Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА

«Взаимодействие электромагнитных волн в нелинейной электродинамике»

студента 211-й группы Бабёнова Глеба Игоревича

Научный руководитель
к.ф.-м.н. н.с. ОТФ ИЯИ РАН Пётр Сергеевич Сатунин

Москва 2022

Содержание

1 Введение

1.1 Обзор

Классическая электродинамика, основанная на уравнениях Максвелла, является линейной теорией – в ней отсутствует взаимодействие электромагнитных волн друг с другом.

Тем не менее, из-за квантовых поправок, описываемых теорией Эйлера-Гейзенберга, такое взаимодействие возникает. Согласно этой теории к лагранжиану свободного электромагнитного поля добавляются нелинейные слагаемые, появляющиеся в результате рождения в вакууме двумя начальными фотонами виртуальной электрон-позитронной пары и последующей аннигиляции этой пары в конечные кванты [2].

В представленной работе автор описывает характер самовоздействия электромагнитного излучения, используя энергетический подход, в основе которого лежит теория Эйлера-Гейзенберга.

1.2 Система единиц и основные соотношения

Далее будет использована система единиц Хевисайда (HL), в которой $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = \hbar = 1$, а все остальные величины имеют размерности различных степеней массы. Вся последующая теория будет строиться в пространстве Минковского с метрикой

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Напряжённости электрического и магнитного полей выражаются через 4-потенциал поля $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (\varphi, A_x, A_y, A_z) \equiv (\varphi, \mathbf{A})$:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi,\ \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Упомянутый выше лагранжиан выглядит следующим образом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left((F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{4}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2\right), \tag{1}$$

где m_e – масса электрона, $\alpha_e = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ – постоянная тонкой структуры в данной системе единиц, а компоненты тензора электромагнитного поля, определяемого соотношением $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ($\partial_\mu A_\nu \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$), имеют вид

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \; F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \\
\widetilde{F}_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & E_z & -E_y \\ -H_y & -E_z & 0 & E_x \\ -H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}, \; \widetilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2}$$

поскольку $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$. Исходя из этого, можно построить два инварианта (истинный скаляр и псевдоскаляр, соответственно)

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2), \; F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = -4(\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

2 Теоретическая часть

2.1 Плотность энергии электромагнитного поля в линейном случае

Рассмотрим некоторую систему, интеграл действия для которой имеет вид

$$S = \iint \mathcal{L}\left(A_\alpha, \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}\right) dV dt = \frac{1}{c}\int \mathcal{L} d\Omega,$$

где $\mathcal{L}$ в данном случае – «плотность» функции Лагранжа.

Уравнения поля получаются согласно принципу наименьшего действия путем варьирования S

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha}\delta A_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)}\delta\partial_\mu A_\alpha\right) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)}\right) \delta A_\alpha d\Omega = 0.$$

Таким образом, мы приходим к следующим уравнениям поля

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0.$$

Далее запишем следующее выражение

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha}\partial_\mu A_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)}\partial_\mu\partial_\nu A_\alpha.$$

Подставляя сюда уравнения поля и замечая, что $\partial_\mu \partial_\nu A_\alpha = \partial_\nu \partial_\mu A_\alpha$, получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} \right) \partial_\mu A_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} \partial_\nu \partial_\mu A_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\partial_\mu A_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} \right).$$

Введём обозначение

$$T_\mu^\nu = \partial_\mu A_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \tag{3}$$

– тензор энергии-импульса и перепишем полученное соотношение в виде

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x^\nu} = 0.$$

В случае электромагнитного поля величина $\mathcal{L}$ равна

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\nu\alpha} F^{\nu\alpha}.$$

Для вычисления стоящей здесь производной от $\mathcal{L}$ напишем вариацию

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{1}{2} F^{\nu\alpha} \delta \left(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu \right) = -F^{\nu\alpha} \delta(\partial_\nu A_\alpha).$$

Отсюда мы видим, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} = -F^{\nu\alpha},$$

и поэтому

$$T_\mu^\nu = -(\partial_\mu A_\alpha) F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F_{\gamma\tau} F^{\gamma\tau},$$

или для контравариантных компонент

$$T^{\mu\nu} = -(\partial^\mu A^\alpha) F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\gamma\tau} F^{\gamma\tau}.$$

Симметризуем тензор, прибавив к нему $(\partial^\alpha A^\mu) F_\alpha^\nu$. Согласно уравнениям Максвелла в отсутствие зарядов $\frac{\partial F_\alpha^\nu}{\partial x_\alpha} = 0$, а потому

$$(\partial^\alpha A^\mu) F_\alpha^\nu = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (A^\mu F_\alpha^\nu).$$

Итак, мы пришли к следующему выражению для тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\gamma\tau} F^{\gamma\tau}.$$

С помощью компонент тензора электромагнитного поля (2) легко получаем, что $\Theta^{00} = w = \frac{E^2 + H^2}{2}$ – плотность энергии электромагнитного поля.

2.2 Плотность энергии электромагнитного поля в нелинейном случае

Теперь выведем плотность энергии в случае учёта взаимодействий поля с виртуальными частицами. Как было сказано ранее, лагранжиан в такой нелинейной теории имеет вид (1). Получим выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля. По аналогии с предыдущим пунктом сперва найдём вариацию $\mathcal{L}$

$$\delta\mathcal{L} = -F^{\nu\alpha}\delta(\partial_\nu A_\alpha) + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left[2F_{\nu\alpha}F^{\nu\alpha}\delta(F_{\nu\alpha}F^{\nu\alpha}) + \frac{7}{2}F_{\nu\alpha}\widetilde{F}^{\nu\alpha}\delta(F_{\nu\alpha}\widetilde{F}^{\nu\alpha})\right] =$$

$$= \left[-F^{\nu\alpha} + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\nu\alpha} + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^{\nu\alpha}\right)\right]\delta(\partial_\nu A_\alpha).$$

Подставляя производную $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^\alpha)}$ в формулу (3), для контравариантных компонент будем иметь

$$T^{\mu\nu} = \left[-F^{\nu}_{\alpha} + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\nu}_{\alpha} + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^{\nu}_{\alpha}\right)\right]\partial^\mu A^\alpha +$$

$$+\frac{1}{4}(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})\eta^{\mu\nu} - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left((F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})^2 + \frac{7}{4}(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})^2\right)\eta^{\mu\nu}.$$

Для дальнейшего вывода необходимо симметризовать этот тензор. В линейном случае мы использовали уравнения Максвелла, которые являются следствием принципа наименьшего действия в применимости к электромагнитному полю. Поступим тем же образом, а именно найдём вариацию действия

$$\delta S = \delta\int\left[-\frac{1}{4}F_{\nu\alpha}F^{\nu\alpha} + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left((F_{\nu\alpha}F^{\nu\alpha})^2 + \frac{7}{4}(F_{\nu\alpha}\widetilde{F}^{\nu\alpha})^2\right)\right]d\Omega =$$

$$= \iint\left[-F^{\nu\alpha} + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\nu\alpha} + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^{\nu\alpha}\right)\right]\delta(\partial_\nu A_\alpha)dx^\nu dS_\nu,$$

интегрируя по частям, получим

$$\delta S = \int\left[-F^{\nu\alpha} + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\nu\alpha} + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^{\nu\alpha}\right)\right]\delta A_\alpha dS_\nu +$$

$$+\int\delta A_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[F^{\nu\alpha} - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\nu\alpha} + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^{\nu\alpha}\right)\right]d\Omega,$$

где первое слагаемое зануляется, поскольку поле на бесконечности, являющейся пределами пространственного интегрирования, равно нулю, а также вариация потенциалов в начальный и конечный моменты времени равна нулю. Далее в силу произвольности δA_α и минимума действия $\delta S = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[F^{\nu\alpha} - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\nu\alpha} + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^{\nu\alpha}\right)\right] = 0. \qquad (4)$$

Перепишем это равенство для контравариантных компонент

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[F^\nu_\alpha - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^\nu_\alpha + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^\nu_\alpha\right)\right] = 0.$$

Теперь получим симметризованный тензор энергии-импульса

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[F^\nu_\alpha A^\mu - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^\nu_\alpha + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^\nu_\alpha\right)A^\mu\right],$$

где второе слагаемое в силу равенства (4) равно

$$\left[F^\nu_\alpha - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^\nu_\alpha + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})\widetilde{F}^\nu_\alpha\right)\right]\partial^\alpha A^\mu.$$

В итоге имеем

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}F^\nu_\alpha + \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left(8(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})F^{\mu\alpha}F^\nu_\alpha + 14(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})F^{\mu\alpha}\widetilde{F}^\nu_\alpha\right) +$$

$$+\frac{1}{4}(F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})\eta^{\mu\nu} - \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}\left((F_{\gamma\tau}F^{\gamma\tau})^2 + \frac{7}{4}(F_{\gamma\tau}\widetilde{F}^{\gamma\tau})^2\right)\eta^{\mu\nu},$$

откуда, используя (2), получаем плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \Theta^{00} = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) + \frac{2\alpha_e^2}{45m_e^4}\left(3E^4 - 2E^2H^2 - H^4 + 7(\mathbf{E},\mathbf{H})^{\mathbf{2}}\right). \qquad (5)$$

Для сокращения дальнейших выкладок введём следующее обозначение общего коэффициента нелинейных слагаемых $\frac{2\alpha_e^2}{45m_e^4} \equiv \kappa$.

2.3 Исследование характера взаимодействия двух лучей в вакууме

Сперва рассмотрим самый простой случай – две параллельно идущие друг к другу плоские волны, имеющие область пересечения ширины ρ. Каждая из них ограничена в пространстве параллелепипедом, характеристики которого одинаковы для обеих: h – ширина и высота, l – длина (рис. 1). Заметим, что исходя из нелинейных уравнений Максвелла (4) и $\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0$ легко показать, что плоская волна является их решением. Однако линейная комбинация

Рис. 1: параллельные лучи.

плоских волн решением не является, так что мы работаем в приближении, поскольку взаимодействие мало, а два пересекающихся луча – это практически решение.

Таким образом, мы имеем две волны, распространяющиеся вдоль оси X, векторы напряжённости которых колеблются вдоль оси Z по закону $\mathbf{E}_{1,2} = \mathbf{e}_z E_0 \cos(\omega t - kx)$. В силу свойств плоских волн:

$$\sqrt{\mu\mu_0} H_0 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_0$$

– в вакууме в системе единиц Хевисайда $E_0 = H_0$, то есть $H^2 = E^2$. Рассмотрим для начала их суммарную энергию без учёта нелинейных поправок (классический случай W_l), проинтегрировав плотность энергии по объёму области ограничения $W = \iiint w\, dV$:

$$W_l = \frac{1}{2}\int_0^h dz \bigg(\int_0^{h-\rho} dy \int_0^l (E_1^2 + H_1^2) dx + \int_{h-\rho}^h dy \int_0^l \left((\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 + (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^2 \right) dx +$$

$$+ \int_h^{2h-\rho} dy \int_0^l (E_2^2 + H_2^2) dx \bigg) = \frac{1}{2} h \bigg(2(h-\rho) \int_0^l E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) dx +$$

$$+ \rho \int_0^l \left(E_1^2 + 2(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) + E_2^2 + H_1^2 + 2(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2) + H_2^2 \right) dx +$$

$$+ 2(h-\rho) \int_0^l E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) dx \bigg).$$

В итоге получаем

$$W_l = 2h(h+\rho) J_x(t),$$

где $J_x(t) \equiv \int_0^l E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) dx$ – осциллирующая ограниченная функция только времени. Зависимость энергии от параметра ρ указывает на классическую интерференцию. Действительно, при $\rho = h$ (случай полного наложения лучей друг на друга) будет наблюдаться максимум интенсивности, а при отсутствии наложения ($\rho = 0$) – минимум. Поэтому, чтобы раскрыть взаимодействие волн, непосредственно связанное с влиянием нелинейных поправок, необходимо исследовать лишь нелинейные слагаемые. Часть энергии, относящуюся к теории Эйлера-Гейзенберга, будем обозначать W_{EH}, тогда $W = W_l + W_{EH}$ – полная энергия.

$$W_{EH} = \kappa \int_0^h dz \biggl(\int_0^{h-\rho} dy \int_0^l \bigl(3E_1^4 - 2E_1^2 H_1^2 - H_1^4 + 7(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)^2\bigr)\, dx +$$

$$+ \int_{h-\rho}^{h} dy \int_0^l \bigl(3(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^4 - 2(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^2 - (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^4 +$$

$$+7(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^2\bigr) dx + \int_h^{2h-\rho} dy \int_0^l \bigl(3E_2^4 - 2E_2^2 H_2^2 - H_2^4 +$$

$$+7(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)^2\bigr) dx \biggr) = 0,$$

поскольку $(\mathbf{E}_{1,2}, \mathbf{H}_{1,2}) = 0$, что следует из свойств плоских волн, $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = E_1^2 = E_2^2$ и $(\mathbf{E}_{1,2}, \mathbf{H}_{2,1}) = 0$ при данных плоскостях поляризации. То есть при параллельном распространении двух волн такой конфигурации нелинейный вклад в энергию отсутствует, а следовательно, отсутствует и взаимодействие.

Аналогичным образом можно показать, что не будет взаимодействия и в случае перпендикулярно расположенных плоскостей поляризации параллельно идущих лучей: а именно, когда вектор $\mathbf{E}$ одной волны параллелен вектору $\mathbf{H}$ второй. То есть, как и раньше, $\mathbf{k}_{1,2} \uparrow\uparrow OX$ и $\mathbf{E}_1 \uparrow\uparrow OZ$ ($\mathbf{H}_1 \uparrow\downarrow OY$), однако $\mathbf{E}_2 \uparrow\uparrow OY$ ($\mathbf{H}_2 \uparrow\uparrow OZ$). Легко заметить, что здесь не будет наблюдаться и интерференция:

$$W_l = \frac{1}{2} h \int_0^l \bigl((h-\rho)(E_1^2 + H_1^2 + E_2^2 + H_2^2) + \rho(E_1^2 + E_2^2 + H_1^2 + H_2^2)\bigr) dx = 2h^2 J_x(t),$$

чего и следовало ожидать, ведь волны в данном случае некогеренты.

$$W_{EH} = 7h\kappa \int_0^l \rho\bigl((\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_2) + (\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1)\bigr)^2 dx = 0.$$

Итак, наиболее интересным случаем является распространение лучей под некоторым углом друг к другу. Для упрощения выкладок рассмотрим их пересечение под углом $\frac{\pi}{2}$: $\mathbf{k}_1 \uparrow\uparrow OX$, $\mathbf{E}_1 \uparrow\uparrow OZ$, $\mathbf{H}_1 \uparrow\downarrow OY$; $\mathbf{k}_2 \uparrow\uparrow OZ$, $\mathbf{E}_2 \uparrow\downarrow OY$, $\mathbf{H}_2 \uparrow\uparrow OX$ (рис. 2). Классическая часть энергии окажется такой же, как в предыдущем примере, поскольку интерференция отсутствует – в этом можно убедиться, проводя аккуратные вычисления, разбивая, как и ранее, область интегрирования на подобласти. Также следует обратить внимание на то, что для векторов второй волны теперь в аргументе косинуса стоит координата z: $\mathbf{E}_2 = -\mathbf{e}_y E_0 \cos(\omega t - kz)$.

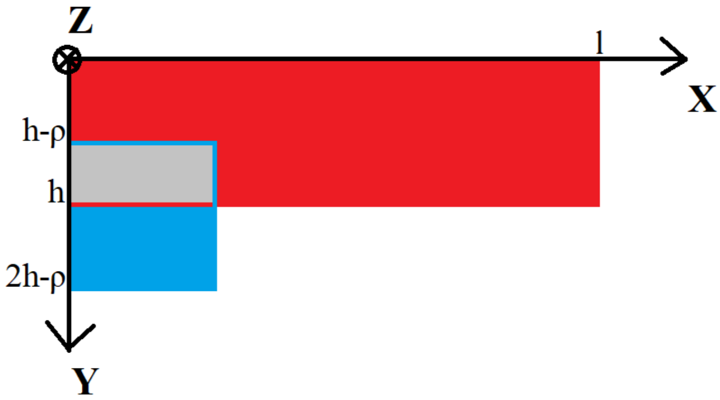

Рис. 2: перпендикулярные лучи.

В итоге получим $W_l = h^2 \left(\int_0^l E_1^2 dx + \int_0^l E_2^2 dz \right) \equiv h^2(J_x(t) + J_z(t))$. Распишем здесь подробно лишь нелинейную часть:

$$W_{EH} = \kappa \Bigg(\int_0^h dz \int_0^{h-\rho} dy \int_0^l \left(3E_1^4 - 2E_1^2 H_1^2 - H_1^4 + 7(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)^2\right) dx +$$

$$+ \int_{h-\rho}^h dy \int_0^h \int_0^h \left(3(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^4 - 2(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^2 - (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^4 + \right.$$

$$\left. +7((\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2), (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2))^2\right) dxdz + \int_0^h dz \int_0^{h-\rho} dy \int_h^l \left(3E_1^4 - 2E_1^2 H_1^2 - H_1^4 + \right.$$

$$\left. +7(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)^2\right) dx + \int_0^h dx \int_{h-\rho}^h dy \int_h^l \left(3E_2^4 - 2E_2^2 H_2^2 - H_2^4 + 7(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)^2\right) dz +$$

$$+ \int_0^h dx \int_h^{2h-\rho} dy \int_0^l \left(3E_2^4 - 2E_2^2 H_2^2 - H_2^4 + 7(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)^2\right) dz \Bigg).$$

Ясно, что здесь все слагаемые, кроме второго, равны нулю, поскольку волны плоские. Используя равенство $E_{1,2}^2 = H_{1,2}^2$, запишем

$$W_{EH} = \kappa\rho \left(\int_0^h \int_0^h \left(6E_1^2 E_2^2 - 4E_1^2 E_2^2 - 2E_1^2 E_2^2\right) dxdz + 7 \int_0^h \int_0^h (\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1)^2 dxdz \right),$$

то есть, как при $\mathbf{E}_2 \uparrow\downarrow OY$, так и при $\mathbf{E}_2 \uparrow\uparrow OY$, имеем отрицательную энергию взаимодействия $W_{EH} = 7\kappa\rho \int_0^h \int_0^h (\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1)^2 dxdz$:

$$W_{EH} = \frac{14\alpha_e^2}{45 m_e^4} \rho E_0^4 \int_0^h \cos^2(\omega t - kx) dx \int_0^h \cos^2(\omega t - kz) dz.$$

Тогда полная энергия будет выглядеть следующим образом:

$$W = h^2\left(J_x(t) + J_z(t)\right) + \frac{14\alpha_e^2}{45m_e^4} J_x(t) J_z(t)\rho. \tag{6}$$

Поскольку при «сближении» лучей область их пересечения, пропорциональная ρ, увеличивается, а следовательно, увеличивается энергия, они будут **отталкиваться**.

2.4 Оценка амплитуды напряжённости поля

Вычислим, какая необходима амплитуда электрической напряжённости электромагнитных волн, чтобы сила отталкивания лучей могла уравновесить вес человека в земных условиях. Массу примем равной 66 килограмм, тогда $F = mg \approx 66 \cdot 9.8 = 646.8$ (Н). В системе СИ модуль силы будет выражаться так:

$$F_{waves} = \left|-\frac{\partial W}{\partial \rho}\right| = \frac{14\alpha_e^2 \hbar^3 \varepsilon_0^2}{45 m_e^4 c^5} \int_0^h \int_0^h (\mathbf{E}_2, c\mathbf{B}_1)^2 dxdz,$$

где $\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 = -\mu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x) = -\frac{1}{c} E_0 \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$, $\mathbf{E}_2 = -E_0 \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z)$. Пусть $h = 5$ см, $\lambda = 500$ нм, тогда:

$$\int_0^h \int_0^h (\mathbf{E}_2, c\mathbf{B}_1)^2 dxdz = E_0^4 \left(\int_0^{0.05} \cos^2\left(\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{500 \cdot 10^{-9}} t - \frac{2\pi}{500 \cdot 10^{-9}} x \right) dx \right)^2 =$$

$$= E_0^4 \left(0.025 - 2.70247 \cdot 10^{-18} \cos(2.51327 \cdot 10^7 t)\right)^2 \approx 0.000625 E_0^4.$$

Таким образом,

$$E_0^4 = \frac{45 m_e^4 c^5 \cdot 1600 \cdot 646.8}{14 \alpha_e^2 \hbar^3 \varepsilon_0^2} \approx 11.4 \cdot 10^{56} \ \frac{\text{В}^4}{\text{м}^4},$$

то есть амплитуда поля должна быть $E_0 \approx 1.8 \cdot 10^{14}\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$.

3 Итоги работы и перспективы

В ходе работы было получено выражение для энергии электромагнитного поля в теории Эйлера-Гейзенберга, которое было использовано для определения характера взаимодействия двух лучей в вакууме. В данной нелинейной теории они будут отталкиваться друг от друга. Также была оценена амплитуда напряжённости электрической составляющей волн видимого спектра. Здесь и раскрылась трудность экспериментального подтверждения данного эффекта. В дальнейшем можно исследовать более общие случаи конфигурации, характеристик и формы лучей и провести численный анализ явления.

Хотя до создания световых мечей человечеству ещё далеко, учитывая требуемые мощности, автор работы уверен, что экспериментальное подтверждение или опровержение эффекта взаимодействия электромагнитных волн ожидает нас в недалёком будущем.

Список литературы

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. – 8-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 536 с. – ISBN 5-9221-0056-4 (Т. II).

[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. IV/В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Квантовая электродинамика. – 4-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 720 с. – ISBN 5-9221-0058-0 (Т. IV).