h^{-1}\partial_\rho h+$$
$$+\mathrm{h}^{-1}g^{-1}g^{'}\partial_\rho\dot{h}] \tag{2..20}$$

Стоит также обратить внимание на тождества:

$$\partial_\rho(G^{-1}\partial_\phi G G^{-1}\partial_t G) = \partial_\rho(h^{-1}g^{-1}g^{'}h(h^{-1}g^{-1}\dot{g}h + h^{-1}\dot{h})) \tag{2..21}$$

$$\dot{h}|_{\partial M} = 0 \tag{2..22}$$

Учитывая все это:

$$S_{CS}^{H}[A]|_{sol} = -\kappa\int_{\partial M} dt d\phi Tr[g^{-1}\partial_\phi g g^{-1}\partial_t g] - \frac{\kappa}{3}\int_M Tr[(G^{-1}dG)^3] \tag{2..23}$$

$$S[A]|_{sol} = -\kappa\int_{\partial M} dt d\phi Tr[g^{-1}\partial_\phi g g^{-1}(\partial_t g - \partial_\phi g)] - \kappa\Gamma[G] \tag{2..24}$$

Переходя в координаты, связанные со световым конусом x^+ и x^-, получим:

$$S[A]|_{sol} = -2\kappa\int_{\partial M} dt d\phi Tr[g^{-1}\partial_\phi g g^{-1}\partial_- g] - \kappa\Gamma[G] = S_{WZW}^{R}[g] \tag{2..25}$$

Получившееся действие называют правокиральным действием Весс-Зумино-Виттена.

Вспомним, что в действии (1..26) присутствуют также члены с $\overline{A}$. Проделывая всё по аналогии с А, получаем:

$$S[\overline{A}]|_{sol} = -\kappa\int_{\partial M} dt d\phi Tr[\overline{g}^{-1}\partial_\phi \overline{g}\overline{g}^{-1}(\partial_t \overline{g} + \partial_\phi \overline{g})] - \kappa\Gamma[\overline{G}] \tag{2..26}$$

$$S[\overline{A}]|_{sol} = -2\kappa \int_{\partial M} dt d\phi Tr[\overline{g}^{-1}\partial_\phi \overline{g}\overline{g}^{-1}(\partial_+ \overline{g})] - \kappa\Gamma[\overline{G}] = S^L_{WZW}[\overline{g}] \quad (2..27)$$

Получившееся действие называют левокиральным действием Весс-Зумино-Виттена. В итоге, объединяя два куска с A и $\overline{A}$:

$$S[A,\overline{A}] = S^R_{WZW}[g] - S^L_{WZW}[\overline{g}] \quad (2..28)$$

Учтём, что G и $\overline{G}$ принадлежат одной и той же группе SL(2,R), можно воспользоваться этим для того, чтобы перейти от право-киральных и левого киральных действий Весс-Зумино-Виттена к некиральному обычному действию Весс-Зумино-Виттена. Действительно, давайте введём новые переменные:

$$k = g^{-1}\overline{g} \quad (2..29)$$

$$K = G^{-1}\overline{G} \quad (2..30)$$

$$W = -\overline{g}^{-1}\partial_\phi g g^{-1}\overline{g} - \overline{g}^{-1}\partial_\phi \overline{g} \quad (2..31)$$

Заметим также, что верно следующее равенство:

$$\Gamma[K] = -\Gamma[G] + \Gamma[\overline{G}] - \int_{\partial M} Tr[g^{-1}dg\overline{g}^{-1}d\overline{g}] \quad (2..32)$$

Тогда простой подстановкой можно убедиться в справедливости равенства:

$$S[A,\overline{A}]|_{solution} = S[k,W] = -\kappa \int_{\partial M} d\tau d\phi Tr[Wk^{-1}\dot{k} - \frac{1}{2}(W^2 + (k^{-1}\partial_\phi k)^2)] + \\ + \frac{\kappa}{3}\int_M Tr[(K^{-1}dK)^3]$$

(2..33)

Теперь исключим одно из двух варьируемых полей, а именно импульс W. Уравнение движения:

$$k^{-1}\dot{k} - W = 0$$
$$W = k^{-1}\dot{k} \tag{2..34}$$

Подставляя W в действие, получим стандартное некиральное действие Весс-Зумино-Виттена:

$$S[k]_{WZW} = -2\kappa \int_{\partial M} d\tau d\phi Tr[k^{-1}\partial_+ k k^{-1}\partial_- k] + \frac{\kappa}{3}\int_M Tr[(K^{-1}dK)^3] \tag{2..35}$$

Обратим внимание на то, как тут устроены токи. Из сказанного в разделе 1.3 понятно:

$$J_- = -k^{-1}a_- k + \overline{a_-} \tag{2..36}$$
$$\overline{J_+} = a_+ - k^{-1}\overline{a_+}k$$
$$a = g^{-1}dg \tag{2..37}$$
$$\overline{a} = \overline{g^{-1}}d\overline{g}$$

С учётом граничных условий, получаем токи:

$$J_- = \overline{a_-}$$
$$\partial_+ J_- = \partial_+\overline{a_-} = 0$$

(2..38)

$$J_+ = a_+$$
$$\partial_- J_+ = \partial_- a_+ = 0$$

(2..39)

То есть мы получили,что сохраняющиеся токи на границе - это есть не что иное, как значения полей на границе многообразия M.

3. Асимптотические симметрии

Давайте подробнее разберемся с интересными эффектами, возникающими вследствии того, что мы явно учитываем граничные условия в теории. Заранее стоит отметить, что в этом разделе мы будем часто пользоваться (2+1) разбиением, в связи с чем примем следующие обозначения: $M = R \times \Sigma$ где $\Sigma = (\rho, \phi)$ $\partial\Sigma = (\phi)$. В теории гравитации в трёх измерениях отстутсвуют локальные стемени свободы, и если не учитывать границу никоим образом, то все решения эквивалентны друг другу. Но оказывается, если ввести в теорию границу, то возникнет бесконечное число неэквивалентных друг другу решений, которые определяются значением поля A на границе многообразия Σ. Помним о том, что исследуемая теория определяется разностью двух независимых друг от дргу действий:

$$S[A, \overline{A}] = S[A] - S[\overline{A}] \tag{3..1}$$

Достаточно исследовать одно из этих действий, так как поля A и $\overline{A}$ независимы. Пусть это будет S[A]. Симметриями этого действия являются преобразования следующего вида:

$$\delta A^a_\mu = D_\mu \lambda^a$$

$$\text{D=d+[A,}\bullet\text{]}$$

(3..2)

Так как в теории есть граничные условия, от преобразования симметрии естественно требовать сохранения этих граничных условий, то есть:

$$\delta A_-|_{\partial M} = D_-\lambda = \partial_-\lambda = 0 \to \lambda|_{\partial M} = \lambda(x^+) \qquad (3..3)$$

Тут весьма важен получившийся результат. Часто в литературе говорят, что действие Черна-Саймонса инвариантно относительно преобразования $\delta A = D\lambda$ только при условии, что $\lambda = 0$ на границе, как мы видим в нашем случае это оказалось неправдой. Правильное утверждение следующее - параметр λ не может быть произвольным, но он вполне может быть отличен от нуля на границе. В нашем случае параметр оказался киральным. Более того, именно благодаря тому, что $\lambda \neq 0$ на гарнице в системе возникает бесконечное число неэквивалентных решений, которые будут характеризоваться значениями полей на границе. Рассмотри подробнее как так получается.

$$S[A] = \kappa \int_M d\rho dt d\phi Tr[A_\rho \dot{A}_\phi - A_\phi \dot{A}_\rho + 2A_t F_{\phi\rho}] + (bnd.term) \qquad (3..4)$$

У это действия 2N динамических полей A_i (где N размерность калибровочной группы G) и N Лагранжевых множетилей A_0. Полевые уравнения на лагранжевы множителям приводят к связям первого рода. Естественная скобка Пуассона в теории:

$$\{F, G\} = \frac{2}{\kappa} \int_\Sigma dx^i \wedge dx^j Tr(\frac{\delta F}{\delta A^i} \frac{\delta G}{\delta A^j}) \qquad (3..5)$$

Введём следующий функции $G(\lambda)$ и назовём их генераторами преобразований:

$$G(\lambda) = \kappa \int_\Sigma dx^i \wedge dx^j Tr(\lambda F_{ij}) + Q(\lambda) \qquad (3..6)$$

$$Q(\lambda) = -2\kappa \int_{\partial\Sigma} dx^i Tr(\lambda A_i) \qquad (3..7)$$

Результат вычисления скобки Пуассона для функций $G(\lambda)$ объясняет название функций $G(\lambda)$. Они называтся генераторами преобразований, потому что для них верно следующее соотношение:

$$D_i\lambda = \{A_i, G(\lambda)\} \tag{3..8}$$

Весь смысл граничного члена Q заключается в том, чтобы сократить граничный член, который возникает при варьировании первого члена в G(λ).

Данные генераторы удовлетворяют следующей алгебре:

$$\{Q(\lambda), Q(\gamma)\} = Q([\lambda, \gamma]) + 2\kappa \int_{\partial\Sigma} dx^i Tr(\lambda\partial_i\gamma) \tag{3..9}$$

Определение: Преобразование поля A будем называть калибровочным, если порождающий его генератор не содержит члена с Q.

Определение: Преобразования поля A будем называть глобальной симметрией, если порождающий его генератор, содержит член с Q.

Фундаментальное различие между калибровочной и глобальной симметрией состоит в том, что в первом случае преобразование порождается связью F_{ij} , а во втором случае нет. Это соответствует тому, что в первом случае генераторы образуют замкнутую алгебру, а во втором случае нет. Две конфигурации поля, которые отличаются на преобразование глобальной симметрии представляют собой разные физические состояния. Прямым следствием из этого является тот факт, что если есть две плоские связности A и $A^{'}$, такие что их значения на $\partial\Sigma$ отличаются, то они не могут быть переведены друг в друга преобразованием, порожденным связью. Таким образом значения A на границе представляют собой физические степени свободы.

Глобальные преобразования переводят одно физическое решение в другое, подтверждение чему мы увидим далее. Давайте непосредственно покажем это:

Для начала решим уравнения движения.

$$F = 0 \tag{3..10}$$

Не забываем также про то, что у нас есть граничные условия и условия калиброки:

$$A_-|_{\partial M} = 0 \tag{3..11}$$

$$A_\rho = h^{-1}(\rho)\partial_\rho h(\rho) \tag{3..12}$$

Условия калибровки фиксируют функцию $h(\rho)$. Но стоит только учесть то, что эту функцию не нужно класть равной нулю, это приведёт к тому, что тетрада в теории гравитации будет вырождена.

Решение уравнений движений при заданной калибровке и заданных граничных условиях устроено следующим образом:

$$\begin{cases} A_+ = h^{-1}g(x^+)^{-1}\partial_+ g(x^+)h = h^{-1}a_+(x^+)h, \\ A_- = 0, \\ A_\rho = h^{-1}\partial_\rho h \end{cases} \tag{3..13}$$

Как мы видим отсюда, решение уравнений полностью характеризуется функцией a_+ определённой на границе. Эта функция есть не что иное, как ток J_+ в полученной нами ранее теории Весс-Зумино-Виттена. Так как функция a_+ произвольна, то пространство решений бесконечномерно.

Покажем теперь, что делая преобразования глобальной симметрии, сохраняющее калибровку и граничные условия, можно получить из одного решения любое другое. Действительно, делая преобразование с $\lambda = h^{-1}\eta(x^+)h$, получим снова решение:

$$\begin{cases} A_+ = h^{-1}(a_+(x^+) + D_+\eta)h = h^{-1}(\widetilde{a_+(x^+)})h, \\ A_- = 0, \\ A_\rho = h^{-1}\partial_\rho h \end{cases} \tag{3..14}$$

В случае с полем $\overline{A}$ ситуация будет схожей, с тем лишь отличием, что решения будут характеризоваться функцией $\overline{a_-}$, а параметр преобразований должен удовлетворять равенству $\lambda|_{\partial M} = \lambda(x^-)$

4. AKSZ-BV формулировка

4.1. BFV формализм

Изначально BV и BFV формализмы были придуманы для того, чтобы квантовать системы с калибровочными симметриями. Но мы не будем рассматривать квантование и опишем эти формализмы на классическом уровне. Начнём с BFV формализма. Для простоты будем смотреть на механическую систему.

Пусть имеется механическая система со связями первого рода.

$$S = \int dt(\sigma_a \dot{z}^a - H_0(z) - \lambda^\alpha T_\alpha(z))\,. \tag{4..1}$$

Идея заключается в том, чтобы встроить заданную систему в специальную расширенную систему с помощью дополнительных переменных, называемых гостами, и гостовыми импульсами. Дело в том, что расширенная система является естественной отправной точкой для квантования, анализа взаимодействия, симметрий, аномалий и т.д.

Для системы 1-го рода со связями T_α вводятся гостовые переменные c^α и гостовые импульсы P_α. Грассмановская четность c^α и P_α противоположна четности T_α, так что в простейшем случае, когда в исходной системе не участвуют фермионы, то c^α, P_α являются фермионными, то есть $|c^\alpha| = |P_\alpha| = 1$. В дальнейшем мы ограничимся этим упрощенным случаем.

Супералгебра A функций на расширенном фазовом пространстве является тензорным произведением функций исходного фазового пространства $C^\infty(M)$ и полиномов $C[c^\alpha, P_\beta]$. Это градуированная суперкоммутативная алгебра. Градуировка обозначается символом gh.

$$gh(c^\alpha) = 1\,, \qquad gh(P_\alpha) = -1\,, \qquad gh(z^a) = 0\,, \tag{4..2}$$

Расширенное фазовое пространство имеет естественную скобку Пуассона, определяемую исходной скобкой Пуассона на M. Более конкретно, скобка Пуассона определяется как

$$\{f,g\} = f\frac{\partial^R}{\partial z^a}\omega^{ab}(z)\frac{\partial^L}{\partial z^b}g + f\frac{\partial^R}{\partial c^\alpha}\frac{\partial^L}{\partial_\alpha}g + f\frac{\partial^R}{\partial_\alpha}\frac{\partial^L}{\partial c^\alpha}g\,, \qquad (4..3)$$

где $\omega^{ab}(z) = \{z^a, z^b\}$ - компоненты бивектора Пуассона исходного фазового пространства. Заметим, что

$$|\{f,g\}| = |f| + |g|\, mod\, 2\,, \qquad gh(\{f,g\}) = gh(f) + gh(g)\,. \qquad (4..4)$$

По определению BRST заряд - это элемент Ω в A, удовлетворяющий:

$$|\Omega| = 1\,, \qquad gh(\Omega) = 1\,, \quad \Omega^* = \Omega \qquad \frac{1}{2}\{\Omega,\Omega\} = 0\,. \qquad (4..5)$$

Последнее соотношение часто называют мастер уравнением. BRST заряд кодирует в себя связи первого рода.

Другой компонентой BFV формулировки является BRST-инвариантный гамильтониан H. По определению это элемент A удовлетворяющий

$$|H| = 0\,, \quad gh(H) = 0\,, \quad H^* = H \qquad \{\Omega, H\} = 0\,. \qquad (4..6)$$

Процедура построения Ω и H по изначальному гамильтониану и связям первого рода T_α известна. Смотрите [26].

Для заданной системы рассмотрим следующее гамильтоново векторное поле:

$$sf = \{\Omega, f\} \qquad (4..7)$$

Легко проверить, что $gh(s) = |s| = 1$ $s^2 = 0$. Для данного гомологического оператора, определйнного на расширенной алгебре функций можно посчитать когомологии $H_\bullet(s)$. Тогда оказывается, что $H_0(s)$=\{наблюдаемые исходной гамильтоновой системы\}. Подробности смотрите в [26]. На классическом уровне этот факт объясняет важность BFV формализма.

Теперь сформулируем всё таки определение того чем, является BFV система.

Определение: BFV система - это супермногообразие, оснащённое градуировкой, симплектической структурой, BRST зарядом Ω, который подчиняется мастер уравнению, а также BRST инвариантным Гамильтонианом.

4.2. BV формализм

При построении BFV формализма мы никак не затронули действие (4..1). BV формулировка гамильтоновой системы, является обощённой теорией, действие которой записывается в терминах BRST заряда Ω и инвариантного гамильтониана H(z).

Действительно, обозначим за Z^A все переменные расширенного фазового пространства (z, c, P) и введём сопряженные им переменные Z^*_A удовлетворяющие соотношениям

$$gh(Z^*_A) = -gh(Z^A) - 1\,, \qquad |Z^*_A| = |Z^A| + 1\, mod\, 2\,. \tag{4..8}$$

Обозначим за $\sigma^{ext} = \sigma^{ext}_A(Z)dZ^A$ потенциал для симплектической структуры расширенного фазового пространства и запишем следующее действие.

$$S_{BV}[Z, Z^*] = \int dt \left(\sigma^{ext}_A \dot{Z}^A - H - Z^*_A\{Z^A, \Omega\}\right)\,. \tag{4..9}$$

Это действие является частным случаем так называемого BV мастер действия. Заметим, чтобы перейти от этого действия к исходному действию (4..1) нужно положить все переменные с $gh() \neq 0$ в нуль. Также справеделиво $gh(S_{BV}) = |S_{BV}| = 0$.

Структура переменных, от которых зависит S_{BV}, предполагает, что Z^*_A можно интерпретировать как импульсы, сопряженные с Z^A. Точнее, можно ввести нечетную скобку Пуассона, постулируя следующие соотношения:

$$(Z^A(t), Z^*_B(t')) = \delta^A_B \delta(t - t')\,. \tag{4..10}$$

Для произвольных функций можно записать:

$$(F,G) = \int dt \left(\frac{\delta^R F}{Z^A(t)} \frac{\delta^L G}{Z^*_A(t)} - \frac{\delta^R F}{Z^*_A(t)} \frac{\delta^L G}{Z^A(t)} \right) . \tag{4..11}$$

Нетрудно увидеть, что справедливы соотношения:

$$\begin{gathered} (F,G) = -(-1)^{(|F|+1)(|G|+1)}(G,F)\,, \\ (F,GH) = (F,G)H + (-1)^{(|F|+1)|G|}F(F,H)\,, \\ (F,(G,H)) = ((F,G),H) + (-1)^{(|F|+1)(|G|+1)}(G,(F,H))\,. \end{gathered} \tag{4..12}$$

$$gh((F,G)) = gh(F) + gh(G) + 1\,, \qquad |(F,G)| = |F| + |G| + 1\, mod\, 2\,. \tag{4..13}$$

Вводят BRST дифференциал s:

$$s = (\bullet, S_{BV}) \tag{4..14}$$

С точностью до граничных членов справедливо:

$$(S_{BV}, S_{BV}) = 0 \tag{4..15}$$

Последнее уравнение называется мастер уравнением BV теории.Так что же такое BV система в общем случае? Давайте определим базовые объекты и аксиомы для них:

- Пространство полей-антиполей (в рассмотренном выше случае это бесконечномерное многообразие с координатами $Z^A(t), Z^*_A(t)$).
- Градуировка и чётность .
- Нечётная скобка Пуассона градуировки 1, называемая также антискобкой. Она удовлетворяет градуированной версии обычных аксиом для скобки Пуассона. Она должна быть невырожденной и допускать приведение себя к каноническим координатам.
- Мастер действие S_{BV}, $gh(S_{BV}) = |S_{BV}| = 0$, которое удовлетворяет классическому мастер уравнению.
- Если положить в нуль все переменные с ненулевой градуировкой, то S_{BV} редуцируется до классического действия.

4.3. AKSZ конструкция

AKSZ конструкция - это простой способ генерировать различные теории поля, имеющие калибровочные симметрии. Причём эта конструкция так устроена, что конечная теория формулируется сразу в BV формализме. Рассмотрим подробнее её устройство.

Пусть имеется расслоение E с базой ПТХ (dim X=n) и слоем M. База - градуированное многообразие (градуировку обозначаем gh_X) с нечётным нильпотентным векторным полем d_X.От этого поля мы будем требовать следующее:

- $\mathrm{gh}_X(d_X)$=1
- d_X согласованн с формой объема на X
- $d_x = \theta^\mu \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ где (x^μ, θ^μ) -координаты на базе

Слой M также является градуированным многообразием со своей градуировкой gh_M. От M будем требовать наличия следующих структур и аксиом для них:

- α - градуированная симплектическая структура - 2 форма степени n-1
- α - невырождена
- α - точна, то есть $\alpha = d\phi$ для некоторой $\phi = \phi_a(\Psi)d\Psi^a$ где Ψ^a - локальные координаты на слое M.
- функция H, такая что gh(H)=n
- $\{ H, H\} = 0$ где скобка порождена соответсвующей симплектической структурой α.

Рассмотрим теперь сечения данного расслоения, то есть отображения

$$\sigma : T[1]X \to E \tag{4..16}$$

А также суперотображения $\overline{\sigma^*}$, записываемые в локальных координатах следующим образом:

$$\overline{\sigma}^*(\Psi^a) = \Psi^a(x,\theta) = \overset{0}{\Psi^a}(x) + \theta^\mu \overset{1}{\Psi_\mu}(x) + \frac{1}{2}\theta^\nu\theta^\mu \overset{2}{\Psi_{\nu\mu}}(x) + ... \tag{4..17}$$

Тогда имея заданные выше структуры, можно построить мастер действие Баталина-Вилковыского для AKSZ модели:

$$S_{BV}[\overline{\sigma}] = \int_{T[1]X} d\theta dx(\overline{\sigma}^*(\phi)(d_X) + \overline{\sigma}^*(H)) \tag{4..18}$$

$$S_{BV}[\Psi(x,\theta)] = \int_{T[1]X} d\theta dx(\phi_a(\Psi(x,\theta))d\Psi^a(x,\theta) + H(\Psi(x,\theta))) \tag{4..19}$$

Причём S удовлетворяет мастер уравнению с точностью до граничных членов:

$$(S_{BV}, S_{BV}) = 0 \tag{4..20}$$

Данная антискобка на пространстве отображений порождена с помощью симплектической структруры на таргет пространстве следуюдим образом:

$$(F,G) = (-1)^{(|G|+n)n} \int_{T[1]X} d\theta dx \frac{\delta^R F}{\delta\Psi^a(x,\theta)} E^{ab}(\Psi(x,\theta)) \frac{\delta^L G}{\delta\Psi^b(x,\theta)} \tag{4..21}$$

$$E^{ab} = \{\Psi^a, \Psi^b\} \tag{4..22}$$

БРСТ дифференциал в таком случае:

$$s\Psi^a(x,\theta) = (-1)^n(\Psi^a, S_{BV}) = d_X\Psi^a(x,\theta) + Q^a(\Psi(x,\theta)) \tag{4..23}$$

где:

$$Q^a(\Psi) = \{\Psi^a, H\} \tag{4..24}$$

Уравнения движения - это условие на плоскость сейчения для связности Q:

$$d_X \circ \sigma^* = \sigma^* \circ Q \tag{4..25}$$

$$d_X\Psi^a(x,\theta) - Q^a(\Psi(x,\theta)) = 0 \tag{4..26}$$

Общая степень в пространстве полей вводится следующим образом:

$$gh(A) = gh_X(A) + gh_M(A) \tag{4..27}$$

Тогда несложно заметить, что :

$$
\begin{aligned}
gh(S_{BV}) &= 0 \\
gh(s) &= 1
\end{aligned}
\tag{4..28}
$$

Поля с gh=0 считаются физическими, с числами gh>0 - духами, с gh<0 - антиполями Интересный факт - если размерность пространства времени X больше 1, а размерность слоя M конечна, то получаемая теория всегда будет топологической. Для построения теории с локальными степенями свободы, нужно рассматривать бесконечномерные пространства отображений.

4.3.1. AKSZ формулировка для теории Черна-Саймонса

Оказывается, что теорию Черна-Саймонса можно получить с помощью AKSZ конструкции. Действительно, Пусть g - полупростая алгебра, a dim X= 3. X - пространство время. В алгебре есть инвариантная метрика Киллинга η. Возьмём в качестве таргет пространства g[1]. Обозначим за (c^a) нечётные координаты на таргете. На этом супермногообразии возникает естественная 2 форма:

$$
\alpha = dc^a \wedge dc^b \eta_{ab} \tag{4..29}
$$

Она невырождена и как можно увидеть, точна:

$$
\alpha = d\phi = d(\eta_{ab} c^a dc^b) \tag{4..30}
$$

Порождённая скобка Пуассона:

$$
\{f, g\} = \frac{\partial^R f}{\partial c^a} \eta^{ab} \frac{\partial^L g}{\partial c^b} \tag{4..31}
$$

Также на g[1] присутствует такая естественная структура, как дифференциал Шевалье-Эйнберга:

$$
Q = \{H, \} = \frac{1}{2} c^a c^b f_{ab}^c \frac{\partial}{\partial c^c} \tag{4..32}
$$

который порождается гамильтонианом следующего вида:

$$H = \frac{1}{6} f_{abc} c^a c^b c^c \tag{4..33}$$

Теперь понятно, что у нас есть все для AKSZ конструкции.

$$c^a(x,\theta) = \overset{0}{c^a}(x) + \theta^\mu \overset{1}{A_\mu}(x) + \frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu \overset{2}{A^*_{\mu\nu}} + \frac{1}{6}\theta^\mu\theta^\nu\theta^\lambda \overset{3}{c^*_{\mu\nu\lambda}}(x) \tag{4..34}$$

Тогда само действие S_{BV}:

$$\begin{gathered} \mathrm{S}_{BV}[A,A^*,c,c^*] = \int_X Tr[\frac{1}{2}A\wedge dA + \frac{1}{6}A\wedge[A,A] + \frac{1}{2}A^*\wedge dc + \\ + \frac{1}{2}c\wedge dA^* + \frac{1}{2}c^*\wedge[c\wedge c]] \end{gathered} \tag{4..35}$$

4.3.2. AKSZ формулировка для 3х мерной гравитации

Гравитация в трёх измерениях эквивалентна двум теориям Черна-Саймонса, что заранее говорит нам о том, что гравитацию можно получить при помощи AKSZ конструкции. Пусть g[1] so(2,2) алгебра со сдвинутой на единичку градуировкой. Стандартные координаты $(\xi^a \rho^{ab})$ несут градуировку 1. На g[1] есть естественный диффренциал Шевалье-Эйнберга Q. Его действие:

$$\begin{aligned} Q\xi^a &= \rho^{ab}\xi_b \\ Q\rho^{ab} &= \rho^{ac}\rho^b_c - \Lambda\xi^a\xi^b \end{aligned} \tag{4..36}$$

Также на g[1] присутствует естественная 2 форма инвариантная относительно Q

$$\omega = \epsilon_{abc} d\xi^a d\rho^{bc} \tag{4..37}$$

Соответствующий потенциал:

$$\phi = \epsilon_{abc}\xi^a\rho^{bc} \tag{4..38}$$

Соответствующий гамильтониан:

$$H = \epsilon_{abc}\xi^c(\rho^a_c\rho^{cb} - \frac{\Lambda}{3}\xi^a\xi^c) \tag{4..39}$$

Будем строить суперотображение:

$$\overline{\sigma}^*(\xi^a) = \xi^a + e^a_\mu \theta^\mu + \frac{1}{2}\xi^a_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu + \frac{1}{6}\xi^a_{\mu\nu\lambda}\theta^\mu\theta^\nu\theta^\lambda$$
$$\overline{\sigma}^*(\rho^{ab}) = \rho^{ab} + \omega^{ab}_\mu \theta^\mu + \frac{1}{2}\rho^{ab}_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu + \frac{1}{6}\rho^{ab}_{\mu\nu\lambda}\theta^\mu\theta^\nu\theta^\lambda$$

(4..40)

Тогда само действие получится в нужном виде:

$$S_{BV} = \int (R^{ab} \wedge e^c - \frac{\Lambda}{3} e^a \wedge e^b \wedge e^c)\epsilon_{abc} + S[gh \neq 0] \qquad (4..41)$$

Таким образом, мы получили AKSZ формулировку для теории гравитации в трёх измерениях. Стоит отметить, что можно было выбрать другой базис в алгебре so(2,2), связанный с теорией Черна-Саймонса, тогда бы мы получили, в конечном действии разность двух действий (4..35)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведения работы по иследованию асимптотических симметрий в теории гравитации в 3-х измерениях с отрицательной космологической постоянной:

- Подробно рассмотрен переход от исходной теории гравитации с отрицательной космологической постоянной к теории Черна-Саймонса
- Подробно рассмотрена связь между теорией гравитации с отрицательной космологической постоянной и теорией Весс-Зумино-Виттена, естественно возникающей на границе
- Исследована алгебра асимптотических симметрий
- Получена AKSZ-BV формулировка для теории гравитации с отрицательной космологической постоянной.в трёх измерениях

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Покажем, что следующая калибровка в теории Черна-Саймонса всегда возможна

$$A_\rho = h^{-1}\partial_\rho h(\rho) \tag{4..42}$$

Пусть поле находится в какой-то произвольной конфигурации $A^{'}_{\rho}$. Сделаем преобразование с U - отображением из пространства времени в калибровочную группу.

$$U^{-1}A^{'}_{\rho}U + U^{-1}\partial_\rho U = h^{-1}\partial_\rho h \tag{4..43}$$

Введём $U^{'}$, так что $U = U^{'}h$, тогда:

$$\partial_\rho U^{'} = -A^{'}_{\rho}U^{'} \tag{4..44}$$

Откуда получаем:

$$U = \mathcal{P}exp(-\int^{\rho} A^{'}_{\rho}d\rho^{'})U_0 h \tag{4..45}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. J.David Brown(Texas U.), M. Henneaux(Texas U.) Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity Commun.Math.Phys. 104 (1986) 207-226

2. Glenn Barnich(Brussels U., PTM and Intl. Solvay Inst., Brussels), Cedric Troessaert(Brussels U., PTM and Intl. Solvay Inst., Brussels) (Jan, 2010) Aspects of the BMS/CFT correspondence 1001.1541 [hep-th]

3. Glenn Barnich(Brussels U., PTM), Cedric Troessaert(Brussels U., PTM) (Jun, 2011) BMS charge algebra 1106.0213 [hep-th]

4. I.A. Batalin(Lebedev Inst.), G.A. Vilkovisky(Moscow, Standards Committee) Quantization of Gauge Theories with Linearly Dependent Generators Phys.Rev.D 28 (1983) 2567-2582

5. M. Alexandrov(UC, Davis, Dept. Math.), A. Schwarz(UC, Davis, Dept. Math.), O. Zaboronsky(UC, Davis, Dept. Math.), M. Kontsevich(UC, Berkeley, Math. Dept.) (Feb, 1995) The Geometry of the master equation and topological quantum field theory hep-th/9502010 [hep-th]

6. H. Bondi, M. van der Burg, and A. Metzner, "Gravitational Waves in General Relativity. 7. Waves from Axisymmetric Isolated Systems," Proc. Roy. Soc. Lond. A 269 (1962) 21–52.

7. R. Sachs, "Gravitational Waves in General Relativity. 8. Waves in Asymptotically Flat Space-times," Proc. Roy. Soc. Lond. A 270 (1962) 103–126

8. Andrew Strominger(Harvard U.), Alexander Zhiboedov(Harvard U.) (Nov 20, 2014) Gravitational Memory, BMS Supertranslations and Soft Theorems 1411.5745 [hep-th]

9. Andrew Strominger(Harvard U.) (Mar 15, 2017) Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory 1703.05448 [hep-th]

10. Edward Witten(Princeton, Inst. Advanced Study) (Feb, 1998) Anti-de Sitter space and holography hep-th/9802150 [hep-th]

11. O. Coussaert, M. Henneaux, and P. van Driel, "The Asymptotic dynamics of three-dimensional Einstein gravity with a negative cosmological constant," Class.Quant.Grav. 12 (1995) 2961, arXiv:gr-qc/9506019 [gr-qc].

12. Maximo Banados Three-dimensional quantum geometry and black holes hep-th/9901148 [hep-th]

13. Maximo Banados Global charges in Chern-Simons field theory and the (2+1) black hole hep-th/9405171 [hep-th]

14. S. Carlip, Quantum Gravity in 2+1 Dimensions, Cambridge University Press (1998)

15. M. Henneaux and C. Teitelboim, Quantization of Gauge Systems (Princeton University Press, Princeton, 1992.

16. M. Banados, T. Brotz and M. Ortiz, "Boundary dynamics and the statistical mechanics of the 2+1 dimensional black hole", hep-th/9802076

17. Gerald V. Dunne Aspects of Chern-Simons theory hep-th/9902115 [hep-th]

18. Andrea Campoleoni(Potsdam, Max Planck Inst.), Stefan Fredenhagen(Potsdam, Max Planck Inst.), Stefan Pfenninger(Potsdam, Max Planck Inst.), Stefan Theisen(Potsdam, Max Planck Inst.) Asymptotic symmetries of three-dimensional gravity coupled to higher-spin fields 1008.4744 [hep-th]

19. Glenn Barnich Dual dynamics of three dimensional asymptotically flat Einstein gravity at null infinity 1303.1075 [hep-th]

20. Laura DonnayAsymptotic dynamics of three-dimensional gravity 1602.09021 [hep-th]

21. J. D. Brown and M. Henneaux, "Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity," Commun.Math.Phys. 104 (1986) 207–226.

22. E. Witten, "Three-Dimensional Gravity Revisited", arXiv:hep-th/0706.3359 .

23. K. Gawedzki, Conformal field theory: A Case study.

24. P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, Conformal Field theory. Springer, 1996.

25. Joaquim Gomis(Texas U. and Barcelona U.), Jordi Paris(Leuven U.), Stuart Samuel(City Coll., N.Y.) Antibracket, antifields and gauge theory quantization hep-th/9412228 [hep-th]

26. Ikeda, N. Lectures on AKSZ Topological Field Theories for Physicists 2012

27. Grigoriev, M. Parent formulations, frame-like Lagrangians, and generalized auxiliary fields JHEP, 2012, 1212, 048

28. Maxim Grigoriev(Lebedev Inst. and ITMP, Moscow), Alexei Kotov(Hradec Kralove U.)Presymplectic AKSZ formulation of Einstein gravity 2008.11690 [hep-th]

29. Bekaert, Xavier and Grigoriev, Maxim Notes on the ambient approach to boundary values of AdS gauge fields arxiv 1207.3439

30. Bekaert, Xavier and Grigoriev, Maxim Higher order singletons, partially massless fields and their boundary values in the ambient approach arxiv 1305.0162

31. Maxim Grigoriev(Lebedev Inst.) (Dec, 2010) Parent formulation at the Lagrangian level 1012.1903 [hep-th]

32. Glenn Barnich(Brussels U., PTM and Intl. Solvay Inst., Brussels), Maxim Grigoriev(Lebedev Inst.) (Sep, 2010) First order parent formulation for generic gauge field theories 1009.0190 [hep-th]

33. K. Rejzner and M. Schiavina, doi:10.1007/s00220-021-04061-7 [arXiv:2002.09957 [math-ph]]

34. Pavel Mnev(Notre Dame U. and Steklov Math. Inst., St. Petersburg), Michele Schiavina(Zurich, ETH and Zurich, ETH D-MATH), Konstantin Wernli(Humboldt U., Berlin, Inst. Math. and Zurich U., Inst. Math.) (May 2, 2019) Towards holography in the BV-BFV setting 1905.00952 [math-ph]