ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА"

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«РОСТ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА.»

Выполнила студентка
243М группы
Дмитриева Екатерина Алексеевна

____
подпись студента

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Белокуров Владимир Викторович

____
подпись научного руководителя

Научный консультант:
кандидат физ.-мат. наук
Панин Александр Григорьевич

____
подпись научного консультанта

Допущен к защите
Зав. кафедрой _______________________
подпись зав. кафедрой

Москва
2022

Оглавление

Введение.

В работе рассматривается взаимодействие налетающего волнового пакета с солитоном. Целью этой работы является разработка аналитического метода описания данного процесса. Численное моделирование рассеяния волнового пакета на солитоне предсказывает рост массы последнего. С помощью разработанного аналитического метода мы намерены вычислить число частиц, оставшихся в солитоне после рассеяния волнового пакета, и сравнить ответ с результатами численного моделирования для разных значений импульса и амплитуды налетающего волнового пакета.

Расчеты проводятся в предположении, что амплитуда налетающего пакета много меньше амплитуды солитона, а также пакет мало меняется в результате рассеяния. В этом случае применимо Борновское приближение [1], в котором решение представляется в виде ряда по амплитуде налетающего пакета. После взаимодействия волнового пакета часть частиц из него оказывается захваченной солитоном. При этом рождаются прошедший и отраженный волновые пакеты, частота которых равняется разности удвоенной частоты налетающего волнового пакета и солитона. Используя законы сохранения, можно показать, что число частиц в них равно числу частиц, захваченных солитоном. Это позволяет вычислить число частиц, захваченных солитоном, косвенно, что значительно упрощает вычисления.

Исследование таких зависимостей полезно при изучении бозе-конденсата, темной материи и в других случаях, где исследуемые объекты являются солитонными решениями, например, в оптике [2]. Данная задача актуальна для описания захвата солитоном частиц из ансамбля, что применимо в различных областях физики. Однако, обычно изучаются взаимодействия между солитонами [5], а не рассеяние отдельной волны на солитонном решении. Также, в некоторых работах обсуждается рост солитонов в ансамбле частиц, но не ясен процесс, ответственный за их рост [4]. Актуальность задачи подчеркивается тем, что ранее взаимодейстие волнового пакета и солитонного решения не исследовалось. В работе используется естественная система единиц $\hbar = c = 1$.

Борновское приближение в задаче одномерного рассеяния на солитоне.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера:

$$\frac{i\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\Delta\psi}{2} + U(\psi^*\psi)\psi \tag{1}$$

Пусть есть солитонное решение, которое удовлетворяет уравнению (1):

$$\psi_s = f(x)e^{-i\gamma t},$$

где $\gamma < 0$- частота солитона.

Мы хотим изучить взаимодействие солитона и широкого волнового пакета. Поэтому представим искомую волновую функцию в виде: $\psi = \psi_s + \psi_\omega$, где в начальный момент времени

$$\psi_\omega = \psi_\omega^0 = Ae^{-i\omega t + ikx}. \tag{2}$$

Здесь A медленно зависит от t и x. Во всех выражениях ниже будем ее считать постоянной.

$$\frac{i\partial\psi_\omega}{\partial t} + \frac{i\partial\psi_s}{\partial t} = -\frac{\Delta\psi_\omega}{2} - \frac{\Delta\psi_s}{2} + U(|\psi_\omega+\psi_s|^2)(\psi_\omega+\psi_s) + U(|\psi_s|^2)\psi_s - U(|\psi_s|^2)\psi_s, \tag{3}$$

Далее учтем, что ψ_s удовлетворяет уравнению (1), поэтому:

$$\frac{i\partial\psi_\omega}{\partial t} = -\frac{\Delta\psi_\omega}{2} + U(|\psi_\omega + \psi_s|^2)[\psi_\omega + \psi_s] - U(|\psi_s|^2)\psi_s, \tag{4}$$

Будем считать длину волны много меньше размера солитона $\lambda_\omega \ll R_s$. В таком случае может быть применимо приближение Борна, согласно которому, потенциал может рассматриваться как возмущение [1]. Тогда ψ_ω может быть предсталена в виде

$$\psi_\omega = \psi_\omega^0 + \delta\psi, \tag{5}$$

где ψ_ω^0 дается выражением (2) и удовлетворяет свободному уравнению Шредингера. В этом случае изменения налетающей волны и солитона после взаимодействия друг с другом будут содержаться в $\delta\psi$. Подставив (5) в (4) получим:

$$\frac{i\partial(\delta\psi)}{\partial t} = -\frac{\Delta\delta\psi}{2} + U(|\psi_\omega^0 + \delta\psi + \psi_s|^2)[\psi_\omega^0 + \delta\psi + \psi_s] - U(|\psi_s|^2)\psi_s \tag{6}$$

Пренебрегая $\delta\psi$ в правой части уравнения (6), получим

$$\frac{i\partial(\delta\psi)}{\partial t} = -\frac{\Delta\delta\psi}{2} + U(|\psi_\omega^0 + \psi_s|^2)[\psi_\omega^0 + \psi_s] - U(|\psi_s|^2)\psi_s \tag{7}$$

Рассмотрим случай, когда $A \ll f$. Тогда правую часть уравнения (7) можно разложить в ряд по ψ_ω^0:

$$\frac{i\partial(\delta\psi)}{\partial t} = -\frac{\Delta\delta\psi}{2} + U(|\psi|^2)\psi_\omega^0 + \frac{\partial U}{\partial|\psi|^2}|\psi_s+\psi_\omega^0|^2(\psi_s+\psi_\omega^0) + \frac{\partial^2 U}{2\partial|\psi|^4}|\psi_s+\psi_\omega^0|^4(\psi_s+\psi_\omega^0) \tag{8}$$

Оставляем только линейные и квадратичные по А члены, получим

$$\frac{i\partial(\delta\psi)}{\partial t} = -\frac{\Delta\delta\psi}{2} + U(|\psi|^2)\psi_\omega^0 + \frac{\partial U}{\partial|\psi|^2}[\psi_s\psi_\omega^{*0} + \psi_s^*\psi_\omega^0]\psi_s +$$

$$+\frac{\partial U}{\partial|\psi|^2}|\psi_\omega^0|^2\psi_s + \frac{\partial U}{\partial|\psi|^2}(\psi_s\psi_\omega^{0*} + \tag{9}$$

$$\psi_s^*\psi_\omega^0)\psi_\omega^0 + \frac{\partial^2 U}{2\partial|\psi|^4}(\psi_s\psi_\omega^{*0} + \psi_s^*\psi_\omega^0)^2\psi_s + O(A^3)$$

Получаем на $\delta\psi$ уравнение с источником, каждое слагаемое в котором можно рассматривать отдельно. Заметим, что слагаемые порядка A определяют поправки, зависящие от времени как $e^{\pm i\omega t}$. Они описывают изменения налетающего волнового пакета, а также определяют отраженный волновой пакет. Слагаемые порядка A также определяют интерференционный член, зависящий от времени как $e^{i(\omega-2\gamma)t}$. Члены порядка A^2 описывают волновые пакеты с частотой $\pm(2\omega-\gamma)$, порождаемые в результате взаимодействия с солитоном. Также член этого порядка описывает изменения солитона в результате взаимодействия.

$$\frac{i\partial(\delta\psi)}{\partial t} = -\frac{\Delta}{2}\delta\psi + U\psi_\omega^0 + \frac{\partial U}{\partial|\psi|^2}(|\psi_\omega^0|^2\psi_s + \psi_s^2\psi_\omega^{0*} +$$

$$+2|\psi_\omega^0|^2\psi_s + \psi_s^*(\psi_\omega^0)^2) + \frac{\partial^2 U}{\partial|\psi|^4}\Big((\psi_s^*\psi_\omega^0)^2 + 2|\psi_s|^2|\psi_\omega|^2 + (\psi_s\psi_\omega^{0*})^2\Big)\psi_s \tag{10}$$

Найдем функцию Грина свободного уравнения Шредингера

$$(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2})G = \delta(t)\delta(x)$$

$$G(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dpd\omega e^{-i\omega t+ipx}G_{\omega,p}$$

$$(\omega - \frac{p^2}{2})G_{\omega,p} = 1 \Rightarrow G_{\omega,p} = \frac{1}{\omega - \frac{p^2}{2}}$$

Рассмотрим $t < 0$

$G(t,x) = \int d\omega e^{i\omega|t|}$ - замыкаем контур сверху. Чтобы $G = 0$ для $t < 0$ – обходим полюс сверху. В нашем случае используется запаздывающая функция Грина

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \frac{e^{-i\omega t + ipx}}{\omega - \frac{p^2}{2}} d\omega dp \tag{11}$$

Где дельта-функкия определена так:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega$$

Определим преобразование Фурье следующим образом:

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x) e^{-ix\omega} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega \tag{12}$$

Запишем решение через функцию Грина:

$$\delta\psi = \int G(t-t', x-x')(U_1\psi^0_\omega + U_2(|\psi_s|^2\psi^0_\omega + \psi_s^2\psi^{0*}_\omega + 2\psi_s|\psi^0_\omega|^2 +$$

$$+\psi_s^*(\psi^0_\omega)^2) + U_3((\psi_s^*\psi^0_\omega)^2 + 2|\psi_s|^2|\psi_\omega|^2 + (\psi_s\psi^{0*}_\omega)^2)\psi_s))dt'dx' \tag{13}$$

Подставим функию Грина и $\psi^0_\omega = Ae^{-i\omega t + ikx}$, $\psi_s = fe^{-i\gamma t}$. Рассмотрим каждый из членов, соответствующих разным частотам, по отдельности. Далее вместо $\delta\psi$ будем писать ψ. Начнем с члена, зависящего от времени как $e^{i\omega t}$:

$$\psi^{(\omega)} = \frac{A}{(2\pi)^2}\int \frac{e^{-i\Omega(t-t') + ip(x-x')}}{\Omega - \frac{p^2}{2}}((U(|\psi_s|^2) + \frac{\partial U}{\partial |\psi|^2} f^2) e^{i\omega t + ikx'} dt'dx'd\Omega dp \tag{14}$$

Обозначим

$$V_1 = U(|\psi_s|^2) + \frac{\partial U}{\partial|\psi|^2} f^2 \tag{15}$$

Делаем замену, показанную выше, и интегрируем по t'. В результате в каждом слагаемом выражения (13) получаем дельта-функкию

$$\psi^{(\omega)} = \frac{A}{2\pi}\int \frac{\delta(\Omega - \omega)}{\Omega - \frac{p^2}{2}} V_1 e^{-i\Omega t} e^{ip(x-x')} e^{ikx'} dp dx' d\Omega \tag{16}$$

Интегрируя по Ω с учетом дельта-функции, получаем

$$\psi^{(\omega)} = \frac{Ae^{-i\omega t}}{2\pi}\int \frac{V_1(x')}{\omega - \frac{p^2}{2}} e^{ix'(k-p)} e^{ipx} dx' dp \tag{17}$$

Сделаем замену в виде преобразования Фурье (12) для каждого из слагаемых

$$\psi^{(\omega)} = Ae^{-i\omega t}\int \frac{\hat{V}_1(k-p)}{\omega - \frac{p^2}{2}} e^{ipx} dp \tag{18}$$

Для того чтобы получить следующее выражение, проинтегрируем уравнение (18), используя теорему Коши. Подробный расчет приеведен в Приложении А. В результате получим:

$$\psi^{(\omega)} = \frac{2\pi i A}{k}(e^{-ikx}\hat{V}_1(2k) - e^{ikx}\hat{V}_1(0))e^{-i\omega t} \tag{19}$$

Первое слагаемое в (19) представляет собой отраженный волновой пакет, в то время как второе слагаемое определяет поправки к налетающему волновому пакету. из этого выражения видно, что эта поправка не мала, а пропорциональна $\frac{\hat{V}_1(0)}{k}$.

Мы делали замену типа Фурье, теперь сделаем обратную замену, помня про условия, возникающие из-за мнимых полюсов, при интегрировании с помощью теоремы Коши. В итоге для члена, пропорционального $e^{i\omega t}$, получим:

$$\psi^{(\omega)} = \frac{iA}{k}(e^{-ikx}\int V_1(x')e^{2ikx'}dx' - e^{ikx}V_1(x')e^{i0x'})e^{-i\omega t} \tag{20}$$

Рассмотрим источник, зависящий от времени как $e^{i\omega t - 2i\gamma t}$. Будем действовать также как и с членом, пропориональным $e^{i\omega t}$

$$\psi^{(\omega-2\gamma)} = \frac{A}{(2\pi)^2}\int \frac{e^{-i\Omega(t-t')+ip(x-x')}}{\Omega - \frac{p^2}{2}} \frac{\partial U}{\partial|\psi|^2} f^2 e^{-2i\gamma t' + i\omega t' - ikx'} dt' dx' d\Omega dp \tag{21}$$

Обозначим

$$V_2 = \frac{\partial U}{\partial|\psi|^2} f^2$$

Тогда

$$\psi^{(\omega-2\gamma)} = \frac{A}{2\pi}\int \frac{\delta(\Omega - 2\gamma + \omega)}{\Omega - \frac{p^2}{2}} V_2 e^{-i\Omega t} e^{ip(x-x')} e^{-ikx'} dp dx' d\Omega =$$

$$= \frac{e^{-i(2\gamma-\omega)}}{2\pi}\int \frac{V_2(x')}{2\gamma - \omega - \frac{p^2}{2}} e^{ix'(-p-k)} e^{ipx} dx' dp =$$

Сделаем замену $y = x - x', dy = -dx'$, тогда

$$\psi^{(\omega-2\gamma)} = \frac{e^{-i(2\gamma-\omega)}}{2\pi}\int \frac{-V_2(x-y)}{2\gamma-\omega-\frac{p^2}{2}} e^{ipy} e^{-ik(x-y)} dy dp =$$

Теперь посчитаем интеграл с помощью теоремы Коши (подробный расчет приведен в Приложении А), получим

$$\psi^{(\omega-2\gamma)} = \frac{2\pi e^{-i(2\gamma-\omega)}}{\sqrt{k^2-4\gamma}}\int \Big(-V_2(x-y)e^{-y\sqrt{k^2-4\gamma}}e^{-ik(x-y)}\Big|_{y>0} dy -$$

$$-\int V_2(x-y)e^{y\sqrt{k^2-4\gamma}}e^{-ik(x-y)}\Big|_{y<0}\Big) dy =$$

Сделаем обратную замену $x' = x - y, dx' = -dy$ и вынесем зависимые от x множители за знак интерала

$$= \frac{e^{-i(2\gamma-\omega)t}}{\sqrt{k^2-4\gamma}}\Big(e^{-x\sqrt{k^2-4\gamma}}\int_x^{-\infty} -V_2(x')e^{x'\sqrt{k^2-4\gamma}-ikx'}dx' + \tag{22}$$

$$+e^{x\sqrt{k^2-4\gamma}}\int_{+\infty}^{x} -V_2(x')e^{-x'\sqrt{k^2-4\gamma}-ikx'}dx'\Big)$$

Выражения, пропорциональные $e^{-i2\omega t+i\gamma t}$

$$\psi^{(-2\omega+\gamma)} = \frac{A^2}{(2\pi)^2}\int \frac{e^{-i\Omega(t-t')+ip(x-x')}}{\Omega-\frac{p^2}{2}}\Big(\frac{\partial U}{\partial|\psi|^2}f + \frac{\partial^2 U}{2\partial|\psi_s|^4}f^3\Big)e^{-2i\omega t'+2ikx'+i\gamma t'}dt'dx'd\Omega dp \tag{23}$$

Обозначим

$$V_3 = \frac{\partial U}{\partial|\psi|^2}f + \frac{\partial^2 U}{2\partial|\psi_s|^4}f^3.$$

Тогда

$$\psi^{(-2\omega+\gamma)} = \frac{A^2}{2\pi}\int \frac{\delta(\Omega-2\omega+\gamma)}{\Omega-\frac{p^2}{2}}V_3 e^{-i\Omega t}e^{ipx}e^{i(2k-p)x'}dp dx' d\Omega =$$

$$= \frac{A^2 e^{-i(2\omega-\gamma)t}}{2\pi}\int \frac{V_3(x')}{2\omega-\gamma-\frac{p^2}{2}}e^{ipx}e^{i(2k-p)x'}dx'dp =$$

$$= A^2 e^{-i(2\omega-\gamma)t}\int \frac{\hat{V}_3(-2k+p)}{2\omega-\gamma-\frac{p^2}{2}}e^{ipx}dp =$$

$$= -\frac{2\pi i A^2 e^{-i(2\omega-\gamma)}}{\sqrt{2k^2-2\gamma}}(-\hat{V}_3(-2k-\sqrt{2k^2-2\gamma})e^{-ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}+$$

$$\hat{V}_3(-2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})e^{ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}) =$$

$$= -\frac{iA^2 e^{-i(2\omega-\gamma)t}}{\sqrt{2k^2-2\gamma}}\Big(-\int V_3(x')e^{i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})x'}dx' e^{-ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}+$$

$$+\int V_3(x')e^{-i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})x'}dx' e^{ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}\Big) \qquad (24)$$

Аналогично, для $e^{-i\gamma t}$

$$\psi^{(-\gamma)} = \frac{2A^2}{(2\pi)^2}\int \frac{e^{-i\Omega(t-t')+ip(x-x')}}{\Omega-\frac{p^2}{2}}\left(\frac{\partial U}{\partial|\psi|^2}f+\frac{\partial^2 U}{2\partial|\psi_s|^4}f^3\right)e^{-i\gamma t'}dt'dx'd\Omega dp \qquad (25)$$

Используем то же обозначение, что и в случае для $e^{-i2\omega t+i\gamma t}$

$$V_3 = \frac{\partial U}{\partial|\psi|^2}f+\frac{\partial^2 U}{2\partial|\psi_s|^4}f^3$$

$$\psi^{(-\gamma)} = \frac{2A^2}{2\pi}\int \frac{\delta(\Omega-\gamma)}{\Omega-\frac{p^2}{2}}V_3 e^{-i\Omega t}e^{ip(x-x')}dpdx'd\Omega =$$

$$= \frac{2A^2e^{-i\gamma t}}{2\pi}\int \frac{V_3(x')}{\gamma-\frac{p^2}{2}}e^{ip(x-x')}dx'dp =$$

Сделаем такую же замену как и для второго слагаемого и посчитаем интеграл по теореме Коши

$$\psi^{(-\gamma)} = \frac{4A^2\pi e^{-i\gamma t}}{\sqrt{-2\gamma}}\left(-V_3(x-y)e^{-y\sqrt{-2\gamma}}dy\Big|_{y>0}+V_3(x-y)e^{y\sqrt{-2\gamma}}\Big|_{y<0}\right)+$$

Вернемся обратно к переменной x'

$$\psi^{(-\gamma)} = \frac{2A^2e^{-i\gamma t}}{\sqrt{-2\gamma}}\Big(\int_{-\infty}^{x} V_3(x')e^{\sqrt{-2\gamma}x'}dx' e^{-x\sqrt{-2\gamma}} - \int_{x}^{\infty} V_3(x')e^{-x'\sqrt{-2\gamma}}e^{-x\sqrt{-2\gamma}}dx'\Big) \qquad (26)$$

Член, соответствующий $e^{i2\omega t-i3\gamma t}$

$$\psi^{(2\omega-3\gamma)} = \frac{A^2}{(2\pi)^2}\int \frac{e^{-i\Omega(t-t')+ip(x-x')}}{\Omega-\frac{p^2}{2}}\frac{\partial^2 U}{2\partial|\psi|^4}f^3 e^{-3i\gamma t'+2i\omega t'-2ikx'}dt'dx'd\Omega dp \qquad (27)$$

Обозначим

$$V_4 = \frac{\partial^2 U}{2\partial|\psi|^4}f^3$$

$$\psi^{(2\omega-3\gamma)} = \frac{A^2}{2\pi}\int \frac{\delta(\Omega+2\omega-3\gamma)}{\Omega-\frac{p^2}{2}} V_4 e^{-i\Omega t} e^{ipx} e^{-i(2k+p)x'} dp dx' d\Omega =$$

$$= \frac{A^2 e^{-i(3\gamma-2\omega)t}}{2\pi}\int \frac{V_4(x')}{3\gamma-2\omega-\frac{p^2}{2}} e^{ipx} e^{-i(2k+p)x'} dx' dp =$$

$$= \frac{2\pi A^2 e^{-i(3\gamma-2\omega)t}}{\sqrt{2k^2-6\gamma}}(-V_4(x-y)e^{-y\sqrt{2k^2-6\gamma}}e^{-2ik(x-y)}\Big|_{y>0} +$$

$$+V_4(x-y)e^{y\sqrt{2k^2-6\gamma}}e^{-ik(x-y)}\Big|_{y<0}) =$$

$$= \frac{A^2 e^{-i(3\gamma-2\omega)t}}{\sqrt{2k^2-6\gamma}}\Big(\int_{-\infty}^{x} V_4(x')e^{-i(2k+i\sqrt{2k^2-6\gamma})x'}dx' e^{-x\sqrt{2k^2-6\gamma}} - \tag{28}$$

$$-\int_x^\infty V_4(x')e^{ix'(-2k+i\sqrt{2k^2-6\gamma})}e^{x\sqrt{2k^2-6\gamma}}dx'\Big)$$

Дальнейшее вычисление интегралов зависит от конкретного потенциала.

Применение метода для конкретной модели.

Для дальнейших вычислений рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера с определенным потенциалом. В качестве модели, в которой солитонное решение известно аналитически, рассмотрим

$$U = -\frac{\lambda}{2m^2}|\psi_s|^2 + \frac{3g}{8m^3}|\psi_s|^4 \tag{29}$$

Тогда уравнение Шредингера принимает вид

$$\frac{i\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\Delta\psi}{2m} - \frac{\lambda}{2m^2}|\psi|^2\psi + \frac{3g}{8m^3}|\psi|^4\psi \tag{30}$$

Сделаем замену:

$$\tilde{\psi} = \psi\sqrt{\frac{4\lambda m}{3g}}$$

$$\tilde{t} = \frac{2t\lambda^2}{3mg}$$

$$\tilde{x} = \frac{\sqrt{2}x\lambda}{\sqrt{3g}}$$

Это позволяет избавиться от параметров. В результате уравнение и потенциал принимают вид.

$$\frac{i\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{t}} + \frac{\Delta\tilde{\psi}}{2} + |\tilde{\psi}|^2\tilde{\psi} - |\tilde{\psi}|^4\tilde{\psi} = 0 \tag{31}$$

$$U = -|\tilde{\psi}|^2 + |\tilde{\psi}|^4 \tag{32}$$

Далее вместо $\tilde{\psi}$ будем писать ψ.

Уравнение (31) с данным потенциалом имеет солитонное решение вида (33), (34), где γ- параметр солитона (его частота) [2]. Решение существует только при значениях параметра $-\frac{3}{16} < \gamma < \infty$, но в нашем случае $\gamma < 0$.

$$\psi_s = f(x)e^{-i\gamma t} \tag{33}$$

$$f = \frac{2\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{3}\gamma}\cosh(2\sqrt{-2\gamma}x)}}, -\frac{3}{16} < \gamma < 0 \tag{34}$$

Вид f при различных γ показан на рисунке 1.

Перепишем выражения для $V_i, i = 1, .., 4$ через потенциал (32)

$$V_1 = -2f^2 + 3f^4$$

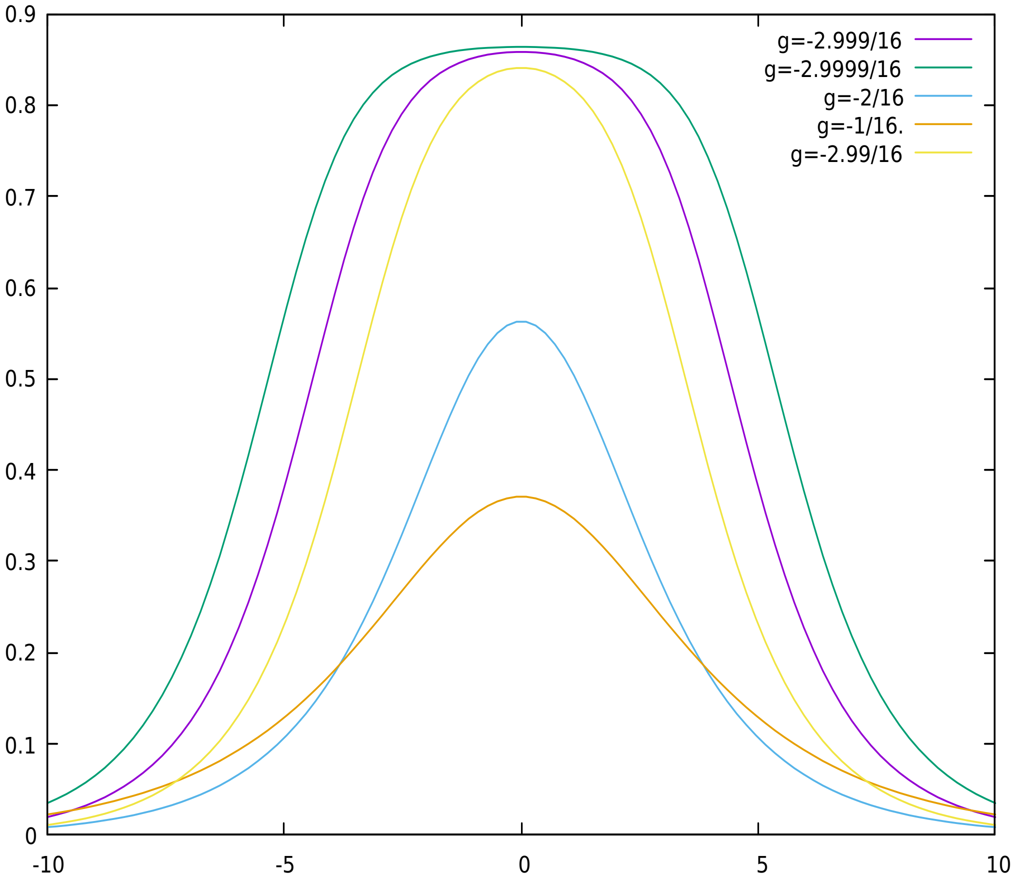

Рис. 1: Зависимость амплитуды солитона f от координаты x для нескольких значений частоты солитона γ

$$V_2 = -f^2 + 2f^4$$
$$V_3 = -f + 3f^3$$
$$V_4 = f^3$$

Так же как и в общем случае рассмотрим каждый из членов, соответствующих разным частотам, по отдельности.

$$\psi^{(\omega)} = \frac{iAe^{-i\omega t}}{k}(e^{-ikx}\int(2f^2-3f^4)e^{2ikx'}dx' - e^{ikx}(2Af^2-3Af^4)e^{i0x'}) \tag{35}$$

$$\psi^{(2\gamma-\omega)} = \frac{Ae^{-i(2\gamma-\omega)t}}{\sqrt{k^2-4\gamma}}\int(f^2-2f^4)e^{-(i\sqrt{k^2-4\gamma}-k)x'}dx'e^{-x\sqrt{k^2-4\gamma}} \tag{36}$$

$$\psi^{(2\omega-\gamma)} = -\frac{iA^2e^{-i(2\omega-\gamma)t}}{\sqrt{2k^2-2\gamma}}(\int(-f+3f^3)e^{-i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})x'}dx'e^{-ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}+$$
$$+\int(f-3f^3)e^{i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})x'}dx'e^{ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}) \tag{37}$$

$$\psi^{(3\gamma-2\omega)} = \frac{A^2e^{-i(3\gamma-2\omega)t}}{\sqrt{2k^2-6\gamma}}(\int f^3e^{-i(2k+i\sqrt{2k^2-6\gamma})x'}dx'e^{-x\sqrt{2k^2-6\gamma}}+ \tag{38}$$
$$+\int(-f^3)e^{ix'(-2k+i\sqrt{2k^2-6\gamma})}e^{x\sqrt{2k^2-6\gamma}}dx')$$

$$\psi^{(\gamma)} = \frac{A^2e^{-i\gamma t}}{\sqrt{-2\gamma}}(\int(f-3f^3)e^{\sqrt{-2\gamma}x'}dx'e^{-x\sqrt{-2\gamma}})$$
$$-\int(f-3f^3)e^{-x'\sqrt{-2\gamma}}e^{-x\sqrt{-2\gamma}}dx') \tag{39}$$

Рассмотрим прошедшую и отраженную волну с частотами ω и 2ω:

$$\psi^{(\omega)} = \frac{iAe^{-i\omega t}}{k}\left(e^{-ikx}\int(2f^2-3f^4)e^{2ikx'}dx' - e^{ikx}(2f^2-3f^4)e^{i0x'}\right)$$

$$\psi^{(2\omega-\gamma)} = -\frac{iA^2e^{-i(2\omega-\gamma)t}}{\sqrt{2k^2-2\gamma}}\left(\int(-f+3f^3)e^{-i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})x'}dx'e^{-ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}\right.$$
$$\left.+\int(f-3f^3)e^{i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})x'}dx'e^{ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}\right)$$

Остальные слагаемые являются интерференционными членами и в этом разделе нами не рассматриваются.

Будем искать ассимптотику интегралов при $k \to \infty$ с помощью метода перевала [3]. В общем случае интегралы методом перевала вычисляются по алгоритму:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{h(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{h(t)+\ln(g(t))} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{F(t)} dt,$$

где $F(t) = h(t) + \ln(g(t))$. Далее нужно найти точки перевала из уравнения:

$$F'(t_0) = 0,$$

где t_0 – перевальная точка. Тогда приближенное значение интеграла вычисляется по формуле:

$$I \approx \sqrt{-\frac{2\pi}{F''(t_0)}} e^{F(t_0)}. \tag{40}$$

Точек перевала может быть несколько, тогда вклад от каждой точки вычисляется по формуле (40), а полный интеграл дается их суммой:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{F(t)} dt \approx \sum_i \sqrt{-\frac{2\pi}{F''(t_i)}} e^{F(t_i)}$$

Рассмотрим прошедшую волну с двойной частотой:

$$I_{2\omega+} = -\frac{iA^2 e^{-i(2\omega-\gamma)t}}{\sqrt{2k^2-2\gamma}} e^{ix\sqrt{2k^2-2\gamma}} \int e^{i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})x' + \ln\left(f(x') - 3f^3(x')\right)} dx' = \tag{41}$$

$$= -\frac{iA^2 e^{-i(2\omega-\gamma)t}}{\sqrt{2k^2-2\gamma}} e^{ix\sqrt{2k^2-2\gamma}} \int e^{F_{2\omega+}(x')} dx' \approx$$

$$\approx -\frac{iA^2 e^{-i(2\omega-\gamma)t} e^{ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}}{\sqrt{2k^2-2\gamma}} e^{i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})x_0 + \ln\left(f(x_0) - 3f^3(x_0)\right)} \sqrt{-\frac{2\pi}{F''_{2\omega+}(x_0)}}, \tag{42}$$

где

$$F_{2\omega+}(x') = i(2k + \sqrt{2k^2-2\gamma})x' + \ln\left(f(x') - 3f^3(x')\right),$$

x_0 является решением уравнения $F'_{2\omega+}(x_0) = 0$, а индекс $" + "$ обозначает прошедшую волну:

$$i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma}) + \frac{\dfrac{288\gamma^2\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\sinh 2\sqrt{-2\gamma}x_0}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh 2\sqrt{-2\gamma}x_0)^{\frac{5}{2}}} + \dfrac{4\gamma\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\sinh 2\sqrt{-2\gamma}x_0}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh 2\sqrt{-2\gamma}x_0)^{\frac{3}{2}}}}{-\dfrac{48\sqrt{2}(-\gamma)^{\frac{3}{2}}}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh 2\sqrt{-2\gamma}x_0)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2\sqrt{-2\gamma}}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh 2\sqrt{-2\gamma}x_0)^{\frac{1}{2}}}} = 0 \tag{43}$$

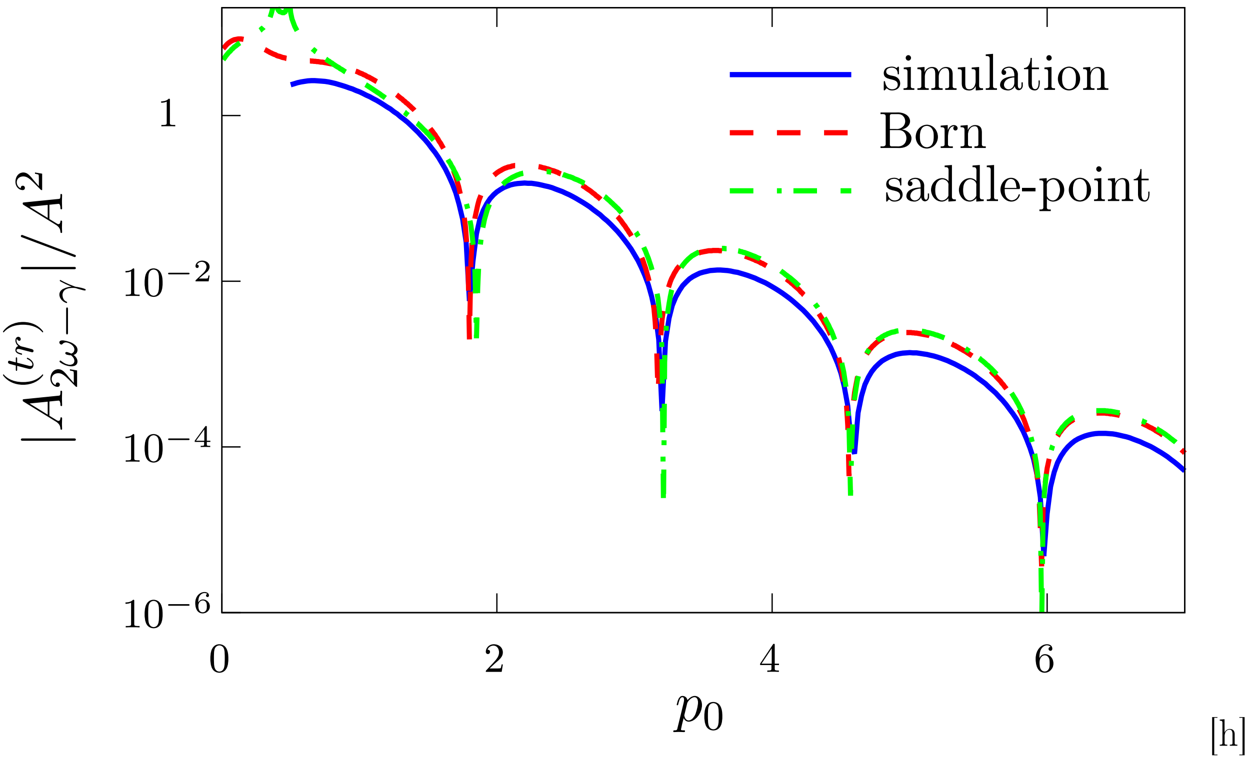

Рис. 2: Сравнение результатов, вычисленных разными способами, для амплитуды прошедшего волнового пакета с двойной частотой. Здесь simulation – означает результат численного решения, Born – борновское приближение, а saddle-point – вычисление интегралов методом перевала. Расчеты проводятся для $\gamma = -\frac{2.999}{16}$.

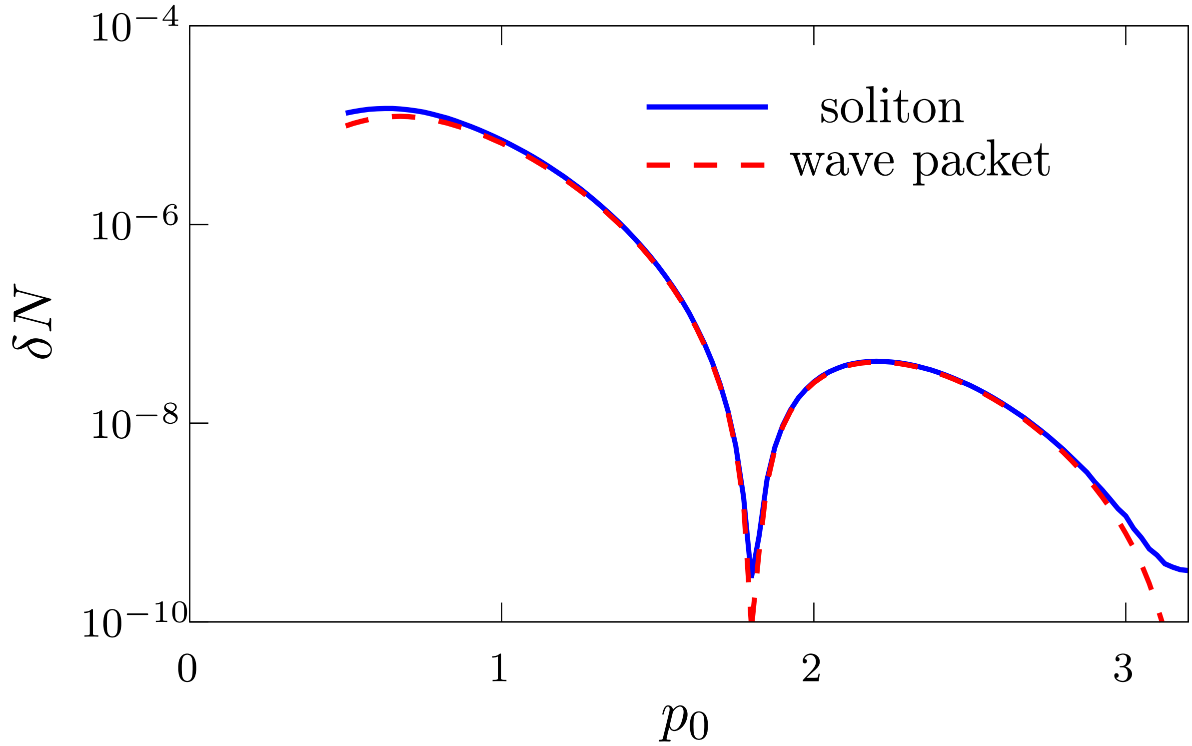

Рис. 3: Сравнение числа частиц, поглощенных солитоном, и числа частиц в прошедшем волновом пакете с двойной частотой. Расчеты проводятся для $\gamma = -\frac{2.999}{16}$.

Дальнейшее решение проводится в программе Wolfram Mathematica, сравнение результата работы которой с численным решением той же задачи представлен на графике (2). На графике (3) представлено сравнение числа частиц, поглощенных солитоном и числа частиц в волновом пакете. Этот рисунок доказывает, что для того, чтобы посчитать число частиц, поглощенных солитоном, нужно вычислить число частиц в прошедшем пакете с двойной частотой.

$$\begin{cases} \delta N_\gamma + \delta N_\omega + \delta N_{2\omega-\gamma} = 0. \\ \delta E_\gamma + \delta E_\omega + \delta E_{2\omega-\gamma} = 0 \end{cases}$$

Но $\delta E_\gamma = \gamma \delta N_\gamma$ – верно для солитона. На линейных уравнениях для волны верно $\delta E_\omega = \omega \delta N_\omega$.

$$\gamma \delta N_\gamma + \omega \delta N_\omega + (2\omega - \gamma)\delta N_{2\omega-\gamma} = 0$$

$$\omega(-\delta N_\gamma - \delta N_{2\omega-\gamma}) = -\gamma \delta N_\gamma + (\gamma - 2\omega)\delta N_{2\omega-\gamma}$$

$$\delta N_\gamma(\gamma - \omega) = (\gamma - \omega)\delta N_{2\omega-\gamma}$$

$$\Rightarrow \delta N_\gamma = \delta E_{2\omega-\gamma}$$

Здесь $\delta N_\gamma-$ изменение числа частиц в солитоне с частотой γ, $\delta N_\omega-$изменение числа частиц в налетающей волне с частотой ω, $\delta N_{2\omega-\gamma}-$изменение числа частиц в волне с частотой $2\omega-\gamma$. $\delta E_\gamma-$изменение энергии солитона с частотой γ, $\delta E_\omega-$изменение энергии волны с частотой ω, $\delta E_{2\omega-\gamma}-$ изменение энергии волны с частотой $2\omega-\gamma$ Отсюда видно, что число частиц, "застрявших"в солитоне, совпадает с числом частиц с частотой $2\omega-\gamma$.

Аналогичные вычисления производятся для оставшихся двух интегралов:

$$I_{2\omega-} = -\frac{iA^2e^{-i(2\omega-\gamma)t}}{\sqrt{2k^2-2\gamma}}e^{-ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}\int e^{-i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})x'+\ln\left(-f(x')+3f^3(x')\right)}dx' = \tag{44}$$

$$= -\frac{iA^2e^{-i(2\omega-\gamma)t}}{\sqrt{2k^2-2\gamma}}e^{-ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}\int e^{F_{2\omega-}(x')}dx' \approx$$

$$\approx -\frac{iA^2e^{-i(2\omega-\gamma)t}e^{-ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}}{\sqrt{2k^2-2\gamma}}e^{-i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})x_0+\ln\left(-f(x_0)+3f^3(x_0)\right)}\sqrt{-\frac{2\pi}{F''_{2\omega-}(x_0)}}, \tag{45}$$

где

$$F_{2\omega-}(x') = -i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})x' + \ln\left(-f(x')+3f^3(x')\right),$$

а индекс " - " обозначает отраженную волну:

$$-i(2k+\sqrt{2k^2-2\gamma}) + \frac{-\frac{288\gamma^2\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\sinh 2\sqrt{-2\gamma}x_0}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh 2\sqrt{-2\gamma}x_0)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4\gamma\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\sinh 2\sqrt{-2\gamma}x_0}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh 2\sqrt{-2\gamma}x_0)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{48\sqrt{2}(-\gamma)^{\frac{3}{2}}}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh 2\sqrt{-2\gamma}x_0)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\sqrt{-2\gamma}}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh 2\sqrt{-2\gamma}x_0)^{\frac{1}{2}}}} = 0 \tag{46}$$

Решение для отраженного пакета с двойной частотой представлена на рисунке (4). Для отраженной волны с одинарной частотой приближение будет выглядеть так:

$$I_{\omega-} = \frac{ie^{-i\omega t-ikx}}{k}\int e^{2ikx'+\ln(2Af^2(x')-3Af^4(x'))}dx' = \frac{ie^{-i\omega t-ikx}}{k}\int e^{F_{\omega-}(x')}dx' \approx$$

$$\approx \frac{ie^{-i\omega t-ikx}}{k}e^{2ikx_0+\ln(2Af^2(x_0)-3Af^4(x_0))}\sqrt{-\frac{2\pi}{F''_{\omega-}(x_0)}}, \tag{47}$$

где

$$F_{\omega-}(x') = 2ikx' + \ln(2Af^2(x') - 3Af^4(x'))$$

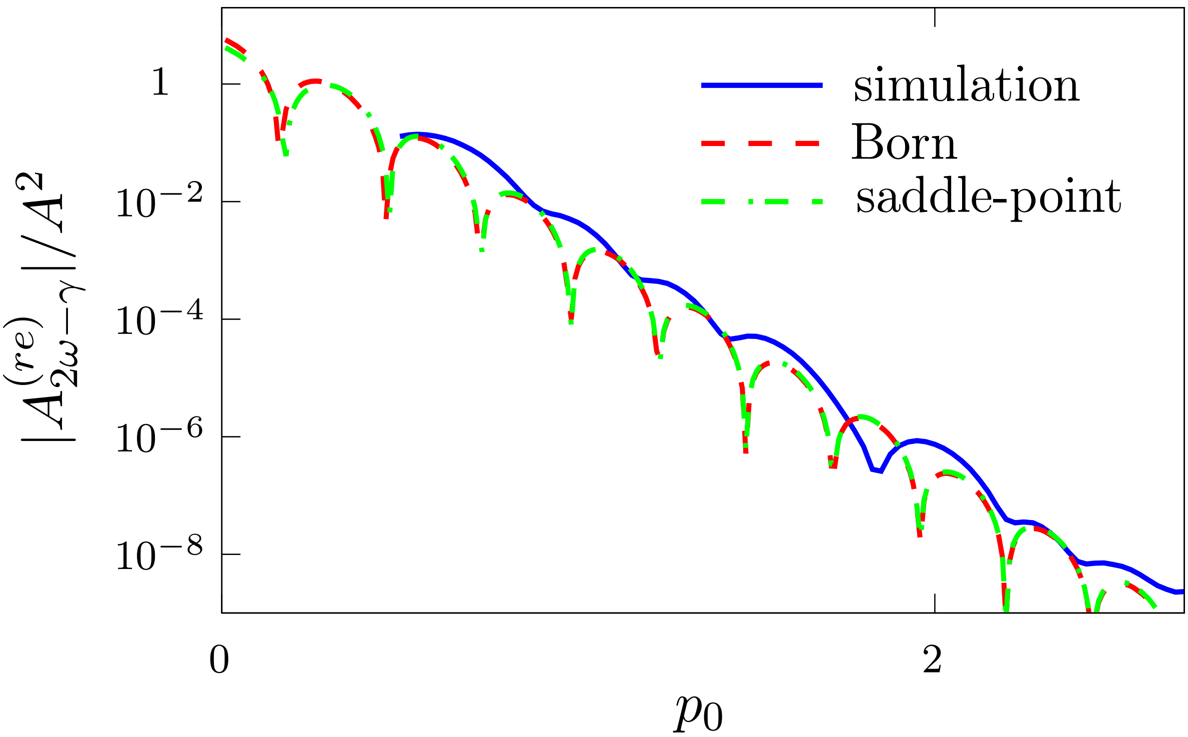

Рис. 4: Результаты численного и аналитического решений для отраженного волнового пакета с двойной частотой. Расчеты проводятся для $\gamma = -\frac{2.999}{16}$.

$F'(x_0) = 0:$

$$2ik + \frac{\frac{192\sqrt{-2\gamma}\gamma^2\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\sinh(2\sqrt{-2\gamma}x_0)}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh(2\sqrt{-2\gamma}x_0))^3} + \frac{16\sqrt{-2\gamma}\gamma\sqrt{1+\frac{16\gamma}{\sinh}(2\sqrt{-2\gamma}x_0)3}}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh(2\sqrt{-2\gamma}x_0))^2}}{-\frac{48\gamma^2}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh(2\sqrt{-2\gamma}x_0))^2} - \frac{8\gamma}{(1+\sqrt{1+\frac{16\gamma}{3}}\cosh(2\sqrt{-2\gamma}x_0))}} = 0 \qquad (48)$$

Решение для этого случая представлено на рисунке (5).

Для прошедшей волны с одинарной частотой метод перевала неприменим, так как в данном случае экспоненента равна 1, поэтому его можно посчитать аналитически.

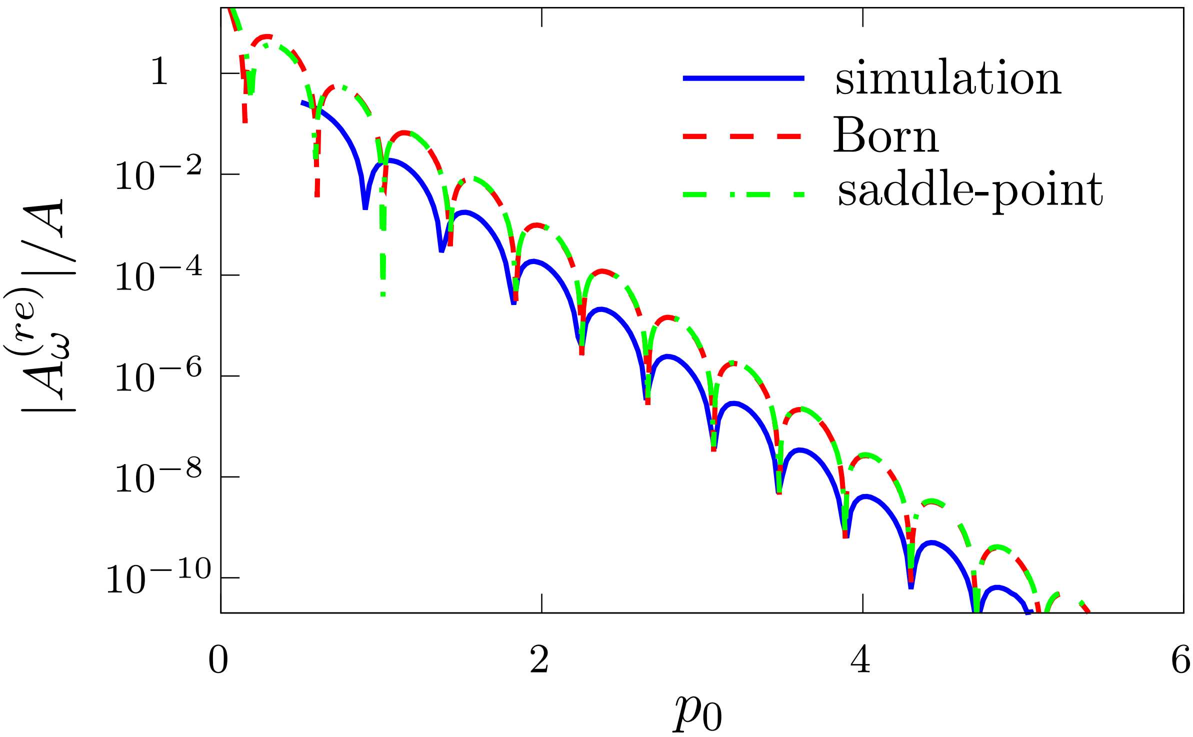

Рис. 5: Результаты численного и аналитического решений для отраженного волнового пакета с одинарной частотой. Расчеты проводятся для $\gamma = -\frac{2.999}{16}$.

Вычисление поправок.

В данном случае могут существовать поправки двух типов. Первый – это уточнение результатов за счет подстановки решений (42) и (45) в уравнение (9) вместо ψ_ω^0 в источник, генерирующий эти решения. Эти попраки получаются очень малы по сравнению с самими решениями, поэтому мы их учитывать не будем. Второй тип поправок – это поправки из интерференционных членов. Вследствие того, что при вычислении интегралов при помощи теоремы Коши, получаются мнимые полюса, возникают условия на переменные интегрирования. Поэтому мы не можем рассчитать интегралы и подставляем не результат вычислений этих интегралов, а сами выражения. Чтобы посчитать поправку, необходимо подставить интерференционный член в правую часть уравнения (9) в то слагаемое, которое ответственно за появление данного интерференционного члена. Получаются двойные интегралы, с одним переменным пределом. Например, из интерференционного члена с частотой $2\gamma-\omega$ получаются поправки к прошедшей и отраженной волднам с одинарной частотой. Этот интеграл выглядит так:

$$I_\omega^{popr} = \frac{iAe^{-i\omega t}}{k\sqrt{k^2-4\gamma}}\Big(e^{ikx}\big(-\int_{-\infty}^{+\infty} V_\omega(x')e^{x'(ik-\sqrt{k^2-4\gamma})}\times$$

$$\times \int_{x'}^{-\infty} V_2(x'') e^{x''(ik+\sqrt{k^2-4\gamma})} dx' dx'' +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} V_\omega(x') e^{x'(ik+\sqrt{k^2-4\gamma})} \int_{+\infty}^{x'} V_2(x'') e^{-x''(-ik+\sqrt{k^2-4\gamma})} dx' dx'') + \tag{49}$$

$$+ e^{ikx} (\int_{-\infty}^{+\infty} V_\omega(x') e^{-x'(ik+\sqrt{k^2-4\gamma})} \int_{x'}^{-\infty} V_2(x'') e^{x''(ik+\sqrt{k^2-4\gamma})} dx' dx'' +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} V_\omega(x') e^{x'(-ik+\sqrt{k^2-4\gamma})} \int_{+\infty}^{x'} V_2(x'') e^{-x''(-ik+\sqrt{k^2-4\gamma})} dx' dx'') \Big),$$

где $V_\omega = f^2 - 2f^4$, а $V_2 = (f^2 - 2f^4)$. Результат этих вычислений того же порядка, что и решение, к которому мы считаем поправку. Данные поправки описывают изменения фазы волновых пакетов в результате взаимодействия с солитоном.

Этот факт можно проиллюстрировать на простом примере. Рассмотрим эволюцию волнового пакета с учетом нелинейных членов:

$$\frac{i\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\Delta\psi}{2} - |\psi|^2\psi + |\psi|^4\psi$$

$$\psi = Ae^{-i\omega t + ikx}$$

Для закона дисперсии получаем:

$$(\omega - \frac{k^2}{2}) = -A^2 + A^4$$

Отсюда видно как связана частота и амплитуда в простом случае только для ψ_ω^0, но у нас есть еще взаимодействие с солитоном, что значительно усложняет эту связь. Вследствие этого усложняется вопрос о разделении числа части и изменения фазы.

В итоге получается, что несмотря на то, что мы можем найти поправки, они либо малы, либо неотделимы от фазы, поэтому в данной работе мы их не учитываем.

Заключение.

В работе представлен метод, основанный на Борновском приближении, применимый для описания процесса взаимодействия солитона с налетающим волновым пакетом. Показано, что в результате взаимодействия рождаются волновые пакеты с большей частотой, число частиц в которых равно числу частиц, захваченных солитоном. Это дает простой способ вычисления изменения числа частиц солитона. Предложенный метод подтверждем сравнением с результатами численного моделирования.

Приложение

Приложение A: Вычисление интегралов.

Рассмотрим подробно интегрирование (18) с помощью теоремы Коши. Так как все интегралы имеют вид $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}dx$, то к ним применима Лемма Жордана. Поэтому мы можем посчитать интеграл по формуле:

При $\lambda > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res}[R(z)e^{i\lambda z}], \mathsf{Im}\ z_k > 0$$

При $\lambda < 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res}[R(z)e^{i\lambda z}], \mathsf{Im}\ z_k < 0$$

Найдем полюса для каждого из слагаемых выражения (18). Далее для каждого полюса найдем соответствующий вычет и, так как все полюса являются полюсами перого порядка, то их можно вычислить по формуле:

$$\underset{z_0}{Res}\frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \tag{50}$$

где z_0 - полюс первого порядка. В дальнейших вычислениях нам понадобится дисперсионное соотношение $2\omega = k^2$. Рассмотрим каждое из слагаемых выражения (18) отдельно:

$$I_1 = \int \frac{V_1(k-p)}{\omega - \frac{p^2}{2}} e^{ipx}dp \tag{51}$$

Полюса $p = \pm\sqrt{2\omega} = \pm\sqrt{k^2} = \pm k$ Согласно (50) вычеты для I_1 можно получить по формуле (для остальных слагаемых вычеты считаются по аналогичному принципу)

$$Res_{I_1} = \frac{V_1(k-p)}{p} e^{ipx}$$

Тогда результатом интегрирования для I_1 будет:

$$I_1 = \frac{2\pi i}{k}(e^{-ikx}V_1(2k) - e^{ikx}V_1(0))$$

Рассмотрим второе слагаемое, здесь мы не делали замену Фурье, поэтому выражение имеет другой вид:

$$I_2 = \int \frac{V_3(x-y)}{2\omega - \gamma - \frac{p^2}{2}} e^{ipy} e^{-ik(x-y)} dp dy$$

Полюса $p = \pm\sqrt{4\gamma - 2\omega} = \pm i\sqrt{k^2 - 4\gamma}$. Так как полюса мнимые, то показатель экспоненты для вычетов будет действительным и вследствие этого возникают дополнительные условия на полученные результаты

$$I_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-4\gamma}} \big(V_2(x-y) e^{-y\sqrt{k^2-4\gamma}} e^{-ik(x-y)} dy \Big|_{y>0} -$$

$$- V_2(x-y) e^{y\sqrt{k^2-4\gamma}} e^{-ik(x-y)} dy \Big|_{y<0} \big)$$

Перейдем к третьему слагаемому

$$I_3 = \int \frac{V_3(-2k+p)}{2\omega - \gamma - \frac{p^2}{2}} e^{ipx} dp$$

Полюса $p = \pm\sqrt{4\omega - 2\gamma} = \pm\sqrt{2k^2 - 2\gamma}$. Тогда

$$-\frac{2\pi i}{\sqrt{2k^2-2\gamma}} (-V_3(-2k - \sqrt{2k^2-2\gamma}) e^{-ix\sqrt{2k^2-2\gamma}} + V_3(-2k + \sqrt{2k^2-2\gamma}) e^{ix\sqrt{2k^2-2\gamma}})$$

Четвертое слагаемое имеет вид

$$I_4 = \int \frac{V_4(x-y)}{3\gamma - 2\omega - \frac{p^2}{2}} e^{ipy} e^{-2ik(x-y)} dp dy$$

Полюса $p = \pm\sqrt{6\gamma - 4\omega} = \pm i\sqrt{2k^2 - 6\gamma}$. Как и в случае второго слагаемого полюса мнимые, поэтому появятся дополнительные условия на y

$$I_4 = \frac{2\pi}{\sqrt{2k^2-6\gamma}} (-V_4(x-y) e^{-y\sqrt{2k^2-6\gamma}} e^{-2ik(x-y)} \Big|_{y>0} +$$

$$+ V_4(x-y) e^{y\sqrt{2k^2-6\gamma}} e^{-2ik(x-y)} \Big|_{y<0})$$

Перейдем к рассмотрению последнего слагаемого

$$I_5 = \int \frac{V_3(x-y)}{\gamma - \frac{p^2}{2}} e^{ipy} dp dy$$

Полюса $p = \pm i\sqrt{2\gamma}$ - мнимые, следовательно, результатом интегрирования будет

$$I_4 = \frac{2\pi}{\sqrt{-2\gamma}}(-V_3(x-y)e^{-y\sqrt{-2\gamma}}\Big|_{y>0} + V_3(x-y)e^{y\sqrt{-2\gamma}}\Big|_{y<0})$$

В итоге суммирования всех результатов получим:

$$\begin{gathered}
\delta\psi = \frac{2\pi Ai}{k}(e^{-ikx}V_1(2k) - e^{ikx}V_1(0))e^{-i\omega t} + \\
+\frac{2\pi Ae^{-i(2\gamma-\omega)}}{\sqrt{k^2-4\gamma}}\big(V_2(x-y)e^{-y\sqrt{k^2-4\gamma}}e^{-ik(x-y)}dy\Big|_{y>0} - \\
-V_2(x-y)e^{y\sqrt{k^2-4\gamma}}e^{-ik(x-y)}dy\Big|_{y<0}\big) - \\
-\frac{2\pi A^2ie^{-i(2\omega-\gamma)}}{\sqrt{2k^2-2\gamma}}(-V_3(-2k-\sqrt{2k^2-2\gamma})e^{-ix\sqrt{2k^2-2\gamma}} + \\
+V_3(-2k+\sqrt{2k^2-2\gamma})e^{ix\sqrt{2k^2-2\gamma}}) + \\
+\frac{2\pi A^2e^{-i(3\gamma-2\omega)t}}{\sqrt{2k^2-6\gamma}}(-V_4(x-y)e^{-y\sqrt{2k^2-6\gamma}}e^{-2ik(x-y)}\Big|_{y>0} + \\
+V_4(x-y)e^{y\sqrt{2k^2-6\gamma}}e^{-2ik(x-y)}\Big|_{y<0}) + \\
+\frac{2\pi A^2e^{-i\gamma t}}{\sqrt{-2\gamma}}(-V_3(x-y)e^{-y\sqrt{-2\gamma}}\Big|_{y>0} + V_3(x-y)e^{y\sqrt{-2\gamma}}\Big|_{y<0})
\end{gathered} \tag{52}$$

Литература

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. **Теоретическая физика:** Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т.III. **Квантовая механика (нерелятивистская теория)** / Под ред. Л.П. Питаевского. – 6-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 800с.

[2] Ахметдиев Н.Н., Анкевич А. **Солитоны.** – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304с.

[3] Федорюк М.В. **Метод перевала.** – 1977. – 366с.

[4] B. Eggemeier and J. C. Niemeyer, Phys. Rev. D **100** (2019) no.6, 063528 doi:10.1103/PhysRevD.100.063528 [arXiv:1906.01348 [astro-ph.CO]].

[5] J. L. Gervais and A. Jevicki, Nucl. Phys. B **110** (1976), 113-152 doi:10.1016/0550-3213(76)90423-5