

Оценки формы гало темной материи по движению звезд.

Выполнил:

Студент 214 группы

Корешкова Екатерина Павловна

Научный руководитель:

член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук

Горбунов Дмитрий Сергеевич

Введение.

Для объяснения несоответствия наблюдаемых кривых вращения галактик от теоретических была предложена теория о существовании темной материи.

Целью данной работы является рассмотрение сильно вытянутых траекторий звезд для двух профилей плотности и оценка ошибки в значении скорости.

Постановка задачи.

Рассматривается движение звезд в гравитационном потенциале темной материи в приближении центрально симметричного поля.

Для данной задачи имеем закон сохранения энергии и уравнение траектории:

$$E_0 = \frac{mV_r^2}{2} + \frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r) = \text{const}$$

$$\varphi + \text{const} = \int \frac{L_0}{r^2 \sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} dr$$

Постановка задачи.

Угол, под которым видна малая полуось орбиты из центра галактики: $\Delta\varphi = \varphi(r_{max}) - \varphi(r^{max}/2) \approx 0 \Rightarrow L_0 = 0$. Тогда закон сохранения энергии примет вид:

$$E_0 = \frac{mV_r^2}{2} + U(r) = \text{const}$$

Распределение скоростей.

- Профиль Наварро-Френка-Уайта:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)}$$

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{dV^2}{dr} = -\frac{8\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(s) ds = -\frac{8\pi G}{r^2} \rho_0 R_s^3 \left(\ln \left(\frac{r}{R_s} + 1 \right) - \frac{r}{r + R_s} \right)$$

Распределение скоростей.

Выражение для скорости:

$$V^2 = V_{max}^2 - 8\pi G \rho_0 R_s^2 + \frac{8\pi G}{r} \rho_0 R_s^3 \ln \left(\frac{r}{R_s} + 1 \right)$$

Распределение скоростей.

Для кругового движения:

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{4\pi Gm}{r^2} \int_0^r \rho(s) \, ds = \frac{4\pi Gm}{r^2} \rho_0 R_s^3 \left(\ln \left(\frac{r}{R_s} + 1 \right) - \frac{r}{r + R_s} \right)$$

$$V^2 = \frac{4\pi G}{r} \rho_0 R_s^3 \left(\ln \left(\frac{r}{R_s} + 1 \right) - \frac{r}{r + R_s} \right)$$

Распределение скоростей.

- Псевдоизотермический профиль:

$$\rho(r) = \frac{\rho_c}{1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2}$$

Аналогично, из закона сохранения энергии:

$$\frac{dV^2}{dr} = -\frac{8\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(s) ds = -\frac{8\pi G}{r^2} \rho_c r_c^2 \left(r - r_c \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{r_c} \right) \right)$$

Распределение скоростей.

Выражение для скорости:

$$V^2 = V_{max}^2 - 8\pi G \rho_C r_C^2 - 8\pi G \rho_C r_C^2 \left(\ln \left(\frac{\sqrt{r^2 + r_C^2}}{r_C} \right) + \frac{r_C}{r} \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{r_C} \right) \right)$$

Распределение скоростей.

Для кругового движения:

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{4\pi Gm}{r^2} \int_0^r \rho(s) \, ds = \frac{4\pi Gm}{r^2} \rho_C r_C^2 \left(r - r_C \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{r_C} \right) \right)$$

$$V^2 = 4\pi G \rho_C r_C^2 \left(1 - \frac{r_C}{r} \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{r_C} \right) \right)$$

Сравнение скоростей.

Сравним скорости на среднем расстоянии от центра:

$$\langle r \rangle_{T/2} = \frac{\int_0^{T/2} r dt}{\int_0^{T/2} dt} = \frac{\int_0^{r_{max}} \frac{r}{V} dr}{\int_0^{r_{max}} \frac{1}{V} dr}$$

Сравнение скоростей.

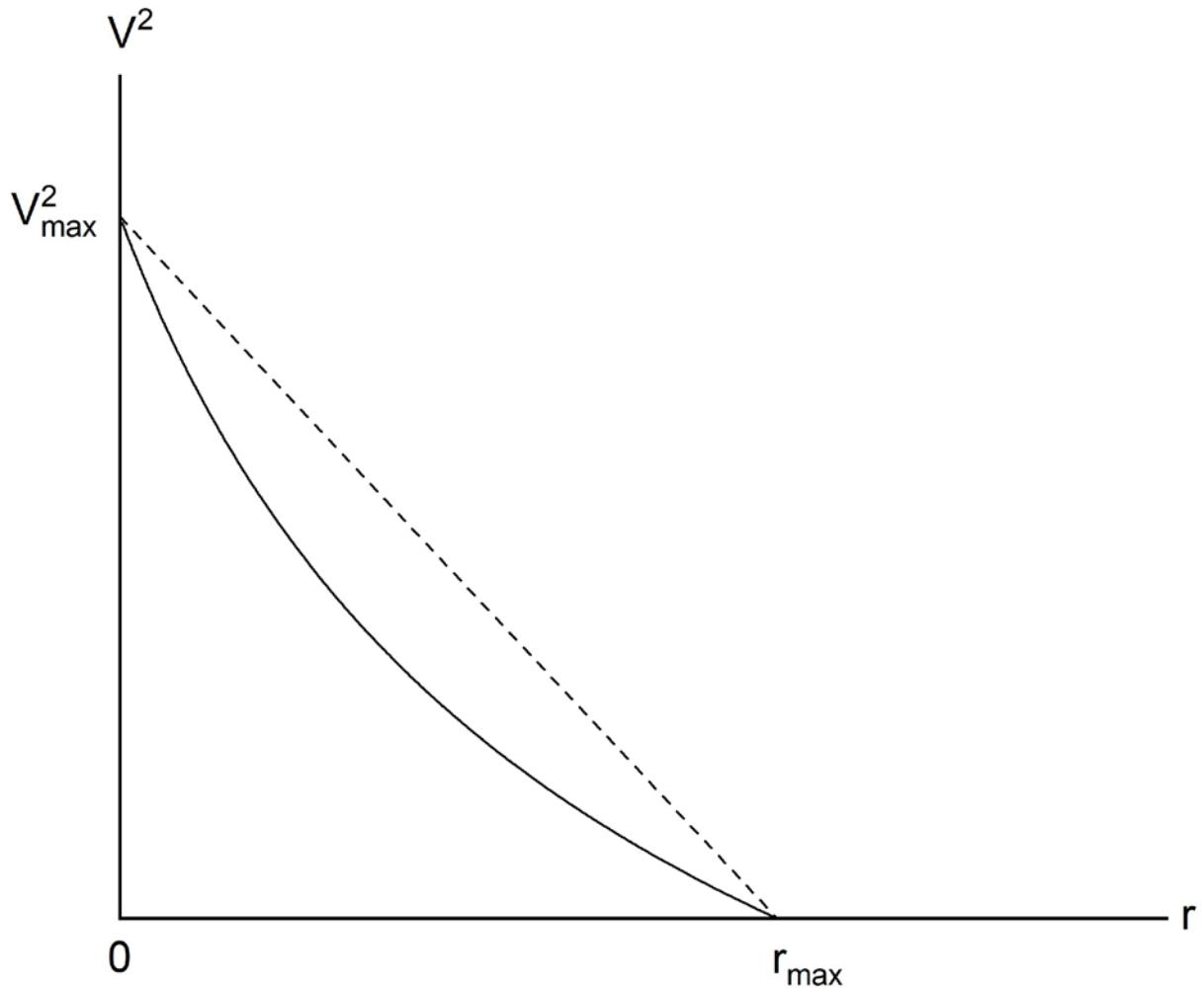
- Профиль Наварро-Френка-Уайта.

Аппроксимируем V^2 прямой:

$$V^2 \approx V_{max}^2 - \frac{V_{max}^2}{r_{max}} r$$

Среднее расстояние:

$$\langle r \rangle_{T/2} = \frac{2^{2/3} + 2}{3} r_{max} \approx 0.28 r_{max}$$



Сравнение скоростей.

Используя условие $V^2(r_{max}) = 0$, получим:

$$V^2 = \frac{200\pi G \rho_0 R_s^3}{7r_{max}} \left(\ln \left(\frac{0.28r_{max}}{R_s} + 1 \right) - 0.28 \ln \left(\frac{r_{max}}{R_s} + 1 \right) \right)$$

Для кругового движения скорость на расстоянии $0.28r_{max}$:

$$V^2 = \frac{100\pi G \rho_0 R_s^3}{7r_{max}} \left(\ln \left(\frac{0.28r_{max}}{R_s} + 1 \right) - \frac{0.28r_{max}}{0.28r_{max} + R_s} \right)$$

Сравнение скоростей.

Проекции скоростей:

Для вытянутой орбиты:

$$v = V \cos i \Rightarrow v^2 = V^2 < \cos^2 i > = \frac{V^2}{2}$$

Для круговой орбиты:

$$v^2 = \frac{V^2}{3}$$

Сравнение скоростей.

$$\Delta v^2 = \frac{-100\pi G \rho_0 R_s^3}{7r_{max}} \left(0.28 \ln \left(\frac{r_{max}}{R_s} + 1 \right) - \frac{2}{3} \ln \left(\frac{0.28r_{max}}{R_s} + 1 \right) - \frac{0.28r_{max}}{0.28r_{max} + R_s} \right)$$

Относительная ошибка:

$$\left. \frac{\Delta v^2}{v^2} \right|_{r_{max} \ll R_s} \approx 87\%$$

$$\left. \frac{\Delta v^2}{v^2} \right|_{r_{max} \gg R_s} \approx -10\%$$

$$\left. \frac{\Delta v^2}{v^2} \right|_{r_{max} = R_s} \approx 82\%$$

Сравнение скоростей.

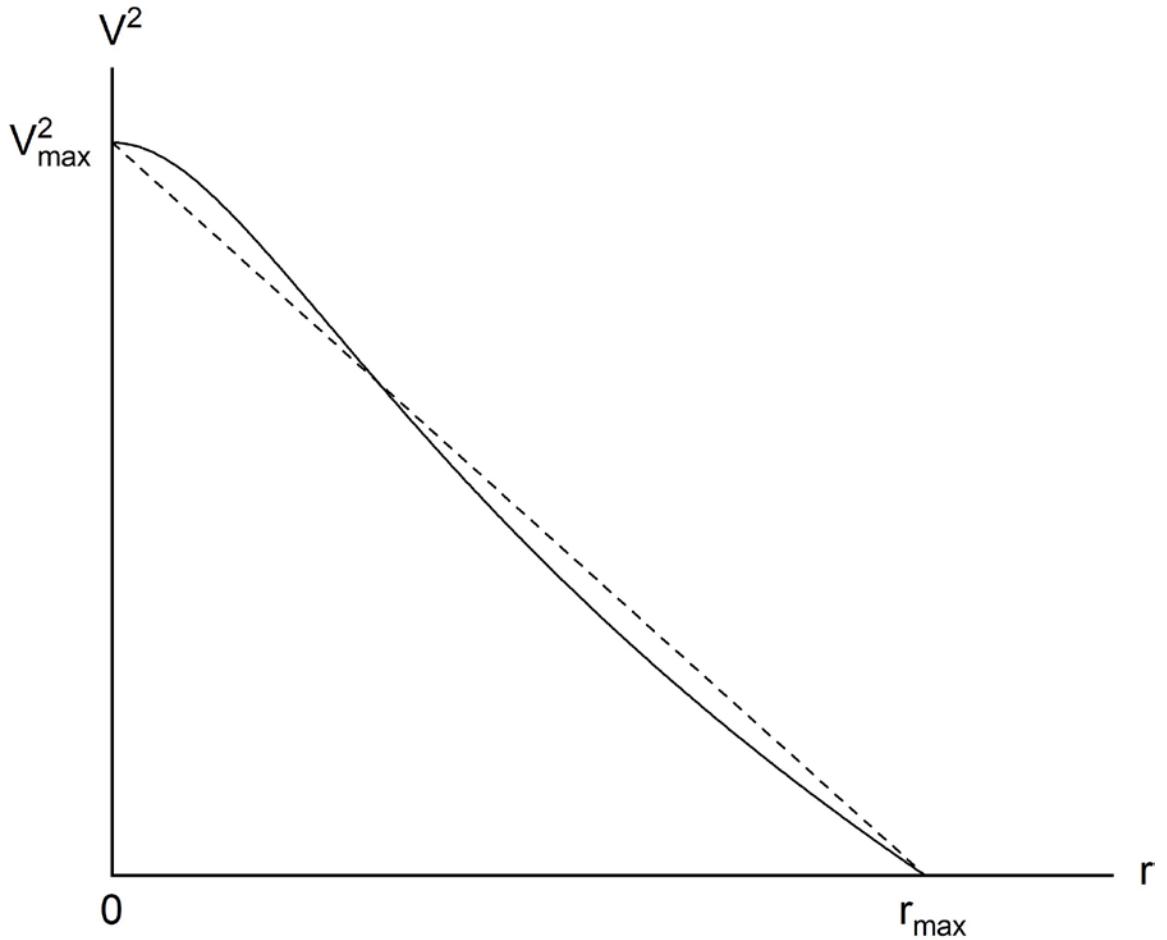
- Псевдоизотермический профиль.

Апроксимируем V^2 прямой:

$$V^2 \approx V_{max}^2 - \frac{V_{max}^2}{r_{max}} r$$

Среднее расстояние:

$$\langle r \rangle_{T/2} = \frac{2^{2/3} + 2}{3} r_{max} \approx 0.28 r_{max}$$



Сравнение скоростей.

Для вытянутой орбиты:

$$V^2 = 8\pi G \rho_C r_C^2 \left(\ln \left(\frac{\sqrt{r_{max}^2 - r_C^2}}{r_C} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{(0.28r_{max})^2 - r_C^2}}{r_C} \right) + \right. \\ \left. + \frac{r_C}{r_{max}} \operatorname{arctg} \left(\frac{r_{max}}{r_C} \right) - \frac{r_C}{0.28r_{max}} \operatorname{arctg} \left(\frac{0.28r_{max}}{r_C} \right) \right)$$

Для круговой орбиты:

$$V^2 = 4\pi G \rho_C r_C^2 \left(1 - \frac{r_C}{0.28r_{max}} \operatorname{arctg} \left(\frac{0.28r_{max}}{r_C} \right) \right)$$

Сравнение скоростей.

$$\Delta v^2 = 8\pi G \rho_C r_C^2 \left(\ln \left(\frac{\sqrt{r_{max}^2 - r_C^2}}{r_C} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{(0.28r_{max})^2 - r_C^2}}{r_C} \right) + \right. \\ \left. + \frac{r_C}{r_{max}} \operatorname{arctg} \left(\frac{r_{max}}{r_C} \right) - \frac{r_C}{0.56r_{max}} \operatorname{arctg} \left(\frac{0.28r_{max}}{r_C} \right) - \frac{1}{2} \right)$$

$$\left. \frac{\Delta v^2}{v^2} \right|_{r_{max} \ll r_C} \approx 94\%$$

$$\left. \frac{\Delta v^2}{v^2} \right|_{r_{max} \gg r_C} \approx -10\%$$

$$\left. \frac{\Delta v^2}{v^2} \right|_{r_{max} = r_C} \approx 93\%$$

Вывод.

В результате мы получили оценку для относительной ошибки скорости на характерных расстояниях. Из значений этих ошибок, как для профиля Наварро-Френка-Уайта, так и для псевдоизотермического профиля, можно сделать вывод, что разница скоростей для рассмотренных типов движения наиболее сильно проявляется в центральной области и мала на периферии.