АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ ГРАВИТАЦИИ В ТРЁХ ИЗМЕРЕНИЯХ В РАМКАХ AKSZ-BV ФОРМАЛИЗМА

Агафонов Григорий
443 группа.

Научный руководитель: Григорьев Максим Анатольевич кандидат физико-математических наук, заместитель директора ИТМФ МГУ.

Москва, 2021 г.

МГУ им. М.В.Ломоносова.
Физический факультет.

Введение

Асимптотические симметрии в гравитации были известны по крайней мере с 60-ых годов прошлого века, и в последнее время наблюдается значительный всплеск интереса к этой теме. В общем случае произвольного числа измерений вопрос изучения асимптотических симметрий является довольно сложным. Поэтому для упрощения зачастую рассматриваются специальные случаи. Таким специальным случаем является случай d=3. В трёх измерениях и при отсутствии границы гравитация становится топологической теорией. В данной работе исследуются асимптотические симметрии в теории гравитации в трёх измерениях с отрицательной космологической постоянной на многообразии с топологией цилиндра

От гравитации к теории Черна-Саймонса

Рассмотрим классическую гравитацию в трёх измерениях с отрицательной космологической постоянной.

$$S[e,\omega] = \frac{1}{8\pi G}\int e^a \wedge R^b \eta_{ab} + \frac{1}{6l^2}(e^a \wedge e^b \wedge e^c)\epsilon_{abc} \qquad (1)$$

Пусть x - комплексное число. Введём два новых поля $A^a = \omega^a + xe^a$ и $\overline{A^a} = \omega^a - xe^a$. Тогда непосредственной подстановкой можно убедиться в справедливости равенства:

$$2e^a \wedge R_a + \frac{x^2}{3}\epsilon_{abc}e^a \wedge e^b \wedge e^c = \frac{1}{2x}(A^a \wedge dA_a + \frac{1}{3}\epsilon_{abc}A^a \wedge A^b \wedge A^c) - \\ - \frac{1}{2x}(\overline{A^a} \wedge \overline{dA_a} + \frac{1}{3}\epsilon_{abc}\overline{A^a} \wedge \overline{A^b} \wedge \overline{A^c}) + dB$$

где $B = \omega^a \wedge e_a$. Таким образом, выбирая в качестве $x = \frac{1}{l}$, получаем

От гравитации к теории Черна-Саймонса

$$S[e,\omega] = S[A,\overline{A}] = S_{CS}(A) - S_{CS}(\overline{A}) + C \tag{3}$$

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi}\int d^3x Tr(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A) \tag{4}$$

где C - это кусок связанный с граничным членом dB. Поля $A = A^a j_a$ и $\overline{A} = \overline{A}^a j_a$ принадлежат алгебре sl(2,R)

$$k = \frac{l}{4G}$$

Будем считать, что многообразие M на котором задана теория имеет топологию цилиндра. В координатах (ρ,ϕ,t) граница находится на $\rho\to\infty$ а координата ϕ - циклическая. Граничные условия в координатах светового конуса:

$$A_-|_{\partial M} = 0 \tag{5}$$

$$\overline{A}_+|_{\partial M} = 0 \tag{6}$$

От теории Черна-Саймонса к теории WZW

$$S[A] = S^H_{CS}(A) + \kappa \int_{\partial M} dt d\phi Tr[A^2_\phi] \tag{7}$$

Если варьировать по A_t, то получим следующее уравнение:

$$F_{\phi,\rho} = 0 \tag{8}$$

Решим его в калибровке:

$$A_\rho = h^{-1}(\rho)\partial_\rho h(\rho) \tag{9}$$

Решение:

$$A_\rho = G^{-1}\partial_\rho G \tag{10}$$

$$A_\phi = G^{-1}\partial_\phi G \tag{11}$$

где G - это отображение из M в группу Ли SL(2,R). Стоит также отметить, что из-за условия калибровки, G факторизуется $G = g(\phi, t)h(\rho)$.

От теории Черна-Саймонса к теории WZW

$$S[A]|_{sol} = -2\kappa \int_{\partial M} dtd\phi Tr[g^{-1}\partial_\phi g g^{-1}\partial_- g] - \kappa\Gamma[G] = S^R_{WZW}[g] \quad (12)$$

$$S[\overline{A}]|_{sol} = -2\kappa \int_{\partial M} dtd\phi Tr[\overline{g}^{-1}\partial_\phi \overline{g}\overline{g}^{-1}(\partial_+ \overline{g})] - \kappa\Gamma[\overline{G}] = S^L_{WZW}[\overline{g}] \quad (13)$$

Объеденяя эти два куска, можно получить:

$$S[k]_{WZW} = -2\kappa \int_{\partial M} d\tau d\phi Tr[k^{-1}\partial_+ k k^{-1}\partial_- k] + \frac{\kappa}{3}\int_M Tr[(K^{-1}dK)^3] \quad (14)$$

Токи в теории

$$J_- = \overline{a_-}$$

$$J_+ = a_+$$

$$a = g^{-1}dg$$

(15)

Асимптотические симметрии

Симметриями $S_{CS}[A]$ являются преобразования следующего вида:

$$\delta A^a_\mu = D_\mu \lambda^a \qquad D = d + [A, \bullet] \tag{16}$$

$$\delta A_-|_{\partial M} = D_- \lambda = \partial_- \lambda = 0 \to \lambda|_{\partial M} = \lambda(x^+) \tag{17}$$

Как генерируются эти симметрии?

$$D_i \lambda = \{A_i, G(\lambda)\} \tag{18}$$

$$G(\lambda) = \kappa \int_\Sigma dx^i \wedge dx^j\, Tr(\lambda F_{ij}) + Q(\lambda) \tag{19}$$

$$Q(\lambda) = -2\kappa \int_{\partial\Sigma} dx^i\, Tr(\lambda A_i) \tag{20}$$

Данные генераторы удовлетворяют следующей алгебре:

$$\{Q(\lambda), Q(\gamma)\} = Q([\lambda, \gamma]) + 2\kappa \int_{\partial\Sigma} dx^i\, Tr(\lambda \partial_i \gamma) \tag{21}$$

AKSZ-BV

Пусть имеется расслоение E с базой ПТХ (dim X=n) и слоем M. База - градуированное многообразие (градуировку обозначаем gh_X) с нечётным нильпотентным векторным полем d_X. От этого поля мы будем требовать следующее:

- $\mathrm{gh}_X(d_X)$=1
- d_X согласованн с формой объема на X
- $d_x = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ где (x^μ, θ^μ) -координаты на базе

Слой M также является градуированным многообразием со своей градуировкой gh_M. От M будем требовать наличия следующих структур и аксиом для них:

- α - градуированная симплектическая структура - 2 форма степени n-1, невырожденная и точная $\alpha = d\phi$
- функция H, такая что $gh_M(H) = n$
- $\{\ H, H\}\ = 0$ где скобка порождена α

Рассмотрим теперь сечения данного расслоения, то есть отображения

$$\sigma : T[1]X \to E \tag{22}$$

А также суперотображения $\overline{\sigma^*}$, записываемые в локальных координатах следующим образом:

$$\overline{\sigma}^*(\Psi^a) = \Psi^a(x,\theta) = \overset{0}{\Psi^a}(x) + \theta^\mu \overset{1}{\Psi_\mu}(x) + \frac{1}{2}\theta^\nu\theta^\mu \overset{2}{\Psi_{\nu\mu}}(x) + \dots \tag{23}$$

Тогда имея заданные выше структуры, можно построить мастер действие Баталина-Вилковыского для AKSZ модели:

$$S_{BV}[\overline{\sigma}] = \int_{T[1]X} d\theta dx(\overline{\sigma}^*(\phi)(d_X) + \overline{\sigma}^*(H)) \tag{24}$$

$$S_{BV}[\Psi(x,\theta)] = \int_{T[1]X} d\theta dx(\phi_a(\Psi(x,\theta))d\Psi^a(x,\theta) + H(\Psi(x,\theta))) \tag{25}$$

AKSZ-BV

Оказывается, что теорию Черна-Саймонса можно получить с помощью AKSZ конструкции. Действительно, Пусть g - полупростая алгебра, а dim X= 3. X - пространство время. В алгебре есть инвариантная метрика Киллинга η. Возьмём в качестве таргет пространства g[1]. Обозначим за (c^a) нечётные координаты на таргете. На этом супермногообразии возникает естественная 2 форма:

$$\alpha = dc^a \wedge dc^b \eta_{ab} \tag{26}$$

Она невырождена и как можно увидеть, точна:

$$\alpha = d\phi = d(\eta_{ab} c^a dc^b) \tag{27}$$

Порождённая скобка Пуассона:

$$\{f, g\} = \frac{\partial^R f}{\partial c^a} \eta^{ab} \frac{\partial^L g}{\partial c^b} \tag{28}$$

Также на g[1] присутствует такая естественная структура, как дифференциал Шевалье-Эйнберга:

$$Q = \{H, \} = \frac{1}{2} c^a c^b f_{ab}^c \frac{\partial}{\partial c^c} \tag{29}$$

$$H = \frac{1}{6} f_{abc} c^a c^b c^c \tag{30}$$

Теперь понятно, что у нас есть все для AKSZ конструкции.

$$c^a(x, \theta) = \overset{0}{c^a}(x) + \theta^\mu \overset{1}{A_\mu}(x) + \frac{1}{2}\theta^\mu \theta^\nu \overset{2}{A^*_{\mu\nu}} + \frac{1}{6}\theta^\mu \theta^\nu \theta^\lambda \overset{3}{c^*_{\mu\nu\lambda}}(x) \tag{31}$$

Тогда само действие S_{BV}:

$$\begin{gathered} \mathrm{S}_{BV}[A, A^*, c, c^*] = \textstyle\int_X Tr[\frac{1}{2} A \wedge dA + \frac{1}{6} A \wedge [A, A] + \frac{1}{2} A^* \wedge dc + \\ + \frac{1}{2} c \wedge dA^* + \frac{1}{2} c^* \wedge [c \wedge c]] \end{gathered} \tag{32}$$

Тогда для теории гравитации будет справедливо:

$$S_{BV}^{gravity} = S_{BV}[A] - S_{BV}[\overline{A}] \tag{33}$$

Заключение

В результате проведения работы по иследованию асимптотических симметрий в теории гравитации в 3-х измерениях с отрицательной космологической постоянной:

- Подробно рассмотрен переход от исходной теории гравитации с отрицательной космологической постоянной к теории Черна-Саймонса
- Подробно рассмотрена связь между теорией гравитации с отрицательной космологической постоянной и теорией Весс-Зумино-Виттена, естественно возникающей на границе
- Исследована алгебра асимптотических симметрий
- Получена AKSZ-BV формулировка для теории гравитации с отрицательной космологической постоянной.в трёх измерениях