

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени
М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА
«ФАЗОВАЯ ПЛОТНОСТЬ ЧАСТИЦ ТЁМНОЙ МАТЕРИИ»

Выполнил: студент 205 группы
Багаев Даниил Сергеевич

Научный руководитель:
член-корреспондент РАН, профессор РАН,
доктор физико-математических наук
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Содержание

1 Введение.....	3
2 Основные понятия	3
2.1 Фазовое пространство	3
2.2 Тёмная материя. Частицы тёмной материи	5
3 Ограничение на массу	7
3.1 Осцилляции с активными нейтрино	7
3.2 Распады тяжёлых частиц.....	9
4 Заключение.....	12
5 Литература	14

1. Введение

В данной работе кратко рассматриваются базовые понятия о тёмной материи и о фазовом пространстве, как с формальной математической точки зрения, так и с чисто прикладной. Основная часть работы базируется на понятии тёплой тёмной материи, для одного из гипотетических кандидатов на её роль – стерильного нейтрино – производится ограничение на массу в рамках нескольких механизмов генерации тёмной материи с помощью неравенства на фазовую плотность этих частиц.

2. Основные понятия

2.1 Фазовое пространство

Механическое состояние любой системы однозначно определяется координатами q_i и импульсами p_i её частиц, набор величин $\{q\}$ и $\{p\}$ образует фазовое пространство ($i = 1, 2, \dots, s$). Всякая точка фазового пространства, отвечающая определённым значениям q_i и p_i , представляет собой определённое состояние системы. С течением времени состояние системы изменяется, следовательно точка в фазовом пространстве будет описывать некую кривую, называемую фазовой траекторией. Рассмотрим бесконечно малый элемент объёма фазового пространства, обозначим его как $d\mathbf{p}d\mathbf{q} = \prod_{i=1}^s dp_i dq_i$. Тогда можно ввести понятие вероятности dw нахождения системы в состоянии с координатами и импульсами, находящимися внутри указанного объёма фазового пространства:

$$dw = f(p, q) d\mathbf{p}d\mathbf{q},$$

где $f(p, q) = f(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s)$ – функция распределения по импульсам и координатам, которая очевидно должна удовлетворять соотношению:

$$\int f(p, q) d\mathbf{p}d\mathbf{q} = 1$$

(интеграл берётся по всему фазовому пространству). Также в дальнейших выкладках нам понадобится определение среднего значения некоторой физической величины g , которое вводится следующим образом:

$$\bar{g} = \int f(p, q)g(p, q)dpdq$$

Введённую выше функцию распределения будем называть *мелкозернистой* функцией распределения по той причине, что на практике, как правило, приходится иметь дело с функцией распределения, усреднённой по конечным областям $\Delta p\Delta q$ фазового пространства, то есть $\Delta w = F(p, q)\Delta p\Delta q$. Такую функцию распределения будем называть *крупнозернистой*. Особый интерес в рассмотрении именно крупнозернистой функции распределения заключается в том, что по мере эволюции системы последняя приобретает всё более мелкие детали; это в свою очередь ведёт к тому, что усреднение по конечным областям влияет на свойства функции распределения. Кроме того, при непосредственных астрофизических наблюдениях мы всегда имеем дело с конечными размерами.

В астрофизике вместо явно полученного выражения для современной функции распределения обычно используют величину $Q \equiv \frac{\rho}{\sigma^3}$ [2], равную отношению плотности числа частиц к кубу среднеквадратичного отклонения их скорости. Предполагается, что частицы тёмной материи имеют изотропную и однородную в центральной части гало дисперсию $\sigma^2 = <(\Delta v)^2>$, именно эту величину принимают за характерный размер области, которую занимают частицы в пространстве скоростей. А так как звёзды и частицы тёмной материи движутся в одном гравитационном потенциале, то на практике измеряют дисперсию звёзд (с помощью измерения красного смещения спектральных линий в их излучении) в галактике, принимая, что частицы тёмной материи имеют такую же дисперсию, и используя её для оценки Q .

2.2 Тёмная материя. Частицы тёмной материи

Первоначально понятие тёмной материи было введено из теоретических соображений: объяснить проблему скрытой массы, которая вытекает из сравнения экспериментальных и теоретических кривых вращения галактик (зависимость скорости вращения галактических объектов от расстояния до центра галактики). Согласно механике Ньютона, эта зависимость должна иметь ярко выраженный максимум с последующим убыванием пропорционально $r^{-\frac{1}{2}}$ (см. рис. 1), однако в действительности оказалось, что скорость объектов с увеличением расстояния практически перестаёт меняться.

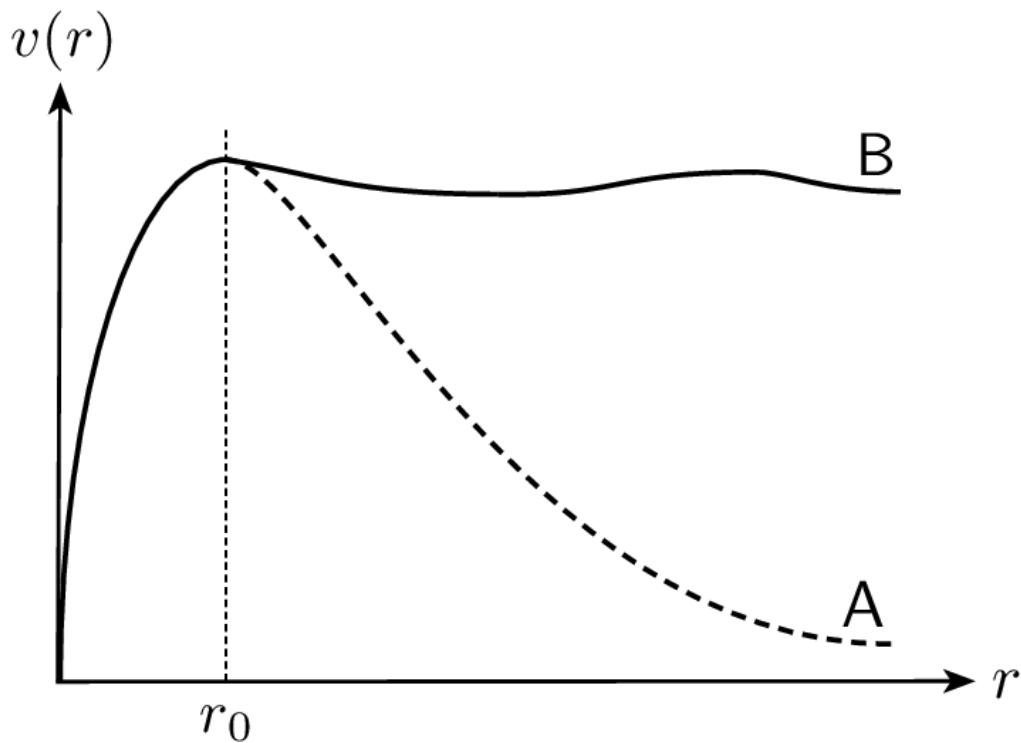


Рис. 1. А – теоретическая кривая вращения, В – экспериментальная кривая.

Одним из наиболее простых объяснений (т.е. принципиально не меняющих известные законы физики) является внедрение некой частицы, присутствие которой проявляется только в гравитационном взаимодействии – тёмной материи. В настоящее время состав и природа этих частиц всё ещё неизвестны, однако многие наблюдательные и теоретические данные указывают на то, что они существуют. В большинстве теорий механизмов генерации тёмной материи предполагается, что на

ранних этапах эволюции Вселенной тёмная материя и обычное вещество были в тепловом равновесии друг с другом, но при какой-то конкретной температуре T_{DM} они вышли из состояния равновесия с последующим независимым распространением. Далее появились неоднородности плотности тёмной материи, в которые “падали” барионы как в гравитационную яму, что привело к формированию первых звёзд и галактик. Если масса частицы тёмной материи M_{DM} , то в зависимости от соотношения между M_{DM} и T_{DM} тёмную материю подразделяют на горячую, тёплую и холодную.

Горячая и тёплая тёмная материя

Если в момент выхода из равновесия с барионным веществом частицы тёмной материи были релятивистскими, то есть выполнялось $M_{DM} \leq T_{DM}$, кроме того, масса была менее 1 эВ, то такую тёмную материю называют горячей. От тёплой тёмной матери, для которой также $M_{DM} \leq T_{DM}$, но $M_{DM} \geq 1$ эВ, она отличается тем, что горячая тёмная материя оставалась релятивистской и к моменту перехода от радиационно-доминированной к пылевидной стадии эволюции Вселенной, который произошёл при температуре 1 эВ. В моделях с горячей тёмной материей сначала формируются самые крупные структуры Вселенной — сверхскопления, которые потом распадаются на скопления. Галактики же формируются в последнюю очередь, а процесс их формирования должен был начаться не так давно. Такая последовательность формирования структур противоречит наблюдениям, поэтому горячая тёмная материя может составлять лишь некоторую часть всей тёмной материи. К данному типу частиц тёмной материи могли бы относиться гипотетические стерильные нейтрино, которые подробнее будут рассмотрены ниже.

Холодная тёмная материя

Если частицы тёмной материи отсоединились от обычного вещества уже будучи нерелятивистскими, то есть $M_{DM} \gg T_{DM}$, то такую тёмную материю называют холодной. В рамках теории холодной тёмной материи рост космических структур (звёзд, галактик) происходит иерархически, что находится в хорошем согласии с результатами моделирования эволюции Вселенной. Гипотетическая частица

холодной тёмной материи – вимп (с англ. WIMP – weakly interacting massive particle), слабовзаимодействующая массивная частица.

3. Ограничение на массу

3.1 Осцилляции с активными нейтрино

Стерильное нейтрино – гипотетическая частица, лептон, не участвующий в электрослабых взаимодействиях и взаимодействующий с активными нейтрино путём массового смешивания. Интенсивность этого взаимодействия определяется углом смешивания. В силу этого, одними из наиболее простых и логичных механизмов производства стерильных нейтрино во Вселенной являются осцилляции последних с активными нейтрино Стандартной модели. Чтобы эта частица считалась кандидатом на роль частицы тёмной материи, необходимо, чтобы она имела ненулевую массу и нулевой электрический заряд. Получим ограничение на массу этих частиц в рамках модели осцилляции с активными нейтрино.

Первичная функция распределения стерильных нейтрино может быть аппроксимирована тепловым распределением Ферми-Дирака:

$$f(p) = \frac{gA}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\frac{p}{T}} + 1}$$

Здесь g – количество степеней свободы (для стерильного нейтрино $g = 2$), A – нормировочный коэффициент, возникающий из тех соображений, что стерильные нейтрино, произведённые в осцилляциях, составляют всю наблюдаемую тёмную материю.

$$A = \frac{\Omega_{DM}}{0,2} \frac{10 \text{ эВ}}{m}$$

Таким образом, для максимального значения исходной функции распределения имеем:

$$\max(f(p)) = f(0) = \frac{A}{(2\pi)^3}$$

Для ограничения массы частиц тёмной материи необходимо иметь оценки фазовой плотности Q для галактик. Как было сказано ранее, эти оценки получаются из наблюдения светящегося вещества. Распишем Q :

$$Q = \frac{\rho}{\sigma^3} = \frac{mn}{(\langle v^2 \rangle)^{\frac{3}{2}}}$$

Здесь под v понимается одномерная скорость. В силу изотропности пространства с абсолютной скоростью она связана следующим соотношением: $\langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v_{\text{абс}}^2 \rangle$.

Также учтём, что $v_{\text{абс}} = \frac{p}{m}$ (для нерелятивистских частиц, а в современных гало они таковыми и являются), тогда:

$$Q = \frac{m^4 n}{3^{\frac{3}{2}} (\langle p^2 \rangle)^{\frac{3}{2}}}$$

Величина $\frac{n}{(\langle p^2 \rangle)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\int F(p,r) d^3 p)^{\frac{5}{2}}}{(\int p^2 F(p,r) d^3 p)^{\frac{3}{2}}}$ Пропорциональна современной функции распределения F .

В итоге имеем следующую связь:

$$F \approx \frac{3^{-\frac{3}{2}} Q}{m^4} = \frac{Q}{3^{\frac{3}{2}} m^4}$$

Далее воспользуемся тем фактом, что современная функция распределения не превосходит максимального значения первоначальной функции распределения, т.е.

$$\begin{aligned} F &\leq \max(f(p)) \\ \frac{Q}{3^{\frac{3}{2}} m^4} &\leq \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\Omega_{DM}}{0,2} \frac{10 \text{ эВ}}{m} \end{aligned}$$

Откуда получаем ограничение снизу на массу стерильного нейтрино:

$$m \geq \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{0,2}{\Omega_{DM}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{Q}{10 \text{ эВ}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Так как величину фазовой плотности Q обычно измеряют в $\frac{\frac{M_\odot}{\text{пк}^3}}{\left(\frac{\text{км}}{\text{с}}\right)^3} \approx 7,6 \text{ кэВ}^4$, то

представим Q в виде $Q = q \frac{\frac{M_\odot}{\text{пк}^3}}{\left(\frac{\text{км}}{\text{с}}\right)^3}$. Из неравенства для оценки массы видно, что для

получения наиболее сильного ограничения нужно брать объекты с наибольшей фазовой плотностью. Такими во Вселенной являются карликовые сферические галактики. Типичные значения q для карликовых галактик лежат в диапазоне $10^{-5} - 10^{-4}$, а наибольшие значения, обнаруженные для сверхслабых карликовых галактик, $- (1 - 7) * 10^{-3}$. Тогда можем написать:

$$m > 5,67 \text{ кэВ} \left(\frac{0,2}{\Omega_{DM}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{q}{5 * 10^{-3}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Таким образом, чтобы стерильные нейтрино, произведённые путём осцилляций, составляли всю тёмную материю во Вселенной, их масса должна быть больше 5,67 кэВ.

3.2 Распады тяжёлых частиц

В данной модели образования стерильных нейтрино предполагается, что частицы тёмной материи состоят не только из стерильного нейтрино, но и из неких других тяжёлых частиц. Благодаря такому допущению можно предполагать, что производство нейтрино в ранней Вселенной может быть также основано и на распадах этих тяжёлых частиц. При этом выделяют несколько вариантов развития событий: во-первых, это распады тяжёлых релятивистских частиц, находящихся в равновесном состоянии с первичным веществом и, во-вторых, распады тяжёлых нерелятивистских частиц вне теплового равновесия с некой остаточной концентрацией. В этих моделях также можно оценить массу стерильного нейтрино, произведённого указанными выше способами.

Рассмотрим распад частиц массы M , находящихся в равновесном состоянии с веществом при температуре T . Рассмотрим простейший случай двухчастичного распада, то есть продуктами распада будут стерильное нейтрино и некая вторая частица X. В таком варианте развития событий функция распределения стерильных нейтрино является решением уравнения Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - p_\nu H(t) \frac{\partial f}{\partial p} = I$$

Интеграл столкновений I в таком случае после упрощения имеет вид:

$$I = \frac{M\Gamma}{p_\nu^2} \int_{E_{min}}^{\infty} f_{th}(P, t) dE$$

Здесь Γ – энергетическая ширина распада, P – импульс распадающейся частицы, p_ν – импульс нейтрино. Нижний предел интегрирования – минимальная энергия распадающейся частицы, при которой возможно образование нейтрино с импульсом p_ν :

$$E_{min} = p_\nu + \frac{M^2}{4p_\nu}$$

Введём сопутствующий импульс: $q = a(t)p_\nu$ ($a(t_0) = 1$), тогда уравнение Больцмана примет вид:

$$\frac{df}{dt} = \frac{M\Gamma}{a^2(t)} q^2 \int_{E_{min}}^{\infty} f_{th}(P, t) dE$$

Откуда $f = \int_{t_R}^t \frac{M\Gamma}{a^2(t')} q^2 \left(\int_{E_{min}}^{\infty} f_{th}(P, t') dE \right) dt'$. Так как f_{th} тепловая функция распределения распадающихся частиц зависит от отношения $\frac{E}{T(t)}$, то можем поменять интегрирование по времени на интегрирование по температуре. А так как распады интересующих нас частиц происходят на радиационной стадии эволюции Вселенной, то из сохранения энтропии имеем: $T = \sqrt{\frac{M_{eff}}{2t}}$, где эффективная масса

Планка $M_{eff} = M_{Pl} \sqrt{\frac{90}{8\pi^3 g_*}}$. Таким образом имеем:

$$f = \int_0^{T_R} \frac{MM_{eff}\Gamma}{q^2} \frac{T_{eff}^2}{T^5} \left(\int_{E_{min}}^{\infty} f_{th}\left(\frac{E}{T}\right) dE \right) dT$$

$T_{eff} = \sqrt[3]{\frac{g_{*,0}}{g_*}} T_0$ - эффективная современная температура распадающихся частиц,

$g_{*,0}$ и g_* - релятивистские степени свободы (берутся на момент распада и в современной Вселенной). Тогда после взятия интеграла по температуре придём к следующим выражениям:

$$f(p_\nu) = f(q, t_0) = \frac{8M_{eff}}{3M^2} \Gamma \left(\frac{T_{eff}}{p_\nu} \right)^2 I \left(\frac{p_\nu}{T_{eff}}, \frac{M}{T_R} \right)$$

$$I \left(\frac{p_\nu}{T_{eff}}, \frac{M}{T_R} \right) = \int_{z_{min}}^{\infty} \left[\left(\frac{p_\nu}{T_{eff}} \right)^{1,5} \left(z - \frac{p_\nu}{T_{eff}} \right)^{1,5} - \left(\frac{M}{2T_R} \right)^3 \right] f_{th}(z) dz$$

$$\text{Здесь } z = \frac{E}{T}, \quad z_{min} = \frac{p_\nu}{T_{eff}} + \frac{M^2}{4T_R^2} \frac{T_{eff}}{p_\nu}$$

Наибольший интерес для стерильных нейтрино представляет приближение малых импульсов (так как в таком случае визуально кажется, что функция распределения неограничена, см. выражение для $f(p_\nu)$) и больших T_R :

$$f(p_\nu) = \frac{\zeta(\frac{5}{2})}{4\pi^{\frac{5}{2}}} \frac{M_{eff}\Gamma}{M^2} \sqrt{\frac{T_{eff}}{p_\nu}}$$

Современная концентрация нейтрино, произведённых таким способом:

$$n_0 = \frac{3\zeta(5)}{4\pi} \frac{M_{eff}\Gamma}{M^2} T_{eff}^3$$

Если стерильные нейтрино, образованные путём распада тяжёлых частиц, составляют всю тёмную материю во Вселенной, то $\rho_{DM} = mn_0$, откуда получаем:

$$\frac{M_{eff}\Gamma}{M^2} = \frac{4\pi}{3\zeta(5)} \frac{\rho_{DM}}{m} T_{eff}^{-3}$$

$$f(p_\nu) = \frac{\zeta(\frac{5}{2})}{3\zeta(5)\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\rho_{DM}}{m T_{eff}^3} \sqrt{\frac{T_{eff}}{p_\nu}}$$

Как было сказано выше, функция распределения в таком случае является неограниченной сверху, то есть у неё отсутствует максимальное значение. В таких случаях можно поставить ограничение на невозрастание минимального значения функции распределения по некой доле частиц α , используя статистическое обобщение ограничения Тремейна-Ганна [6, 4, 5]:

$$f_\alpha > \frac{3^{-\frac{3}{2}} Q_\alpha}{m^4}$$

Доля частиц α с наибольшей фазовой плотностью имеет импульсы $p < p_{max}$, где p_{max} определяется выражением:

$$\alpha = \frac{\int_0^{p_{max}} f(p_\nu) p_\nu^2 dp_\nu}{\int_0^\infty f(p_\nu) p_\nu^2 dp_\nu}$$

$$p_{max} = T_{eff} \left(\frac{15\sqrt{\pi}\zeta(5)}{8\zeta(\frac{5}{2})} \alpha \right)^{\frac{2}{5}}$$

Таким образом, максимальному импульсу будет соответствовать минимальная фазовая плотность:

$$f_\alpha \approx 11 * 10^{-3} \frac{\Omega_{DM}}{0,2} \frac{g_*}{106,75} \frac{1 \text{ кэВ}}{m} \left(\frac{10^{-5}}{\alpha} \right)^{\frac{1}{5}}$$

Подставляя полученное выражение в неравенство выше получаем:

$$m > 0,88 \text{ кэВ} \left(\frac{0,2}{\Omega_{DM}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{106,75}{g_*} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\alpha}{10^{-5}} \right)^{\frac{1}{15}} \left(\frac{q}{5 * 10^{-3}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

4. Заключение

В данной работе были кратко рассмотрены основные понятия, касающиеся фазового пространства и тёмной материи. Было показано, как с помощью функции распределения прийти к ограничению на некие характеристики частиц тёплой тёмной материи, в частности – массу. Ограничения на последнюю были получены из различных соображений касательно механизма производства стерильных нейтрино в ранней Вселенной. Во-первых, это производство из осцилляций с

активными нейтрино, что дало оценку в 5,67 кэВ. Во-вторых, это производство в результате распадов тяжелых частиц, также являющихся частицами тёмной материи. В этом сценарии полученное ограничение составляет 0,88 кэВ. На основании полученных оценок можно утверждать, что стерильные нейтрино действительно подходят под роль кандидатов частиц тёплой тёмной материи. Однако существуют астрофизические ограничения (например, рентгеновское свечение галактических гало [3]), на основании которых можно утверждать, что нейтрино, полученные путём осцилляций, не могут составлять всю тёмную материю, а только лишь её часть, что позволяет исключить данный механизм генерации стерильных нейтрино как основной.

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика, часть 1.
2. C. J. Hogan and J. J. Dalcanton, Phys. Rev. D 62 (2000) 063511 [arXiv:astro-ph/002330].
3. A. Boyarsky, D. Iakubovskyi, O. Ruchayskiy and V. Savchenko, Mon.Not.Roy.Astron.Soc.387:1361,2008 [arXiv:astro-ph/0709.2301].
4. J. Madsen, Phys. Rev. 1991. Vol. D44. P. 999-1006.
5. J. Madsen, Phys. Rev. 2001. Vol. D64. P. 027301. [arXiv:atsro-ph/0006074].
6. S. Tremaine and J. Gunn, Phys.Rev.Lett. 1979. Vol. 42. P. 407-410.
7. Хмельницкий А.А. Модели тёплой тёмной материи в физике частиц и космологии: дис., Москва 2013.
8. D. Gorbunov, A. Khmelnitsky and V. Rubakov [arXiv:astro-ph/0808.3910].