Взаимодействие электромагнитных волн в нелинейной электродинамике

Бабёнов Глеб Игоревич
211 группа
Научный руководитель:
к.ф.-м.н. н.с. ОТФ ИЯИ РАН Пётр Сергеевич Сатунин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

16 мая 2022

Используемые обозначения и система единиц

- Система единиц Хевисайда: $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = \hbar = 1$

Используемые обозначения и система единиц

- Система единиц Хевисайда: $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = \hbar = 1$
- Метрика Минковского:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Используемые обозначения и система единиц

- Система единиц Хевисайда: $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = \hbar = 1$
- Метрика Минковского:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 4-потенциал: $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (\varphi, A_x, A_y, A_z) \equiv (\varphi, \mathbf{A})$
- Напряжённости полей: $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \ \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$

Используемые обозначения и система единиц

- Система единиц Хевисайда: $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = \hbar = 1$
- Метрика Минковского:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 4-потенциал: $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (\varphi, A_x, A_y, A_z) \equiv (\varphi, \mathbf{A})$
- Напряжённости полей: $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi,\ \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$
- Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ и дуальный к нему $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},\ \widetilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & E_z & -E_y \\ -H_y & -E_z & 0 & E_x \\ -H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Используемые обозначения и система единиц

- Система единиц Хевисайда: $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = \hbar = 1$
- Метрика Минковского:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 4-потенциал: $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (\varphi, A_x, A_y, A_z) \equiv (\varphi, \mathbf{A})$
- Напряжённости полей: $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \ \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$
- Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ и дуальный к нему $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & E_z & -E_y \\ -H_y & -E_z & 0 & E_x \\ -H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

- Инварианты поля: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2), \ F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = -4(\mathbf{E}, \mathbf{H})$

Фундамент работы

Плотность функции Лагранжа свободного электромагнитного поля в теории Эйлера-Гейзенберга

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left((F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{4}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2\right),$$

где m_e – масса электрона, $\alpha_e = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ – постоянная тонкой структуры.

Краткий обзор свободного поля в классической электродинамике

Интеграл действия:

$$S = \iint \mathcal{L}\left(A_\alpha, \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}\right) dV\,dt$$

Краткий обзор свободного поля в классической электродинамике

Интеграл действия:

$$S = \iint \mathcal{L}\left(A_\alpha, \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}\right) dV\,dt$$

Уравнения поля (Эйлера-Лагранжа), полученные путём его варьирования:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0$$

Краткий обзор свободного поля в классической электродинамике

В случае электромагнитного поля:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha},$$

Краткий обзор свободного поля в классической электродинамике

В случае электромагнитного поля:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha},$$

откуда при подстановке в уравнения Эйлера-Лагранжа получается $\partial_\mu F^{\mu\alpha} = 0$:

Первая пара уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Краткий обзор свободного поля в классической электродинамике

В случае электромагнитного поля:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha},$$

откуда при подстановке в уравнения Эйлера-Лагранжа получается $\partial_\mu F^{\mu\alpha} = 0$:

Первая пара уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Из определения тензора $\widetilde{F}^{\mu\alpha}$ получается $\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\alpha} = 0$:

Вторая пара уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Краткий обзор свободного поля в классической электродинамике

Тензор энергии-импульса по определению:

$$T_\mu^\nu = \partial_\mu A_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}$$

и его свойство $\partial_\nu T_\mu^\nu = 0$.
Симметризованный тензор в случае электромагнитного поля:

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\gamma\tau} F^{\gamma\tau},$$

Краткий обзор свободного поля в классической электродинамике

Тензор энергии-импульса по определению:

$$T_\mu^\nu = \partial_\mu A_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}$$

и его свойство $\partial_\nu T_\mu^\nu = 0$.
Симметризованный тензор в случае электромагнитного поля:

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\gamma\tau} F^{\gamma\tau},$$

откуда получается:

Плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \Theta^{00} = \frac{E^2 + H^2}{2}$$

Нелинейная теория

Варьируем действие в теории Эйлера-Гейзенберга:

$$\delta S = \iint \Big[- F^{\nu\alpha} + \frac{\alpha_e^2}{90 m_e^4}\Big(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\nu\alpha} +$$

$$+ 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^{\nu\alpha}\Big)\Big] \delta(\partial_\nu A_\alpha) dx^\nu dS_\nu = 0,$$

Нелинейная теория

Варьируем действие в теории Эйлера-Гейзенберга:

$$\delta S = \iint \Big[- F^{\nu\alpha} + \frac{\alpha_e^2}{90 m_e^4} \big(8 (F_{\gamma\tau} F^{\gamma\tau}) F^{\nu\alpha} +$$

$$+ 14 (F_{\gamma\tau} \widetilde{F}^{\gamma\tau}) \widetilde{F}^{\nu\alpha} \big) \Big] \delta(\partial_\nu A_\alpha) dx^\nu dS_\nu = 0,$$

интегрируя по частям, приходим к:

Нелинейные уравнения Максвелла

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[F^{\nu\alpha} - \frac{\alpha_e^2}{90 m_e^4} \left(8 (F_{\gamma\tau} F^{\gamma\tau}) F^{\nu\alpha} + 14 (F_{\gamma\tau} \widetilde{F}^{\gamma\tau}) \widetilde{F}^{\nu\alpha} \right) \right] = 0 \qquad (1)$$

Нелинейная теория

Тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = \left[-F^{\nu}_{\alpha} + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\nu}_{\alpha} + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^{\nu}_{\alpha}\right)\right]\partial^{\mu}A^{\alpha} +$$

$$+\frac{1}{4}(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})\eta^{\mu\nu} - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left((F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})^2 + \frac{7}{4}(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})^2\right)\eta^{\mu\nu}$$

Нелинейная теория

Тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = \left[-F^{\nu}_{\alpha} + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\nu}_{\alpha} + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^{\nu}_{\alpha}\right)\right]\partial^{\mu}A^{\alpha} +$$

$$+\frac{1}{4}(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})\eta^{\mu\nu} - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left((F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})^2 + \frac{7}{4}(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})^2\right)\eta^{\mu\nu}$$

Симметризуем при помощи (1):

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left[F^{\nu}_{\alpha}A^{\mu} - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\nu}_{\alpha} + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^{\nu}_{\alpha}\right)A^{\mu}\right]$$

Нелинейная теория

Симметризованный тензор энергии-импульса:

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})F^{\mu\alpha}\widetilde{F}^{\nu}_{\alpha}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})\eta^{\mu\nu} - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left((F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})^2 + \frac{7}{4}(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})^2\right)\eta^{\mu\nu},$$

Нелинейная теория

Симметризованный тензор энергии-импульса:

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})F^{\mu\alpha}\widetilde{F}^{\nu}_{\alpha}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})\eta^{\mu\nu} - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left((F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})^2 + \frac{7}{4}(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})^2\right)\eta^{\mu\nu},$$

откуда получается:

Плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \Theta^{00} = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) + \frac{2\alpha_e^2}{45m_e^4}\left(3E^4 - 2E^2H^2 - H^4 + 7(\mathbf{E},\mathbf{H})^{\mathbf{2}}\right) \quad (2)$$

Исследование характера взаимодействия двух лучей в вакууме

Исследование характера взаимодействия двух лучей в вакууме (параллельные лучи)

- $W = \iiint w dV = W_l + W_{EH}$ – полная энергия двух ограниченных в пространстве лучей
- $\mathbf{E}_{1,2} = \mathbf{e}_z E_0 \cos(\omega t - kx)$ – напряжённости лучей
- $H^2 = E^2$ в нашей системе единиц

Исследование характера взаимодействия двух лучей в вакууме (параллельные лучи)

Один пример:

$$W_l = \frac{1}{2}\int_0^h dz \Big(\int_0^{h-\rho} dy \int_0^l (E_1^2 + H_1^2) dx +$$

$$+ \int_{h-\rho}^h dy \int_0^l \big((\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 + (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^2 \big) dx + \int_h^{2h-\rho} dy \int_0^l (E_2^2 + H_2^2) dx \Big)$$

«Линейная» и «нелинейная» части энергии:

$$W_l = 2h(h+\rho)\int_0^l E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) dx, \ W_{EH} = 0$$

Исследование характера взаимодействия двух лучей в вакууме (параллельные лучи)

Один пример:

$$W_l = \frac{1}{2}\int_0^h dz \Big(\int_0^{h-\rho} dy \int_0^l (E_1^2 + H_1^2) dx +$$

$$+ \int_{h-\rho}^h dy \int_0^l \left((\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 + (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^2 \right) dx + \int_h^{2h-\rho} dy \int_0^l (E_2^2 + H_2^2) dx \Big)$$

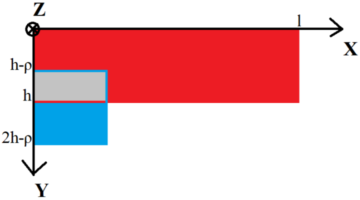
«Линейная» и «нелинейная» части энергии:

$$W_l = 2h(h+\rho) \int_0^l E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) dx, \; W_{EH} = 0$$

Случай другой конфигурации плоскостей поляризации $\mathbf{k}_{1,2} \uparrow\uparrow OX$ и $\mathbf{E}_1 \uparrow\uparrow OZ$ ($\mathbf{H}_1 \uparrow\downarrow OY$), однако $\mathbf{E}_2 \uparrow\uparrow OY$ ($\mathbf{H}_2 \uparrow\uparrow OZ$):

$$W_l = 2h^2 \int_0^l E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) dx, \; W_{EH} = 0$$

Исследование характера взаимодействия двух лучей в вакууме (перпендикулярные лучи)



Конфигурация лучей:
$\mathbf{k}_1 \uparrow\uparrow OX$, $\mathbf{E}_1 \uparrow\uparrow OZ$, $\mathbf{H}_1 \uparrow\downarrow OY$; $\mathbf{k}_2 \uparrow\uparrow OZ$, $\mathbf{E}_2 \uparrow\downarrow OY$, $\mathbf{H}_2 \uparrow\uparrow OX$.

Исследование характера взаимодействия двух лучей в вакууме (перпендикулярные лучи)

Конфигурация лучей:

$\mathbf{k}_1 \uparrow\uparrow OX$, $\mathbf{E}_1 \uparrow\uparrow OZ$, $\mathbf{H}_1 \uparrow\downarrow OY$; $\mathbf{k}_2 \uparrow\uparrow OZ$, $\mathbf{E}_2 \uparrow\downarrow OY$, $\mathbf{H}_2 \uparrow\uparrow OX$.

Полная энергия лучей

$$W = h^2 \left(\int_0^l E_1^2 dx + \int_0^l E_2^2 dz \right) + \frac{14\alpha_e^2}{45 m_e^4} \rho \int_0^l E_1^2 dx \int_0^l E_2^2 dz$$

Оценка амплитуды

При силе, равной 660 Н, $h = 5$ см и $\lambda = 500$ нм:

$$F_{waves} = \left| -\frac{\partial W}{\partial \rho} \right| = \frac{14\alpha_e^2 \hbar^3 \varepsilon_0^2}{45 m_e^4 c^5} \int_0^h \int_0^h (\mathbf{E}_2, c\mathbf{B}_1)^2 dxdz = 660\text{Н};$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 = -\mu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x) = -\frac{1}{c} E_0 \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x);$$

$$\mathbf{E}_2 = -E_0 \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z);$$

Оценка амплитуды

При силе, равной 660 Н, $h = 5$ см и $\lambda = 500$ нм:

$$F_{waves} = \left| -\frac{\partial W}{\partial \rho} \right| = \frac{14\alpha_e^2 \hbar^3 \varepsilon_0^2}{45 m_e^4 c^5} \int_0^h \int_0^h (\mathbf{E}_2, c\mathbf{B}_1)^2 dx dz = 660\text{Н};$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 = -\mu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x) = -\frac{1}{c} E_0 \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x);$$

$$\mathbf{E}_2 = -E_0 \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z);$$

Амплитуда электрической составляющей поля

$$E_0 \approx 1.8 \cdot 10^{14}\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

Итоги и перспективы

Итоги:

- нелинейные уравнения поля;
- плотность энергии электромагнитного поля в теории Эйлера-Гейзенберга;
- характер взаимодействия лучей;
- оценка амплитуды

Перспективы:

- экспериментальная проверка теоретических результатов;
- численное исследование явления;
- описание более общих случаев

Спасибо за внимание!

Да пребудет с вами Сила.