ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

«РАСПАД ЛОЖНОГО ВАКУУМА В НЕСТАНДАРТНЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ»

Выполнил студент
213 группы
Джамалдинов Эльдар Шахмирзаевич
____

Научные руководители:
к.ф.-м.н. Демидов Сергей Владимирович
к.ф.-м.н. Левков Дмитрий Геннадиевич
____

Допущен к защите
Зав. кафедрой _____________

МОСКВА
2022

Оглавление

1. Введение

Туннелирование - переход частицы через потенциальный барьер в случае, когда её полная энергия меньше высоты барьера. Туннельные процессы — это явления квантовой природы, которые невозможны с точки зрения классической механики. Они лежат в основе многих важных процессов в атомной и молекулярной физике, в физике атомного ядра, твёрдого тела и т. д.

Ложный вакуум - состояние в теории поля, которое не является состоянием с глобально минимальной энергией, а соответствует её локальному минимуму. Такое состояние стабильно в течение определённого времени, но может «туннелировать» в состояние истинного вакуума.

Цель работы - изучить квазиклассический метод вычисления вероятности распада ложного вакуума с помощью отскокового решения. В данной работе будет исследован процесс распада на примере кусочно - гладких потенциалов. Некоторые из рассмотренных в данной работе потенциалов взяты из статей [2], [3].

2. Квазиклассическое приближение к вычислению вероятности туннельных процессов

Простейшая система, в которой возникает задача о распаде метастабильного состояния, - это квантовая механика одной переменной q, описываемая потенциалом $V(q)$. Мы будем рассматривать распад только основного метастабильного состояния. В квазиклассическом приближении вероятность тунеллирования через потенциальный барьер дается выражением

$$\Gamma = Ae^{-S_b}, \tag{2..1}$$

где Γ - ширина метастабильного состояния, A - предэкспоненциальный множитель, а S_b - главная квазиклассическая экспонента,

$$S_b = 2\int_{q_0}^{q_1} \sqrt{2MV(q)}\,dq, \tag{2..2}$$

M - масса частицы, q_1 - точка поворота, в которой $V(q_1) = 0$. Чтобы упростить выкладки, положим $V(q_0) = 0$ в локальном минимуме потенциала.

Запишем обычное действие для классической частицы в потенциале $V(q)$:

$$S = \int \left[\frac{M}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - V(q)\right] dt. \tag{2..3}$$

После замены $t = -i\tau$ действие (2..3) превратится в iS_E, где

$$S_E = \int \left[\frac{M}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right] d\tau. \tag{2..4}$$

S_E - евклидово действие, τ - евклидово время.

Варьируя (2..4), получим уравнение движения:

$$M\frac{d^2q}{d\tau^2} = \frac{\partial V}{\partial q} \equiv -\frac{\partial(-V)}{\partial q}. \tag{2..5}$$

Из последнего равенства можно увидеть, что полученное нами уравнение есть не что иное, как уравнение классической механики для частицы в потенциале $(-V)$. Интеграл движения этого уравнения

$$\frac{M}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 - V(q) = \mathcal{E} \tag{2..6}$$

назовем евклидовой энергией.

Рассмотрим решение с нулевой евклидовой энергией, которое начинается при $\tau \to -\infty$ в точке $q = q_0$, достигает точки q_1 и возвращается в точку q_0 при $\tau \to +\infty$. Такое решение называется отскоковым решением. Обозначим его $q_b(\tau)$. Вычислим на нем евклидово действие:

$$S_E\left[q_b\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[\frac{M}{2}\left(\frac{dq_b}{d\tau}\right)^2 + V(q_b)\right] = 2\int_{-\infty}^{0} 2V\left(q_b(\tau)\right)\, d\tau, \tag{2..7}$$

Сделав замену $d\tau = \sqrt{\dfrac{M}{2V(q_b)}}\,dq_b$, перейдем от интеграла (2..7) к интегралу (2..2). В итоге имеем

$$S_b = S_E\left[q_b\left(\tau\right)\right]. \tag{2..8}$$

3. Квазиклассическое описание распада ложного вакуума

Изложение предыдущего раздела можно обобщить на теории поля. Рассмотрим модель одного действительного скалярного поля в d - мерном пространстве - времени ($d \geq 3$) [1]. Действие для такого поля выглядит следующим образом:

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \left(\partial_\mu \varphi \right)^2 - V(\varphi) \right], \tag{3..1}$$

Запишем действие в виде

$$S = \int d^{d-1}\mathrm{x}\, dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 - V(\varphi) \right] \tag{3..2}$$

и сделаем в нем замену $t = -i\tau$. С точностью до множителя i действие (3..2) перейдет в евклидово действие

$$\begin{aligned} S_E = \int d^{d-1}\mathrm{x}\, d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 + V(\varphi) \right] = \\ = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) + V(\varphi) \right], \end{aligned} \tag{3..3}$$

где $x^\mu = (\tau, \mathbf{x})$, а суммирование ведется с метрикой $\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$. Варьируя (3..3), получим уравнения поля:

$$- \partial_\mu \partial^\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \tag{3..4}$$

Предположим, что потенциал $V(\varphi)$ имеет неглобальный минимум. По аналогии с квантовой механикой, мы должны найти отскоковое решение этих уравнений, которое стремилось бы к ложному вакууму φ_- при $\tau \to \pm\infty$ и имело бы «точку поворота». Под термином «точка поворота» мы подразумеваем «момент времени», при котором

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0 \qquad \text{для всех } \mathbf{x}. \tag{3..5}$$

Требованию

$$\varphi(\tau, \mathbf{x}) \to \varphi_- \quad \text{при} \quad \tau \to \pm\infty \tag{3..6}$$

и условию (3..5) можно одновременно удовлетворить, если рассматривать гладкие сферически - симметричные поля $\varphi(r)$, где $r = \sqrt{\tau^2 + \mathbf{x}^2} = \sqrt{x_\mu x^\mu}$, с асимптотикой

$$\varphi(r \to \infty) = \varphi_-. \tag{3..7}$$

Для таких полей уравнение (3..4) приводится к виду

$$\varphi'' + \frac{d-1}{r}\varphi' = \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \tag{3..8}$$

где штрих обозначает производную по r.

В теории скалярного поля вероятность тунеллирования через потенциальный барьер также дается выражением

$$\Gamma = A e^{-S_b}, \tag{3..9}$$

где S_b - евклидово действие, вычисленное на отскоковом решении.

4. Примеры отскоковых решений

1. Рассмотрим теорию скалярного поля в $3+1$ - мерном пространстве с потенциалом
$$V(\varphi) = -\frac{1}{4}\lambda\varphi^4 \tag{4..1}$$
Положив $d = 4$, получим уравнение
$$\varphi'' + \frac{3}{r}\varphi' = -\lambda\varphi^3, \tag{4..2}$$
решение которого будем искать в виде ряда по степеням r^2:
$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{2n} \tag{4..3}$$
Проведя необходимые выкладки и сделав замену $\dfrac{8}{\lambda C^2} = \rho^2$, получим окончательное решение:
$$\varphi_{\text{л}}(r) = \frac{2\sqrt{2}\rho}{\sqrt{\lambda}(\rho^2 + r^2)} \tag{4..4}$$
Отметим, что такое решение называется липатоном [4], оно пригодится нам в дальнейшем. Вычислим евклидово действие на липатоне. В сферических координатах (3..3) имеет вид:
$$S_E = 2\pi^2 \int_0^\infty r^3 dr \left[\frac{1}{2}\left(\varphi'\right)^2 + V(\varphi)\right], \tag{4..5}$$
поэтому евклидово действие на решении (4..4) равно:
$$S_E = 2\pi^2 \int_0^\infty dr \left[\frac{16\rho^2 r^5}{\lambda\left(\rho^2 + r^2\right)^4} - \frac{16\rho^4 r^3}{\lambda\left(\rho^2 + r^2\right)^4}\right] = \frac{8\pi^2}{3\lambda}. \tag{4..6}$$

2. Рассмотрим теперь теорию скалярного поля в $3+1$ - мерном

пространстве в кусочно - гладком потенциале вида

$$V(\varphi)=\begin{cases}\lambda_-\varphi_0^3\varphi+\dfrac{1}{4}\lambda_+\varphi_0^4, & \varphi<0\\ \dfrac{1}{4}\lambda_+\left(\varphi-\varphi_0\right)^4, & \varphi>0\end{cases}. \qquad (4..7)$$

Отметим, что областей, в которых существует отскоковое решение, будет две: $\varphi<0$ и $\varphi>0$. Следовательно, в точке $\varphi=0$ полученные в различных областях решения потребуется сшить.

1) $\varphi<0$

Уравнение (3..8) будет иметь вид

$$\varphi''+\frac{3}{r}\varphi'=\lambda_-\varphi_0^3. \qquad (4..8)$$

Сделав замену $\psi=\varphi'$ и потребовав гладкость при $r=0$, получим решение:

$$\varphi(r)=\frac{\lambda_-\varphi_0^3}{8}r^2+C,\ C\in\mathbb{R}. \qquad (4..9)$$

2) $\varphi>0$

Уравнение (3..8) запишется следующим образом:

$$\varphi''+\frac{3}{r}\varphi'=\lambda_+\left(\varphi-\varphi_0\right)^3. \qquad (4..10)$$

Сделаем замену $\chi=\varphi-\varphi_0$ и будем искать решение в виде ряда:

$$\chi(r)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nr^{2n}. \qquad (4..11)$$

Окончательно, решение будет иметь вид:

$$\varphi(r)=\frac{2\sqrt{2}\rho}{\sqrt{\lambda_+}(\rho^2-r^2)}+\varphi_0, \qquad (4..12)$$

где $\rho^2=\dfrac{8}{\lambda_+C^2}$.

После сшивки отскоковое решение запишется следующим образом:

$$\varphi(r) = \frac{\lambda_- \varphi_0^3}{8} r^2 - \varphi_0 \left(1 + \frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right), \quad \varphi < 0 \tag{4..13}$$

$$\varphi(r) = \frac{8\lambda_- \varphi_0}{8\lambda_+ - \lambda_-^2 \varphi_0^2 r^2} + \varphi_0, \qquad \varphi > 0. \tag{4..14}$$

Вычислим евклидово действие на найденном решении.

$$S_E = 2\pi^2 \int_0^\infty r^3 dr \left[\frac{1}{2}\left(\varphi'\right)^2 + V(\varphi)\right] = \tag{4..15}$$
$$= \frac{16\pi^2}{3\lambda_-}\left(2 + \frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^3 - \frac{8\pi^2 \lambda_+^3}{3\lambda_-^4}.$$

Заметим, что при $\lambda_- \to \infty$, $S_E \to 0$.

5. Примеры потенциалов, в которых отсутствуют отскоковые решения

5.1. Пример №1

В данном разделе нам предстоит найти отскоковое решение для потенциала вида

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4. \tag{5..1}$$

Проведем предварительное исследование. Запишем евклидово действие:

$$S_E = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4\right]. \tag{5..2}$$

Пусть $\varphi_0(x)$ - отскоковое решение. Значит, $\varphi_0(x)$ экстремизирует (5..2). Сделаем замену $\varphi = a\varphi_0(ax)$. Заметим, что при $a = 1$ новое решение равно исходному, а значит, также экстремизирует (5..2).

$$S_E = \int d^4y \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\varphi_0(y)\right)^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi_0^4(y) + \frac{m^2\varphi_0^2(y)}{2a^2}\right], \tag{5..3}$$

где $y_\mu = ax_\mu$. Найдем экстремум S_E по параметру a. Для этого возьмем производную:

$$\frac{\partial S_E}{\partial a} = -\frac{m^2}{a^3}\int \varphi_0^2\, d^4y. \tag{5..4}$$

Действие должно быть экстремально при $a = 1$ (т. к. $a = 1$ соответствует предполагаемому отскоку). Но это не выполняется, как видно из (5..4). Данное обстоятельство показывает, что точного отскокового решения для потенциала (5..1) не существует.

Разберем подробнее причину отсутствия отскокового решения. Предположим, что решение существует и попробуем найти его вид. Рассмотрим решения, которые при достаточно малых r близки к липатону с маленьким значением ρ, то есть с маленьким размером($m\rho \ll 1$).

Рассмотрим две области: $r \gg \rho$ и $r \ll m^{-1}$.

1. $r \gg \rho$

   В данной области липатон будет иметь асимптотику $\varphi(r) \sim \dfrac{1}{r^2}$, это позволяет сделать вывод о том, что вклад массового слагаемого в потенциале (5..1) больше, а значит, пренебрегать им нельзя. Но можно пренебречь слагаемым $-\dfrac{1}{4}\lambda\varphi^4$. Окончательно, уравнение поля будет иметь вид:

$$\varphi'' + \frac{3}{r}\varphi' = m^2\varphi. \tag{5..5}$$

   С помощью замены $\varphi = \dfrac{\chi}{r}$ уравнение (5..5) сводится к модифицированному уравнению Бесселя, решением которого являются модифицированные функции Бесселя. Таким образом, решение уравнения (5..5) будет иметь вид:

$$\varphi(r) = \frac{C}{r}K_1(mr), \tag{5..6}$$

   где $C \in \mathbb{R}$ - произвольная постоянная, $K_1(mr)$ - функция МакДональда.

2. $r \ll m^{-1}$

   При таких значениях r можно показать, что вклад массового слагаемого действительно пренебрежимо мал. В таком случае уравнения поля запишутся следующим образом:

$$\varphi'' + \frac{3}{r}\varphi' = -\lambda\varphi^3. \tag{5..7}$$

   Решение такого уравнения нам известно, это липатон (4..4).

Итак, мы получили два решения для двух областей, которые необходимо сшить в области $\rho \ll r \ll m^{-1}$. Раскладывая $\dfrac{C}{r}K_1(mr)$ в ряд до первого слагаемого, находим, что $C = \dfrac{2\sqrt{2}m\rho}{\sqrt{\lambda}}$. Таким образом, имеем два сшитых решения, образующих отскоковое:

$$\varphi(r) = \frac{2\sqrt{2}m\rho}{\sqrt{\lambda}r}K_1(mr), \quad r \gg \rho \tag{5..8}$$

$$\varphi(r) = \frac{2\sqrt{2}\rho}{\sqrt{\lambda}(\rho^2 + r^2)}, \qquad r \ll m^{-1}. \tag{5..9}$$

Стоит отметить, что оба решения были найдены в нулевом порядке по m^2.

Рассмотрим теперь решения в первом порядке по m^2. Решение в области $r \ll m^{-1}$ будет иметь вид $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$, где φ_0 - липатон, найденный в нулевом порядке по m^2, $\delta\varphi$ - возмущение, соответствующее добавлению массы. Подставив выражение для липатона в (3..8) (полагая $d = 4$) и используя (5..1) в качестве выражения для потенциала, получим уравнение для $\delta\varphi$:

$$(\delta\varphi)'' + \frac{3}{r}(\delta\varphi)' + 3\lambda\varphi_0^2(\delta\varphi) = m^2\varphi_0. \tag{5..10}$$

Заметим, что уравнению (4..2) удовлетворяет (4..4), притом для любого значения параметра ρ. Данное обстоятельство помогает понять, что решение $\widetilde{\varphi_0}(\rho+\delta\rho) = \varphi_0 + \chi\cdot\delta\rho$ также удовлетворяет (4..4). Легко показать, что $\chi = \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\rho}$. Домножим (5..10) слева на χ и проинтегрируем по d^4x от 0 до r. Проведя необходимые выкладки, получим уравнение

$$\chi r^3(\delta\varphi)' - r^3\frac{d\chi}{dr}(\delta\varphi) = m^2\int_0^r \varphi_0\chi r^3 dr \tag{5..11}$$

Подставив χ, $\dfrac{d\chi}{dr}$, φ_0, решим (5..11) и получим вид массовой поправки:

$$(\delta\varphi)_1 = \frac{\rho m^2}{\sqrt{2\lambda}r^2}\left[\frac{9\rho^2r^2 - 3r^4 + \left(\rho^4 - 10\rho^2r^2 + r^4\right)\ln\left(1+\frac{r^2}{\rho^2}\right)}{\rho^2+r^2} + \right. \tag{5..12}$$
$$\left. +6\rho^2r^2\frac{\rho^2-r^2}{\left(\rho^2+r^2\right)^2}\mathrm{Li}_2\left(-\frac{r^2}{\rho^2}\right)\right],$$

где $\mathrm{Li}_2(x)$ - дилогарифм. Таким образом, в области $r \ll m^{-1}$ решением является липатон с поправкой $O\left(m^2\right)$:

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2}\rho}{\sqrt{\lambda}\left(\rho^2+r^2\right)} + \frac{\rho m^2}{\sqrt{2\lambda}r^2}\left[\frac{9\rho^2r^2 - 3r^4 + \left(\rho^4 - 10\rho^2r^2 + r^4\right)\ln\left(1+\frac{r^2}{\rho^2}\right)}{\rho^2+r^2} + \right. \tag{5..13}$$
$$\left. +6\rho^2r^2\frac{\rho^2-r^2}{\left(\rho^2+r^2\right)^2}\mathrm{Li}_2\left(-\frac{r^2}{\rho^2}\right)\right]$$

В области $r \gg \rho$ решением по-прежнему будет (5..6). Для выполнения сшивки в области $\rho \ll r \ll m^{-1}$ необходимо взять асимптотику (5..13), а (5..6) разложить в ряд до второго слагаемого:

$$\varphi(r) = \frac{C}{mr^2} + \frac{Cm}{2}\left(\ln\frac{mr}{2} + \gamma - \frac{1}{2}\right) \qquad (5..14)$$

$$\varphi(r) = \frac{2\sqrt{2}\rho}{\sqrt{\lambda}r^2} + \frac{\sqrt{2}\rho m^2}{\sqrt{\lambda}}\ln\left(\frac{r}{\rho}\right) - \frac{3\rho m^2}{\sqrt{2\lambda}}, \qquad (5..15)$$

где γ - постоянная Эйлера - Маскерони. При $C = \dfrac{2\sqrt{2}m\rho}{\sqrt{\lambda}}$ в обоих выражениях совпадут слагаемые, содержащие $\dfrac{1}{r^2}$ и $\ln\dfrac{mr}{2}$, однако константы совпадать не будут. Данное обстоятельство показывает, что решения не сшиваются, а значит, отскоковое решение найти невозможно.

Чтобы найти решение, необходимо модифицировать уравнение. Для этого наложим интегральную связь:

$$\int \varphi^3 d^4x = C \qquad (5..16)$$

$$S_E = \int d^4x\left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4\right] \qquad (5..17)$$

и будем искать экстремум евклидова действия при наличии этой связи. Применяя метод Лагранжа, получим экстремальное значение действия:

$$S_E^* = \int d^4x\left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 + L\varphi^3\right], \qquad (5..18)$$

где L - множитель Лагранжа. Варьируя (5..18), получим уравнение поля

$$\varphi'' + \frac{3}{r}\varphi' = m^2\varphi - \lambda\varphi^3 + 3L\varphi^2, \qquad (5..19)$$

Рассматривая вклад, даваемый наложением связи как еще одно возмущение наравне с массовым слагаемым, получим уравнение для поправки:

$$\left(\delta\varphi\right)'' + \frac{3}{r}\left(\delta\varphi\right)' + 3\lambda\varphi_0^2\left(\delta\varphi\right) = 3L\varphi_0^2. \qquad (5..20)$$

Аналогично уравнению (5..11) получим уравнение

$$\chi r^3(\delta\varphi)' - r^3\frac{d\chi}{dr}(\delta\varphi) = 3L\int_0^r \varphi_0^2\chi r^3 dr, \qquad (5..21)$$

решив которое, найдем поправку, соответствующую добавлению связи:

$$(\delta\varphi)_2 = L\frac{r^4 - \rho^2 r^2 + 4\rho^4}{\lambda\left(r^2+\rho^2\right)^2}. \tag{5..22}$$

В области $r \gg \rho$ (5..22) будет иметь вид

$$(\delta\varphi)_2 = \frac{L}{\lambda}. \tag{5..23}$$

Таким образом, учитывая, что результирующая поправка к (4..4) в области $r \gg \rho$ является суммой асимптотик поправок (5..12) и (5..22), получим окончательный вид решения в области $r \gg \rho$:

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2}\rho}{\sqrt{\lambda}r^2} + \frac{\sqrt{2}m^2\rho}{\sqrt{\lambda}}\ln\left(\frac{r}{\rho}\right) - \frac{3m^2\rho}{\sqrt{2\lambda}} + \frac{L}{\lambda}. \tag{5..24}$$

В этой же области (5..6) будет иметь вид

$$\varphi = \frac{C}{mr^2} + \frac{Cm}{2}\left(\ln\frac{mr}{2} + \gamma - \frac{1}{2}\right). \tag{5..25}$$

Из сшивки находим, что $C = \dfrac{2\sqrt{2}m\rho}{\sqrt{\lambda}}$, $L = \sqrt{2\lambda}\rho m^2\left(\gamma + 1 + \ln\dfrac{\rho m}{2}\right)$. Данный пример показывает, как добавление связи помогает найти отскоковое решение. Итак, запишем вид решения во всех областях:

$$\varphi(r) = \frac{2\sqrt{2}m\rho}{\sqrt{\lambda}r}K_1(mr), \qquad r \gg \rho \tag{5..26}$$

$$\varphi(r) = \frac{2\sqrt{2}\rho}{\sqrt{\lambda}r^2} + \frac{\sqrt{2}m^2\rho}{\sqrt{\lambda}}\left(\ln\frac{mr}{2} + \gamma - \frac{1}{2}\right), \qquad \rho \ll r \ll m^{-1} \tag{5..27}$$

$$\varphi(r) = \frac{2\sqrt{2}\rho}{\sqrt{\lambda}(\rho^2+r^2)} + (\delta\varphi)_1 + (\delta\varphi)_2\,, \qquad r \ll m^{-1}, \tag{5..28}$$

где:

$$(\delta\varphi)_1 = \frac{\rho m^2}{\sqrt{2\lambda} r^2}\left[\frac{9\rho^2 r^2 - 3r^4 + \left(\rho^4 - 10\rho^2 r^2 + r^4\right)\ln\left(1+\frac{r^2}{\rho^2}\right)}{\rho^2 + r^2} + \right. \tag{5..29}$$

$$\left. +6\rho^2 r^2 \frac{\rho^2 - r^2}{\left(\rho^2 + r^2\right)^2}\mathrm{Li}_2\left(-\frac{r^2}{\rho^2}\right)\right],$$

$$(\delta\varphi)_2 = L\frac{r^4 - \rho^2 r^2 + 4\rho^4}{\lambda\left(r^2 + \rho^2\right)^2}. \tag{5..30}$$

Вычислим евклидово действие на полученном решении. Прежде всего, заметим, что выражение (5..18), записанное в сферических координатах, можно упростить. Проинтегрируем кинетический член по частям:

$$2\pi^2\int_0^\infty \frac{1}{2}\left(\varphi'\right)^2 r^3 dr = 2\pi^2\left[\frac{1}{2}\varphi\varphi' r^3\Big|_0^\infty - \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi\frac{d}{dr}\left(r^3\frac{d\varphi}{dr}\right)dr\right]. \tag{5..31}$$

Первое слагаемое обращается в нуль, т.к. для отскокового решения выполняется условие гладкости. Во втором слагаемом умножим и разделим подынтегральное выражение на r^3. В результате получим выражение $\dfrac{1}{r^3}\dfrac{d}{dr}\left(r^3\dfrac{d\varphi}{dr}\right)$, которое представляет собой лапласиан в сферических координатах, который, в свою очередь, равен $\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} + 3L\varphi^2$, что следует из уравнений поля(5..20). Группируя и складывая с потенциальным членом, а также с членом, отражающим связь, получим:

$$S_E^* = 2\pi^2\int_0^\infty r^3 dr\left[V(\varphi) - \frac{\varphi}{2}\frac{\partial V}{\partial\varphi} - \frac{3}{2}L\varphi^3\right]. \tag{5..32}$$

Выражением (5..32) можно воспользоваться, чтобы посчитать евклидово действие на отскоковом решении. Подставляя (5..26), (5..27) и (5..28) в (5..32), получим евклидово действие с поправкой:

$$S_E^* = \frac{8\pi^2}{3\lambda}\left[1 - \frac{3}{2}\rho^2 m^2\left(\ln\frac{\rho^2 m^2}{4} + 2\gamma + 1\right)\right] + o\big(\rho^2 m^2\big). \tag{5..33}$$

Данное действие может быть использовано для нахождения вероятности распада для массивного поля.

5.2. Пример №2

В данном разделе рассмотрим теорию скалярного поля с потенциалом вида

$$V(\varphi) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_-}{4}\left(\varphi^4 - \beta^3\varphi_0^4\right), & \varphi < \beta\varphi_0 \\ \dfrac{\lambda_+}{4}\left(\varphi - \varphi_0\right)^4, & \varphi > \beta\varphi_0 \end{cases}, \tag{5..34}$$

где

$$\beta = \frac{\lambda_+^{1/3}}{\lambda_+^{1/3} + \lambda_-^{1/3}}. \tag{5..35}$$

Воспользовавшись методом, описанным в разделе [4.], найдем решения в обеих областях потенциала (5..34) и запишем их:

$$\varphi(r) = \frac{2\sqrt{2}\rho_-}{\sqrt{\lambda_-}\left(\rho_-^2 + r^2\right)}, \qquad \varphi < \beta\varphi_0 \tag{5..36}$$

$$\varphi(r) = \frac{2\sqrt{2}\rho_+}{\sqrt{\lambda_+}\left(\rho_+^2 - r^2\right)} + \varphi_0, \qquad \varphi > \beta\varphi_0. \tag{5..37}$$

Выполним сшивку в точке $\varphi = \beta\varphi_0$. Из равенства значений поля следует соотношение

$$\rho_- = -\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\left(\frac{\beta}{\beta - 1}\right)^2}\,\rho_+, \tag{5..38}$$

при этом можно показать, что квадрат радиуса, при котором поля одинаковы, равен:

$$r^2 = \rho_+^2 - \frac{2\sqrt{2}\rho_+}{\sqrt{\lambda_+}\varphi_0\left(\beta - 1\right)}. \tag{5..39}$$

Приравнивая значения производных в точке $\varphi = \beta\varphi_0$, находим выражение для ρ_+:

$$\rho_+ = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_+}\varphi_0\left(\beta - 1\right)^2\left[1 + \frac{\lambda_-}{\lambda_+}\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^4\right]}. \tag{5..40}$$

Подставляя (5..40) в (5..39) и учитывая (5..35), получим, что сшивка возможна только при $r = 0$. Если $r > 0$, то все пространство будет заполнено решением (5..37), которое, исходя из его вида, не является непрерывным, а значит, не может существовать.

6. Заключение

В данной работе был изучен квазиклассический метод вычисления вероятности распада ложного вакуума с помощью отскокового решения. Была рассмотрена теория скалярного поля в $3+1$ - мерном пространстве на примере кусочно - гладких потенциалов, в которых найти отскоковое решение предложенным методом не удалось. Модификация уравнения наложением интегральной связи помогла сшить решения в различных областях, тем самым дав возможность получить отскоковое решение, на котором впоследствии было вычислено евклидово действие.

Список литературы

[1] Рубаков В. А., Классические калибровочные поля: Бозонные теории: Уч. п. Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: КомКнига, 2005. — 296 с.

[2] Mukhanov V. F., Rabinovici E., Sorin A. S. Quantum Fluctuations and New Instantons I: Linear Unbounded Potential.

[3] Mukhanov V. F., Rabinovici E., Sorin A. S. Quantum Fluctuations and New Instantons II: Quartic Unbounded Potential.

[4] Lipatov L. N., High energy asymptotics of multi-color QCD and exactly solvable lattice models, JETP Lett. 59 (1994) 596 - 599; Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 59 (1994) 571 - 574.