

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**«СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ ВЫСШЕСПИНОВОЕ ВЕ
ДЕЙСТВИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ AdS_2 »**

Выполнил студент
443 группы
Хайруллин Бари Рустамович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Алкалаев Константин Борисович

Допущена к защите
Зав. кафедрой _____

МОСКВА

2022

Оглавление

Введение	2
1. Лоренцева связность на пространстве анти-де Ситтера . .	3
2. Введение в формализм распаковки	5
3. Поля на двумерии	7
Заключение	19
Список использованных источников	20

Введение

Как было показано в работе [4], уравнения движения свободного скалярного поля на пространствах Минковского и анти-де Ситтера любой размерности могут быть сформулированы в терминах бесконечной цепочки Лоренц-инвариантных уравнений на бесследовые симметричные тензоры с помощью так называемого формализма распаковки. Оказывается, что на двумерном пространстве Минковского есть возможность использовать данный формализм для описания динамики как скалярных, так и спинорных полей. Однако дальнейшее обобщение теории до высшеспиновой требует отдельного рассмотрения при размерности пространства, равной двум: в ней теория является топологической, то есть все локальные степени свободы распространяются лишь скалярными и спинорными полями. Для реализации симметрий высших спинов на указанном пространстве вводится бесконечное число взаимодействующих между собой полей материи.

Целью работы служит явное построение формализма распаковки для мультиспиноров на двумерии, а так же развитие твисторного формализма, наиболее удобного при описании высших спинов.

Актуальность и практическая значимость данной работы объясняется тесной связью указанной алгебры высших спинов с моделью Сачдева-Йе-Китаева [3], применяемой в физике конденсированных сред и теории чёрных дыр.

1. Лоренцева связность на пространстве анти-де Ситтера

В дальнейшем нам понадобится лоренцева ковариантная производная [5] на пространстве AdS_n , которая сохраняет лоренц-инвариантность тензоров при их параллельных переносах. Алгеброй указанного пространства является $o(n-1,2)$, в которой содержится подалгебра Лоренца $o(n-1,1) \subset o(n-1,2)$. Будем ассоциировать заглавные индексы $A, B, \dots = 0 \div n$ с объемлющей алгеброй и прописные $a, b = 0 \div n-1$ с её подалгеброй. Любой элемент $o(n-1,2)$ в фундаментальном представлении имеет блочную структуру:

$$\begin{pmatrix} 0 & P_a \\ P^a & L_c^b \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где $L_{ab} \in o(n-1,1)$ и P_a - трансляции. Спин-связность является элементом алгебры, что позволяет разложить её в AdS_n на лоренцеву и трансляционную составляющие:

$$W = \omega^{ab} L_{ab} + \lambda e^a P_a. \quad (1.2)$$

Данное соотношение можно сделать AdS_n - ковариантным с помощью введения нормированного на единицу векторного поля $V^A(x)$, относительно которого лоренцева подалгебра будет задаваться как множество перпендикулярных ему векторов.

$$e^A = dV^A + W^{AB} V_B, \quad (1.3)$$

$$\omega^{AB} = W^{AB} - \lambda(e^A V^B - e^B V^A). \quad (1.4)$$

Учитывая условие $V^A V_A = 1$, $V^A dV_A = 0$, получаем, что

$$V_A e^A = 0, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{D}V^A \equiv dV^A + \omega^{AB}V_B = 0. \quad (1.6)$$

Последнее соотношение позволяет увидеть, что любая V - продольная часть $o(n-1, 2)$ тензора исчезает при действии лоренцевой ковариантной производной, то есть лоренц-инвариантные тензоры сохраняют свою инвариантность. Условие равенства нулю кривизны AdS имеет вид

$$dW^{AB} + W^{AC}W_C{}^B = 0, \quad (1.7)$$

из которого следует соотношение Картана

$$de^A + W^{AC}e_C = 0. \quad (1.8)$$

В терминах лоренцевой связности эти уравнения записываются в виде

$$d\omega^{AB} + \omega^{AC}\omega_C{}^B = \lambda^2 e^A e^B, \quad (1.9)$$

$$\mathcal{D}e^A = de^A + \omega^{AC}e_C = 0. \quad (1.10)$$

Пусть $F^{A(k)}$ - некоторый симметричный тензор ранга k . Тогда действие на него лоренцевой ковариантной производной имеет вид

$$\mathcal{D}F^{A(k)} = dF^{A(k)} + k\omega^{AB}F_B^{A(k-1)}, \quad (1.11)$$

а квадрат оператора с учётом 1..9

$$\mathcal{D}^2 F^{A(k)} = k\lambda^2 e^A e^B F_B^{A(k-1)}. \quad (1.12)$$

Отметим, что λ^{-1} - радиус пространства AdS и случай $\lambda = 0$ описывает лоренцеву геометрию.

2. Введение в формализм распаковки

Рассмотрим бесконечную цепочку тензорных полей на пространстве AdS :

$$C(x) = \{c, c^A, \dots c^{A(k)}, \dots\} \quad (2..1)$$

с наложенным условием бесследовости

$$\eta_{AA} c^{A(k+2)} = 0. \quad (2..2)$$

Как было показано в [4], бесконечная система уравнений

$$(DC)^{A(k)} = 0 \quad (2..3)$$

эквивалентна уравнению Клейна-Гордона на нулевой элемент цепочки

$$(\mathcal{D}_A \mathcal{D}^A + m^2)c = 0. \quad (2..4)$$

На оператор D накладываются следующие условия:

- линейность;
- сохранение бесследовости
- для некоторой цепочки T из тензорных форм p - форм $T_{(p)}^{A(k)}$ выполняется

$$(DT)_{(p+1)}^{A(k)} = D \left[T_{(p)}^{A(k-1)}; T_{(p)}^{A(k)}; T_{(p)}^{A(k+1)} \right]; \quad (2..5)$$

- нильпотентность, то есть $D^2 T = 0$.

Наиболее общий вид такого оператора записывается в виде

$$D = \sigma_- + \mathcal{D} + \sigma_+, \quad (2..6)$$

где

$$(\sigma_- T)_{(p+1)}^{A(k-1)} = e_B T_{(p)}^{BA(k-1)}, \quad (2..7)$$

$$(\sigma_+ T)_{(p+1)}^{A(k+1)} = f(k) \left[e^A T_{(p)}^{A(k)} + a_k e_B \eta^{AA} T_{(p)}^{BA(k-1)} \right]. \quad (2..8)$$

Коэффициент a_k фиксируется из условия сохранения бесследовости, в то время как $f(k)$ фиксируется условием нильпотентности с точностью до выбора $f(0)$, который фиксирует массу поля.

$$a_k = -\frac{k}{n + 2(k-1)}, \quad (2..9)$$

$$f(k) = \frac{k+1}{2k+n} (\lambda^2 k(k+n-1) - m^2). \quad (2..10)$$

Для получения уравнения Клейна-Гордона необходимо записать уравнение 2..3 для нулевого и первого рангов.

$$e^B c_B + e^B \mathcal{D}_B c = 0, \quad (2..11)$$

из которого следует

$$c^B = -\mathcal{D}^B c. \quad (2..12)$$

Уравнение для первого ранга уже содержит оператор σ_+ :

$$e^B c_B^A + e^B \mathcal{D}_B c^A + f(0) e^A c = 0. \quad (2..13)$$

$$c_B^A - \mathcal{D}_B \mathcal{D}^A c - \frac{m^2}{n} \delta_B^A c = 0. \quad (2..14)$$

Сворачивая попарно индексы в последнем уравнении и учитывая бесследовость полевых тензоров, получим уравнение Клейна-Гордона 2..4. Можно так же показать, что остальные уравнения системы 2..3 не влияют на решение на скалярный элемент цепочки.

3. Поля на двумерии

Особый интерес для нас будет представлять формализм распаковки на двумерном пространстве Минковского, потому что, как мы увидим далее, с помощью него можно записать одновременно уравнение Клейна-Гордона и уравнение Дирака. Главное удобство выбранной размерности пространства заключается в том, что алгебра AdS_2 , содержащая подалгебру Лоренца, изоморфна $sl(2, \mathbb{R})$. Тензоры $o(1, 1)$ могут рассматриваться как $o(1, 2)$ - тензоры с наложенным условием V - поперечности:

$$V_A F^{A(k)} = 0, \quad (3.1)$$

где вектор V обсуждался в первой главе и называется компенсатором. Поперечные тензоры будем так же называть трансверсальными. Двумерные операторы на пространстве Минковского:

$$(\sigma_- C)^{a(k-1)} = e_b c^{ba(k-1)}, \quad (3.2)$$

$$(\sigma_+ C)^{a(k+1)} = f(k) \left(e^a c^{a(k)} - \frac{1}{2} \eta^{aa} e_b c^{ba(k-1)} \right). \quad (3.3)$$

Чтобы записать их в AdS_2 - ковариантной форме, необходимо, чтобы операторы не выводили тензоры из класса трансверсальных. Учитывая 1..5, эти же операторы запишутся в виде

$$(\sigma_- C)^{A(k-1)} = e_M \wedge c^{MA(k-1)}, \quad (3.4)$$

$$(\sigma_+ C)^{A(k+1)} = f(k) \left[e^A c^{A(k)} - \frac{1}{2} (\eta^{AA} - V^A V^A) e_M c^{MA(k-1)} \right]. \quad (3.5)$$

В дальнейшем для нас будет значимо, что операторы теперь содержат дополнительную векторную структуру в виде компенсатора. Из описанных

выше условий для данных операторов имеем

$$f(k) = \frac{\lambda^2}{2}k(k+1) - m^2/3 \quad (3..6)$$

и уравнение Клейна-Гордона в той же форме, что 2..4. Чтобы рассмотреть теперь не только скалярные, но и спинорные поля, перейдём к описанию в терминах $sl(2)$ - тензоров. Коммутационные соотношения алгебры $o(2,1)$

$$[T_A, T_B] = -2\epsilon_{ABC}T^C \quad (3..7)$$

переходят в коммутационные соотношения алгебры $sl(2)$

$$[T_{\alpha\beta}, T_{\gamma\rho}] = \epsilon_{\alpha\gamma}T_{\beta\rho} + \epsilon_{\beta\rho}T_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\rho}T_{\beta\gamma} + \epsilon_{\beta\gamma}T_{\alpha\rho} \quad (3..8)$$

при изоморфизме, заданном соотношением

$$F^{\alpha\beta} = F^A(\tau_A)^{\alpha\beta}, \quad (3..9)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \tau_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3..10)$$

В $sl(2)$ имеется инвариантный символ Леви-Чевиты $\epsilon^{\alpha\beta}, \epsilon_{12} = \epsilon^{12} = 1$, с помощью которого можно поднимать и опускать индексы:

$$T^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}T_\beta, \quad (3..11)$$

$$T_\alpha = T^\beta\epsilon_{\beta\alpha}, \quad (3..12)$$

$$\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta. \quad (3..13)$$

Свёртка тензоров при изоморфизме отличается коэффициентом:

$$F^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = -2F^A G_A, \quad (3.14)$$

а для одинаковых симметричных тензоров имеем соотношение:

$$F^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma} = -\delta_\gamma^\alpha F^A F_A. \quad (3.15)$$

В частности, введённый ранее компенсатор имеет норму $V^{\alpha\beta}V_{\alpha\beta} = -2$. Рассмотрим произведение двух тетрад $V^{\beta\beta}V^{\gamma\gamma}$. Оно коммутативно, поэтому для вывода соотношений запишем симметричную диаграмму Юнга:

$$(\boxed{\beta\beta} \otimes \boxed{\gamma\gamma})_{sym} = \boxed{\beta\beta\gamma\gamma} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \beta & \beta \\ \hline \gamma & \gamma \\ \hline \end{array}, \quad (3.16)$$

откуда

$$V_{\beta\beta}V_{\gamma\gamma} = V_{\beta\gamma}V_{\beta\gamma} - \epsilon_{\beta\gamma}\epsilon_{\beta\gamma}. \quad (3.17)$$

Для трансверсальных тензоров:

$$V_{\beta\gamma}V_{\beta\gamma}F^{\gamma\gamma} = F_{\beta\beta}. \quad (3.18)$$

Рассмотрим теперь внешнее произведение тетрад $e^{\beta\beta} \wedge e^{\gamma\gamma}$. Оно антисимметрично, поэтому

$$(\boxed{\alpha\alpha} \otimes \boxed{\beta\beta})_{asym} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & \alpha & \beta \\ \hline \beta & & \\ \hline \end{array}, \quad (3.19)$$

откуда

$$e^{\alpha\alpha}e^{\beta\beta} = p_{(2)}\epsilon^{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}, \quad (3.20)$$

$$e_\beta^\alpha e^{\beta\beta} = p_{(2)}V^{\alpha\beta}. \quad (3.21)$$

Тогда

$$e^{\alpha\alpha}e^{\beta\beta}c_{\beta\beta}^{\alpha(n-2)} = p_{(2)}\epsilon^{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}c_{\beta\beta}^{\alpha(n-2)} = e_\beta^\alpha e^{\beta\beta}c_\beta^{\alpha(n-1)}. \quad (3.22)$$

Спин-связность при изоморфизме $\omega^{AB} \rightarrow \omega^{\alpha\alpha|\beta\beta}$ имеет те же индексные симметрии, что и произведение тетрад, т.е.

$$\omega^{\alpha\alpha|\beta\beta} = -2\omega_{(1)}\epsilon^{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}. \quad (3..23)$$

Учитывая, что $\omega_{(1)} \wedge \omega_{(1)}$, структурные соотношения 1..9 примут вид

$$d(-2\omega_{(1)}\epsilon^{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}) = \lambda^2 e^{\alpha\alpha}e^{\beta\beta}, \quad (3..24)$$

$$d(\omega_{(1)}V^{\alpha\beta}) = \epsilon_{\alpha\beta}d(\omega_{(1)}\epsilon^{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}) = -\frac{\lambda^2}{2}e_{\beta}^{\alpha}e^{\beta\beta}. \quad (3..25)$$

Ковариантная производная запишется в виде

$$\mathcal{D}c^{\alpha(k)} = dc^{\alpha(k)} + k\omega_{(1)}\epsilon^{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}c_{\beta\beta}^{\alpha(k-2)}, \quad (3..26)$$

что преобразуется в следующее выражение:

$$\mathcal{D}c^{\alpha(k)} = dc^{\alpha(k)} + k\omega_{(1)}V^{\beta\alpha}c_{\beta}^{\alpha(k-1)}. \quad (3..27)$$

Квадрат оператора:

$$\mathcal{D}^2c^{\alpha(k)} = -\frac{k\lambda^2}{2}e^{\alpha\alpha}e_{\beta\beta}c^{\beta\beta\alpha(k-2)}. \quad (3..28)$$

Выведем так же полезное соотношение для перебрасывания немых индексов между компенсатором и тетрадой:

$$V_{\alpha\alpha}[e^{\alpha\alpha}c^{\alpha(k)}] = V_{\alpha\alpha}[V_{\beta}^{\alpha}V_{\beta}^{\alpha}e^{\beta\beta}c^{\alpha(k)}], \quad (3..29)$$

откуда

$$V_{\beta\beta}e^{\beta\alpha}c^{\beta\alpha(k-1)} = -V^{\beta\alpha}e_{\beta\beta}c^{\beta\alpha(k-1)}. \quad (3..30)$$

Перейдём теперь к переносу формализма распаковки на $sl(2)$ тензоры. Сигма-операторы конструируются аналогичным образом:

$$(\sigma_-T)_{(p+1)}^{\alpha(k-2)} = e_{\beta\beta}T_{(p)}^{\beta\beta\alpha(k-2)}, \quad (3..31)$$

$$(\sigma_+T)_{(p+1)}^{\alpha(k+2)} = f(k) \left[F_{(p+1)}^{\alpha(k+2)} + G_{(p+1)}^{\alpha(k+2)} + H_{(p+1)}^{\alpha(k+2)} \right], \quad (3..32)$$

где

$$\begin{aligned} F_{(p+1)}^{\alpha(k+2)} &= e^{\alpha\alpha} T_{(p)}^{\alpha(k)}, \\ G_{(p+1)}^{\alpha(k+2)} &= \frac{k}{k+1} V^{\alpha\alpha} V_{\beta\beta} e^{\beta\alpha} T_{(p)}^{\beta\alpha(k-1)}, \\ H_{(p+1)}^{\alpha(k+2)} &= \frac{k-1}{4(k+1)} V^{\alpha\alpha} V^{\alpha\alpha} e^{\beta\beta} T_{(p)\beta\beta}^{\alpha(k-2)}. \end{aligned}$$

Каждому мультиспинору с чётным количеством индексов соответствует бозонное поле или чистый тензор $o(2, 1)$. Мультиспинорам с нечётным количеством индексов соответствуют фермионные поля или спин-тензоры $o(2, 1)$. Для последних можно сконструировать дополнительный сигма-оператор, который не изменяет ранга:

$$(\sigma_0 T)_{(p+1)}^{\alpha(k)} = \phi(k) \left[V^{\alpha\alpha} e^{\beta\beta} T_{(p)\beta\beta}^{\alpha(k-2)} + 2V_{\beta\beta} e^{\beta\alpha} T_{(p)}^{\beta\alpha(k-1)} \right]. \quad (3..33)$$

Для мультиспиноров чётного ранга данный оператор тождественно равен нулю, потому что он не имеет образа в $o(2, 1)$. Несмотря на то что компенсатор позволяет записать казалось бы подходящую комбинацию для такого оператора - $V^A e_B T_{(p)}^{BA(k-1)}$, - её никаким образом не сделать V - поперечной. Поэтому на чётных индексах

$$V^{\alpha\alpha} e^{\beta\beta} T_{(p)\beta\beta}^{\alpha(k-2)} = -2V_{\beta\beta} e^{\beta\alpha} T_{(p)}^{\beta\alpha(k-1)} = 2V^{\beta\alpha} e_{\beta\beta} c^{\beta\alpha(k-1)} \quad (3..34)$$

и $\phi(2k)$ произвольны.

Модифицированный нильпотентный оператор тогда примет вид

$$D = \sigma_- + \mathcal{D} + \sigma_0 + \sigma_+, \quad (3..35)$$

а условие его нильпотентности разбивается на пять градуированных уравнений:

$$\sigma_-^2 = 0, \quad (3..36)$$

$$\{\sigma_-, \mathcal{D}\} + \{\sigma_-, \sigma_0\} = 0, \quad (3..37)$$

$$\mathcal{D}^2 + \sigma_0^2 + \{\sigma_-, \sigma_+\} + \{\mathcal{D}, \sigma_0\} = 0, \quad (3..38)$$

$$\{\mathcal{D}, \sigma_+\} + \{\sigma_0, \sigma_+\} = 0, \quad (3..39)$$

$$\sigma_+^2 = 0. \quad (3.40)$$

Для начала отметим, что все антикоммутаторы, содержащие лоренцеву ковариантную производную, тождественно равны нулю из условий 1..6 и 1..10. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что 3..36 и 3..40 также выполнены тождественно. Тогда останутся уравнения:

$$\{\sigma_-, \sigma_0\} = 0, \quad (3.41)$$

$$\mathcal{D}^2 + \sigma_0^2 + \{\sigma_-, \sigma_+\} = 0, \quad (3.42)$$

$$\{\sigma_0, \sigma_+\} = 0. \quad (3.43)$$

Первое и последнее уравнения этой системы выполнены тогда и только тогда, когда

$$\phi(k) = \frac{k(k-1)}{(k+1)(k-2)}\phi(k-2). \quad (3.44)$$

Из уравнения видно, что решение независимо на чётных и нечётных k . Как было отмечено ранее, на чётных мультиспинорах $\sigma_0 \equiv 0$, поэтому положим $\phi(2k) = 0$. Общее решение рекуррентного уравнения 3..44:

$$\phi(2k+1) = 2\phi(1)\frac{2k+1}{2k+2}. \quad (3.45)$$

Из уравнения 3..42 получаем систему на линейно-независимые слагаемые:

$$V^{\alpha\alpha}V^{\gamma\alpha}e_{\gamma\gamma}e_{\beta\beta}c^{\beta\beta\gamma\alpha(k-3)} :$$

$$\phi^2(k)\frac{4(k-2)}{k(k-1)} - f(k-2)\frac{k-2}{k-1} + f(k)\frac{(k-1)(k-2)}{(k+1)^2} = 0, \quad (3.46)$$

$$e^{\alpha\alpha}e_{\beta\beta}c^{\beta\beta\alpha(k-2)} :$$

$$-f(k) + f(k-2) - k\frac{\lambda^2}{2} = 0. \quad (3.47)$$

Решение второго уравнения имеет вид

$$f(k) = \frac{\lambda^2}{8}k(k+2) + f_0. \quad (3.48)$$

Заметим, что слагаемое с коэффициентом 3..46 для бозонов ввиду 3..34

равно нулю независимо от множителя перед ним:

$$\begin{aligned} V^{\alpha\alpha}V^{\gamma\alpha}e_{\gamma\gamma}e_{\beta\beta}c^{\beta\beta\gamma\alpha(k-3)} &= -V^{\alpha\alpha}V_{\gamma\gamma}e^{\gamma\alpha}e_{\beta\beta}c^{\beta\beta\gamma\alpha(k-3)} = \\ &= 2V_{\beta\beta}V_{\gamma\gamma}e^{\gamma\alpha}e^{\beta\alpha}c^{\beta\gamma\alpha(k-2)} = 2e^{\gamma\alpha}e^{\beta\alpha}c_{\beta\gamma}^{\alpha(k-2)} \equiv 0, \end{aligned} \quad (3..49)$$

поэтому оно не даёт никаких новых соотношений на 3..48. Для фермионов же оно фиксирует свободную константу:

$$f_0 = 4\phi^2(1) + \frac{\lambda^2}{8}. \quad (3..50)$$

Получим теперь уравнение Дирака. Раскрывая $(DC)^\alpha = 0$,

$$e^{\beta\beta}c_{\beta\beta}^\alpha + e^{\beta\beta}\mathcal{D}_{\beta\beta}c^\alpha + 2\phi(1)V_{\beta\beta}e^{\beta\alpha}c^\beta = 0, \quad (3..51)$$

$$c_{\beta\beta}^\alpha + \mathcal{D}_{\beta\beta}c^\alpha - 2\phi(1)V_\beta^\alpha c_\beta = 0. \quad (3..52)$$

Сворачивая верхний индекс с одним нижним, а так же сворачивая свободный индекс с компенсатором, получаем уравнение Дирака:

$$V^{\alpha\beta}\mathcal{D}_{\beta\beta}c^\beta + m_fc^\alpha = 0, \quad (3..53)$$

$$\phi(1) = m_f. \quad (3..54)$$

Уравнение Клейна-Гордона получается из системы $(DC)^{\alpha(0)} = 0$, $(DC)^{\alpha(2)} = 0$:

$$e^{\alpha\alpha} = -\mathcal{D}^{\alpha\alpha}c, \quad (3..55)$$

$$c_{\beta\beta}^{\alpha\alpha} - \mathcal{D}_{\beta\beta}\mathcal{D}^{\alpha\alpha}c + f(0)\delta_\beta^\alpha\delta_\beta^\alpha c = 0. \quad (3..56)$$

Сворачивая попарно индексы, получаем искомое уравнение:

$$(\mathcal{D}_{\beta\beta}\mathcal{D}^{\beta\beta} + m_b^2)c = 0, \quad (3..57)$$

$$f_0 = -\frac{m_b^2}{3}. \quad (3..58)$$

Таким образом, формализм распаковки содержит в себе как динамику скалярных полей, так и спинорных.

Рассмотрим осцилляторные операторы [6], удовлетворяющие

соотношениям:

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}. \quad (3..59)$$

Генераторы вида

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4i}\{\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\beta\} \quad (3..60)$$

образуют алгебру $sl(2)$:

$$[\hat{T}_{\alpha\beta}, \hat{T}_{\gamma\rho}] = \hat{T}_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\rho} + \hat{T}_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\rho} + \hat{T}_{\alpha\rho}\epsilon_{\beta\gamma} + \hat{T}_{\beta\rho}\epsilon_{\alpha\gamma}. \quad (3..61)$$

Универсальная обёртывающая алгебры осцилляторов состоит из элементов вида

$$B = \bigoplus_{k=0}^{\infty} B_k = \sum_{k=0}^{\infty} B^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \hat{q}_{\alpha_1} \dots \hat{q}_{\alpha_k}, \quad (3..62)$$

где $B^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ - мультиспиноры. Учитывая, что $B^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ симметричен, для универсальной обёртывающей можно перейти к коммутирующим символам:

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} B^{\alpha_1 \dots \alpha_k} q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_k}. \quad (3..63)$$

Введём на универсальной обёртывающей ассоциативную операцию звёздного умножения [7]:

$$* = \exp \left(i\epsilon_{\alpha\beta} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_\beta} \right) \quad (3..64)$$

Непосредственной подстановкой получаем, что относительно такого умножения осцилляторы образуют ту же алгебру:

$$[q_\alpha, q_\beta]_* \equiv q_\alpha * q_\beta - q_\beta * q_\alpha = 2i\epsilon_{\alpha\beta}. \quad (3..65)$$

Напомним, что символы коммутируют. При этом

$$\{q_\alpha, q_\beta\}_* = \{q_\alpha, q_\beta\}, \quad (3..66)$$

$$(3..67)$$

из чего следует

$$[T_{\alpha\beta}, T_{\gamma\rho}]_* = T_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\rho} + T_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\rho} + T_{\alpha\rho}\epsilon_{\beta\gamma} + T_{\beta\rho}\epsilon_{\alpha\gamma}. \quad (3..68)$$

Разобьём генераторы на продольную и поперечную части:

$$T_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}V_{\alpha\beta}L, \quad (3..69)$$

$$V^{\alpha\beta}P_{\alpha\beta} = 0, \quad (3..70)$$

$$L = V^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i}V^{\alpha\beta}q_{\alpha}q_{\beta}. \quad (3..71)$$

1-форма связности имеет вид:

$$W = \omega L + e^{\alpha\beta}P_{\alpha\beta}. \quad (3..72)$$

Здесь мы положили $\lambda = 1$. Введём линейный оператор, называемый твистом, на универсальной обёртывающей алгебры осцилляторов:

$$\tau(q_{\alpha}) = iV_{\alpha\beta}q^{\beta}, \quad (3..73)$$

$$\tau(q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_n}) = \tau(q_{\alpha_1}) \dots \tau(q_{\alpha_n}). \quad (3..74)$$

Его действие на продольную и поперечную части генераторов имеет вид:

$$\tau(P) = -P, \quad (3..75)$$

$$\tau(L) = L. \quad (3..76)$$

Введём твисторный коммутатор:

$$\llbracket f, g \rrbracket = fg - g\tau(f). \quad (3..77)$$

Тогда явно, что

$$\llbracket L, \cdot \rrbracket = [L, \cdot], \quad (3..78)$$

$$\llbracket P_{\alpha\beta}, \cdot \rrbracket = \{P_{\alpha\beta}, \cdot\}. \quad (3..79)$$

Динамику высших спинов можно реализовать с помощью

модифицированной ковариантной производной [1]:

$$\hat{\nabla}B = dB + \llbracket W, B \rrbracket_* = 0, \quad (3..80)$$

$$\mathcal{D}B + e^{\beta\gamma}\{P_{\beta\gamma}, B\}_* = 0. \quad (3..81)$$

Воспользуемся тем, что

$$e^{\beta\gamma}P_{\beta\gamma} = e^{\beta\gamma}\left(T_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}V_{\beta\gamma}L\right) = \frac{1}{2i}e^{\beta\gamma}q_{\beta}q_{\gamma}. \quad (3..82)$$

Введём обозначения

$$E_+ = -ie^{\beta\gamma}q_{\beta}q_{\gamma}, \quad (3..83)$$

$$E_- = ie^{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial q_{\beta}}\frac{\partial}{\partial q_{\gamma}}, \quad (3..84)$$

$$\frac{1}{2i}e^{\beta\gamma}\{q_{\beta}q_{\gamma}, \cdot\}_* = E_+ + E_-. \quad (3..85)$$

Используя разложение 3..63, получим бесконечную систему уравнений

$$\mathcal{D}B_k + E_+B_{k-2} + E_-B_{k+2} = 0. \quad (3..86)$$

Отметим, что эти уравнения наложены не на поперечные мультиспиноры, однако они допускают разложение

$$B_k = \sum_{2p+m=k} (T_+)^p C_{(p)m}, \quad (3..87)$$

где

$$T_+ = \frac{1}{2}V^{\beta\gamma}q_{\beta}q_{\gamma} \quad (3..88)$$

и $C_{(p)m} = c_{(p)}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_m}$ - поперечные мультиспиноры. Оператор

$$T_- = \frac{1}{2}V^{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial q_{\beta}}\frac{\partial}{\partial q_{\gamma}} \quad (3..89)$$

вычисляет V - след мультиспинора, $T_-C_{(p)k} = 0$. Введём оператор

$$\pi_+C_{(p)m} = -i\frac{(\sigma_+C_{(p)})^{\alpha(m+2)}}{f(m)}(q_{\alpha})^{m+2}, \quad (3..90)$$

который для бозонов принимает вид

$$\pi_+ C_{(p)m} = E_+ C_{(p)m} + \frac{1}{m(m-1)} (T_+)^2 E_- C_{(p)m} \quad (3..91)$$

и обладает свойством

$$T_- \pi_+ C_{(p)m} = 0. \quad (3..92)$$

Очевидно, что

$$[E_+, T_+] C_{(p)m} = 0, \quad (3..93)$$

а уравнение 3..86 переписывается в виде

$$\begin{aligned} \sum_{2p+m=k} (T_+)^p \mathcal{D} C_{(p)m} + \sum_{2p+m=k-2} (T_+)^p E_+ C_{(p)m} + \\ \sum_{2p+m=k+2} E_- (T_+)^p C_{(p)m} = 0. \end{aligned} \quad (3..94)$$

Непосредственным вычислением можно получить, что

$$E_- (T_+)^p C_{(p)m} = \frac{2p}{m-1} (T_+)^p E_- C_{(p)m} - p(p-1) (T_+)^{p-2} E_+ C_{(p)m}. \quad (3..95)$$

Подставляя 3..91 и 3..95,

$$\begin{aligned} \sum_{2p+m=k} (T_+)^p \mathcal{D} C_{(p)m} + \\ + \sum_{2p+m=k-2} (T_+)^p \pi_+ [C_{(p)m} - (p+1)(p+2) C_{(p+2)m}] + \\ + \sum_{2p+m=k+2} (T_+)^p E_- \left[\frac{p(2m+p-1)}{m(m-1)} C_{(p)m} - \frac{1}{m(m-1)} C_{(p-2)m} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3..96)$$

Итак, исходное уравнение на модифицированную ковариантную производную разбивается на бесконечную систему уравнений, каждая из которых распадается на $k/2$ уравнений, определяемых степенью T_+ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} C_{(p)k-2p} + \\ + \pi_+ [C_{(p)k-2p-2} - (p+1)(p+2) C_{(p+2)k-2p-2}] + \\ + \pi_- [p(2k-3p+3) C_{(p)k-2p+2} - C_{(p-2)k-2p+2}] = 0, \end{aligned} \quad (3..97)$$

$$\pi_- C_{(p)m} = i(\sigma_- C_{(p)})^{\alpha(m-2)} (q_\alpha)^{m-2} = \frac{1}{m(m-1)} E_- C_{(p)m}. \quad (3..98)$$

Таким образом, мы получили уравнения, структурно аналогичные системе $(DC)^{\alpha(k)} = 0$. В диагонализированном виде они описывают поля с дискретно растущими массами. Чтобы сделать спектр масс непрерывным, можно деформировать алгебру осцилляторов [6]:

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}(1 + \nu\hat{Q}), \quad (3..99)$$

где $\hat{Q}$ - независимый оператор, $\nu \in \mathbb{R}$ - параметр, позволяющий сделать массы полей непрерывными. На $\hat{Q}$ так же накладываются условия:

$$\{\hat{Q}, \hat{q}_\alpha\} = 0, \quad (3..100)$$

$$\hat{Q}^2 = 1. \quad (3..101)$$

Относительно звёздного произведения данная алгебра не изменяется, однако произвольный мультиспинор раскладывается на независимые части:

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \left[B^{\alpha_1 \dots \alpha_k} + \tilde{B}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} Q \right] q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_k}. \quad (3..102)$$

Описанный выше алгоритм так же позволяет рассмотреть фермионные поля, если отказаться от соотношения 3..34 и выделить в системе 3..86 так же оператор

$$\pi_0 C_{(p)m} = \frac{(\sigma_0 C_{(p)})^{\alpha(m)}}{\phi(m)} (q_\alpha)^m. \quad (3..103)$$

Как было показано в работе [4], динамика бесспиновых частиц может быть описана BF действием

$$S^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(k)}{k!} \int e^{B_3} \wedge \dots e^{B_n} \wedge \epsilon_{B_1 \dots B_n} (DC)^{B_1 A(k-1)} (DC)_{A(k-1)}^{B_2}. \quad (3..104)$$

Дальнейшее развитие данной работы заключается в построении аналогичного действия, описывающего динамику высших спинов на двумерии [2].

Заключение

В данной работе был построен явный вид нильпотентного оператора D , реализующего формализм распаковки для полей на двумерном пространстве Минковского, вложенного в двумерное пространство анти-де Ситтера с помощью компенсаторного векторного поля V . Как было показано, данный формализм содержит в себе динамику как скалярных, так и спинорных полей. Так же были получены алгебраические тождества на комбинации трансверсальных тензоров и компенсатора.

Для описания динамики высших спинов был использован твисторный формализм. При его реализации было удобным использование найденных ранее операторов повышения и понижения ранга тензоров σ_+ и σ_- , не выводящих из класса трансверсальных. Это позволило разбить каждое из уравнений бесконечной системы на цепочку, в которой уравнения соответствуют некоторому порядку V - следа. Получившаяся система описывает динамику массивных взаимодействующих бозонных полей.

Для реализации динамики взаимодействующих спиноров в дальнейшем будет необходим найденный в работе явный вид оператора нулевого ранга σ_0 . Важность такого построения заключается в том, что система из бесконечных наборов взаимодействующих бозонов и фермионов растущих масс реализует симметрии высших спинов, достаточно изученные в пространствах высшей размерности.

Дальнейшее развитие работы заключается в получении аналогичных уравнений на бозонные поля деформированной алгебры осцилляторов, а так же обобщение на спинорные поля. Данный подход позволит построить суперсимметричное высшеспиновое BF действие на указанных пространствах.

Список использованных источников

1. Alkalaev K., Bekaert X. Towards higher-spin AdS₂/CFT₁ holography // Journal of High Energy Physics. 206. 2020.
2. Alkalaev K.B. On higher spin extension of the Jackiw-Teitelboim gravity model // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. Vol. 47. № 36. 2014.
3. Maldacena J., Stanford D. Comments on the Sachdev-Ye-Kitaev model // Phys. Rev. D 94. 2016. 106002.
4. Shaynkman O.V., Vasiliev M.A. Scalar Field in Any Dimension from the Higher Spin Gauge Theory Perspective // Theor.Math.Phys. 123. 2000. - p. 683-700.
5. Vasiliev M.A. Cubic Interactions of Bosonic Higher Spin Gauge Fields in AdS₅ // Nucl.Phys. B616. 2001. - p. 106-162.
6. Vasiliev M.A. Higher Spin Algebras and Quantization on the Sphere and Hyperboloid // International Journal of Modern Physics A. Vol. 06. № 07. 1991. - p. 1115-1135.
7. Vasiliev M.A. Higher Spin Gauge Theories: Star-Product and AdS Space / M. Shifman. The Many Faces of the Superworld. 2000. - p. 533-610.