

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа

Модель аннигилирующей темной материи
для решения проблемы каспов

Студентка 205 группы
Еваровская Злата Вадимовна

Научный руководитель
Член-корр. РАН,
доктор физ.-мат. наук,
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Оглавление

Введение.....	2
Основная система уравнений.....	3
Сферически-симметричное приближение	4
Стационарное приближение	4
Профиль Наварро-Френка-Уайта.....	6
Модель темной материи с аннигиляцией	8
Заключение.....	12
Литература	13

Введение

Существует значительное расхождение между наблюдаемыми экспериментальными кривыми вращения и кривой, полученной путем применения теории гравитации к веществу, наблюдаемому в галактике.

Решение этой проблемы состоит в том, чтобы выдвинуть гипотезу о существовании темной материи и предположить ее распространение от центра галактики к ее гало.

Теории, связанные с темной материи, являются основными постулируемыми решениями для объяснения расхождения.

На данный момент природа темной материи неизвестна и нет ясного понимания физической взаимосвязи темной материи с наблюдаемыми астрономическими объектами. Тем не менее к настоящему времени получен огромный объем информации, о количестве и распределении темной материи и о том, какую роль она играет в формировании галактик.

Однако также есть широко известна проблема центрального каспа, которая вытекает из сравнения результатов многочисленных космологических моделей формирования галактик с наблюдениями. Суть проблемы состоит в том, что в численных моделях объемная плотность в центре гало стремится к бесконечности, образуя так называемы центральный касп, в то время как наблюдения, как правило, не обнаруживают резкого возрастания плотности в направлении к центру.

В данной работе мы попытаемся избавиться от каспа, путем рассмотрения модели аннигилирующей темной материи. Будем предполагать, что темная материя чувствует в гравитационном взаимодействии и описывается механикой Ньютона.

Основная система уравнений

Составим систему уравнений, которая опишет формирование гало темной материи галактики с точки зрения Ньютоновской механики.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \\ \Delta \varphi = 4\pi G \rho \end{cases}$$

Уравнение (1) системы – уравнение непрерывности. Которое в данном случае выражает закон сохранения массы.

Уравнение (2) – уравнение Эйлера, векторное уравнение движения.

И уравнение (3) – уравнение Пуассона, описывающее гравитационный потенциал, создаваемый произвольным распределением массы.

В данной системе имеют место следующие зависимости:

$$\rho(\vec{r}, t); \vec{v}(\vec{r}, t); \varphi(\vec{r}) \text{ и в общем случае } p(\rho).$$

Для темной материи полагают, что давления нет, поэтому уравнение состояния в данном случае можно записать так: $p(\rho) = 0$.

Тогда система запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} \varphi \\ \Delta \varphi = 4\pi G \rho \end{cases}$$

Итак, получаем 2 скалярных и 1 векторное уравнения, а также 2 скалярных и 1 векторную неизвестные. Значит данная система уравнений полностью описывает динамику формирования гало темной материи.

Из-за больших трудностей в аналитическом решении такой системы уравнений перейдем к более простой постановке задачи: стационарный сферически-симметричный случай.

Сферически-симметричное приближение

Полагаем, что скорость, плотность и гравитационный потенциал являются только функциями радиуса и не зависят от углов θ и φ в сферических координатах. То есть:

$$\rho(\vec{r}, t); \vec{\vartheta}(\vec{r}, t); \varphi(\vec{r}) \rightarrow \rho(r, t); \vec{\vartheta}(r, t); \varphi(r)$$

Уравнение (1) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{\vartheta}) &= 0 + \operatorname{div}(\rho \vec{\vartheta}) = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \rho \vartheta_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho \vartheta_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho \vartheta_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}$$

Движение центрально-симметрично, поэтому $\sin \theta = 1$; $\frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial \vartheta_\varphi}{\partial \varphi} = 0$.

Следовательно $r^2 \rho \vartheta_r = \text{const}$.

Стационарное приближение

Полагаем, что движение уже установившееся по круговым орбитам и нет движения к центру. То есть компоненту скорости вдоль радиуса (радиальная/нормальная скорость) принимаем равной 0,

$$\text{т. о. } \vec{\vartheta} = \vartheta_n \vec{e}_n + \vartheta_\tau \vec{e}_\tau = \vartheta_\tau \vec{e}_\tau; \vartheta = \vartheta_\tau.$$

Тогда перепишем уравнение (2) начальной системы в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\vartheta}}{\partial t} + (\vec{\vartheta} \vec{\nabla}) \vec{\vartheta} &= \frac{d \vec{\vartheta}}{dt} = \frac{d(\vartheta_\tau \vec{e}_\tau)}{dt} = \\ &= \vartheta_\tau \frac{d(\vec{e}_\tau)}{dt} + \frac{d(\vartheta_\tau)}{dt} \vec{e}_n = \frac{\vartheta_\tau}{r} \vec{e}_n = -\frac{\vartheta_\tau^2}{r} \vec{e}_r = -\frac{d\varphi}{dr} \vec{e}_r \\ \frac{\vartheta_\tau^2}{r} &= \frac{d\varphi}{dr} \end{aligned}$$

Также в таком приближении пропадает зависимость величин от времени:

$$\rho(r, t); \vec{\vartheta}(r, t); \varphi(r) \rightarrow \rho(r); \vec{\vartheta}_\tau(r); \varphi(r)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \frac{\partial \vec{\vartheta}_\tau}{\partial t} = 0$$

Учитывая выше приведенные приближения запишем полную систему:

$$\begin{cases} r^2 \rho \vartheta_r = 0 \\ \frac{\vartheta^2}{r} = \frac{d\varphi}{dr} \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\varphi}{dr}) = 4\pi G \rho \end{cases}$$

Исключим из двух последних уравнений гравитационный потенциал φ и получим уравнение следующего вида:

$$\frac{d(r\vartheta^2)}{dr} = 4\pi G \rho r^2$$

Существуют различные модели профиля плотности темной материи $\rho(r)$.

Наиболее простой является модель псевдоизотермической сферы, которая описывает вещество как идеальный газ в термодинамическом равновесии. Профиль плотности для такой модели $\rho(r) \propto r^{-2}$. Однако наблюдается ряд отклонений от результатов моделирования.

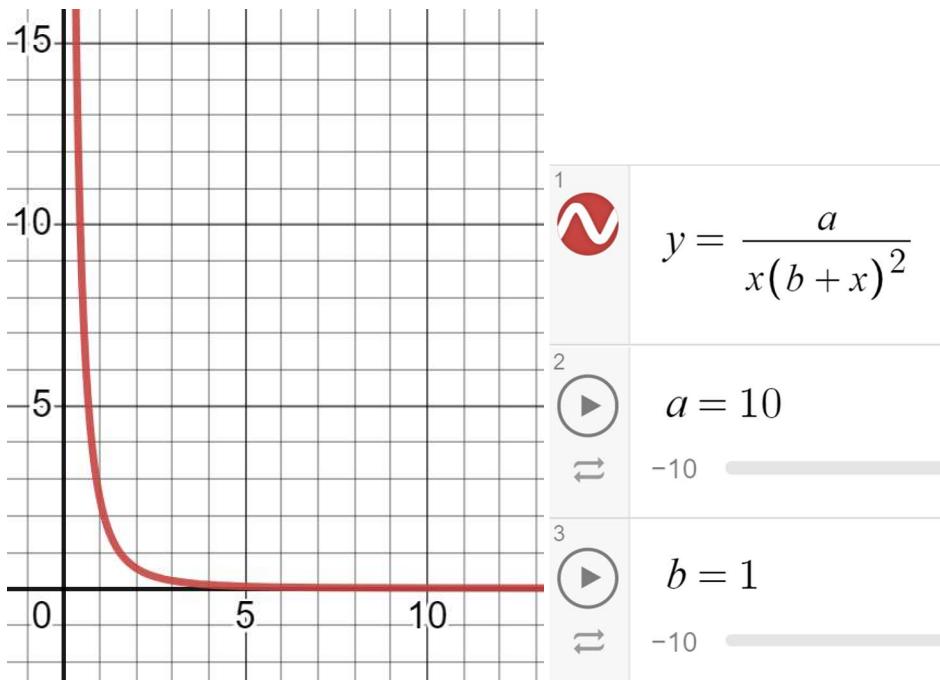
Профиль Наварро-Френка-Уайта

Аппроксимация данных, полученных в результате численного моделирования формирования структуры гало в расширяющейся Вселенной привело к модели Наварро-Френка-Уайта [1]. Данный профиль является приближением для термодинамически равновесной конфигурации темной материи.

Зависимость $\rho(r)$ выглядит следующим образом:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2}$$

Где ρ_0 и R_s являются параметрами, изменяющимися в зависимости от свойств гало.



Как видно, данная модель отличается быстрым возрастанием плотности гало на малых r , имеется касп.

Для большого класса галактик наблюдательные данные согласуются с моделью Наварро-Френка-Уайта. Но данный профиль не согласуется с наблюдениями галактик низкой поверхностной яркости и богатых газом карликовых галактик поздних типов. В центральных областях наблюдается меньшее содержание темной материи, чем предсказывается.

Убедимся, что NFW профиль в совокупности с уравнением

$$\frac{d(r\vartheta^2)}{dr} = 4\pi G \rho r^2 \rightarrow r\vartheta^2 = 4\pi G \int \rho(r) r^2 dr$$

дает плоские кривые вращения.

- При малых расстояния NFW профиль ведет себя как $\rho \propto r^{-1}$.
Тогда скажем, что $\rho(r) = Ar^{-1}$, где $A = \rho_0 R_s^3$.

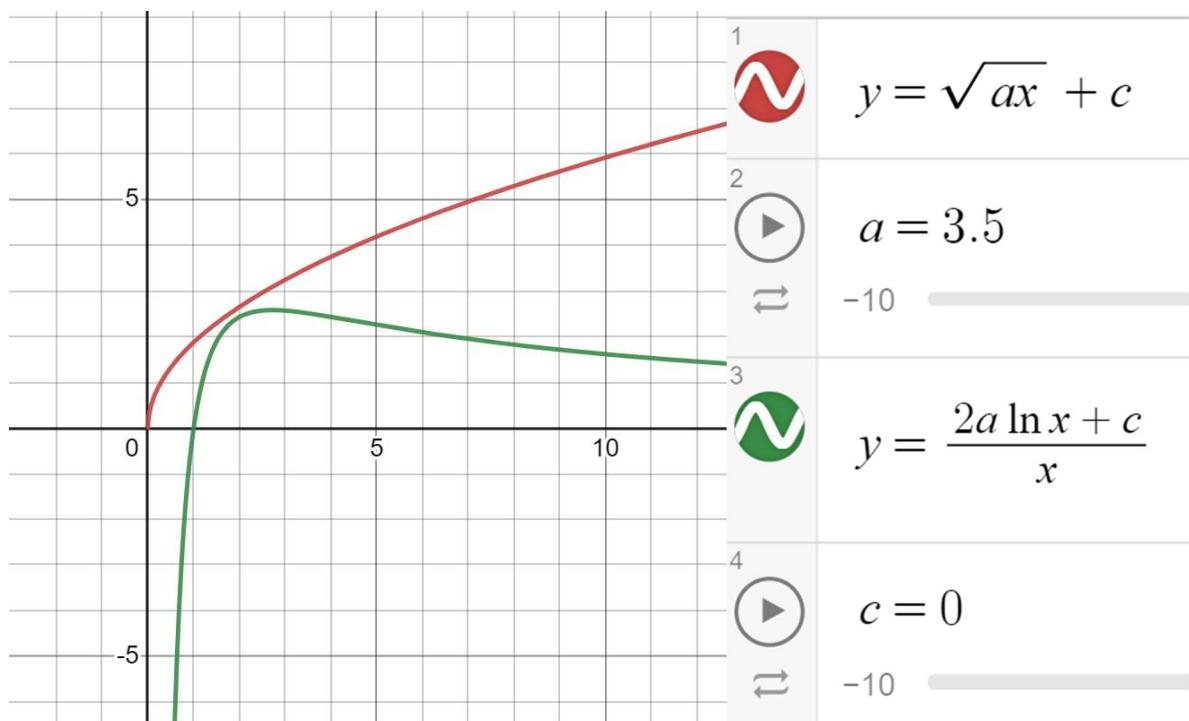
Беря интеграл выше получим:

$$\vartheta = \sqrt{2\pi G A r + C} \rightarrow C = 0 \rightarrow \vartheta \propto \sqrt{r} \rightarrow \text{красная кривая}$$

- При больших расстояния NFW профиль ведет себя как $\rho \propto r^{-3}$.
Тогда скажем, что $\rho(r) = Ar^{-3}$, где $A = \rho_0 R_s^3$.

Беря интеграл выше получим:

$$\vartheta = 4\pi G A \frac{\log r + C}{r} \rightarrow C = 0 \rightarrow \vartheta \propto \frac{\log r}{r} \rightarrow \text{зеленая кривая}$$



Поскольку при $r > 0$ профиль NFW $\rho(r)$ гладкий, то две полученные кривые гладко соединяются для полного решения.

Модель темной материи с аннигиляцией

Попробуем ввести модель с аннигиляцией и посмотрим, как изменится профиль плотности.

Из начальной системы качественно изменится только уравнение непрерывности (1). В правой части уравнения добавится “сток”. Число возможных событий аннигиляции пропорционально квадрату концентрации, а значит и квадрату плотности. Также скорость аннигиляции зависит от сечения реакции. Таким образом перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{\vartheta}) = -A\rho^2,$$

где константа А характеризует сечение аннигиляции.

Также, как и в первой части работы, будем рассматривать *сферически-симметричный* случай. Но отличие будет в наличии радиальной скорости. То есть на место проаннигилировавшей пары придут новые частицы. Такой случай можно назвать *стационарным*, плотность не будет зависеть от времени (сколько частиц ушло, столько придет новых).

Перепишем уравнение непрерывности с нововведенными приближениями:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho \vartheta_r) = -A\rho^2$$

Как мы убедились выше, совокупность уравнений ниже хорошо описывает кривые вращения галактик:

$$\begin{cases} \frac{d(r\vartheta_\tau^2)}{dr} = 4\pi G \rho r^2 \\ \rho(r) = \frac{\rho_0 R_s^3}{r(R_s + r)^2} \end{cases}$$

Однако у NFW профиля есть проблема в нуле, которую далее мы попытаемся исправить при малых r.

Согласно статье [2], численный эксперимент и наблюдения показывают, что для большинства сферических гало распределение частиц темной материи близко к изотропному, хотя отклонения от изотропии иногда могут быть значительными и достигать 20-30%. Мы же примем случай *изотропности*.

Если функция распределения частиц темной материи изотропна, то:

$$\sigma_r = \sigma_\tau = \sigma,$$

где $\sigma_r(r)$ и $\sigma_\tau(r)$ – радиальная и поперечная (трансверсальная) дисперсии скорости частиц.

Тогда такое соотношение справедливо и для скоростей:

$$\vartheta_r = \vartheta_\tau = \vartheta.$$

Тогда запишем систему:

$$\begin{cases} \frac{d(r\vartheta^2)}{dr} = 4\pi G \rho r^2 \\ \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \rho \vartheta)}{dr} = -A \rho^2 \end{cases}$$

Такая система позволяет определить зависимости $\rho(r)$ и $\vartheta(r)$. Попробуем найти эти зависимости.

Выразим из первого уравнения системы ρ и подставим во вторую:

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{4\pi G r^2} \frac{d(r\vartheta^2)}{dr} \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{1}{4\pi G r^2} \frac{d(r\vartheta^2)}{dr} \vartheta \right) = -A \left(\frac{1}{4\pi G r^2} \frac{d(r\vartheta^2)}{dr} \right)^2 \end{cases}$$

Упростим нижнее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\vartheta \frac{d(r\vartheta^2)}{dr} \right) &= -A \frac{1}{4\pi G r^2} \left(\frac{d(r\vartheta^2)}{dr} \right)^2 \\ 2r \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + 5 \frac{d\vartheta}{dr} + \frac{4r}{\vartheta} \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)^2 + \frac{A}{4\pi G} \left(\frac{\vartheta^2}{r^2} + \frac{4\vartheta}{r} \frac{d\vartheta}{dr} + 4 \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Получили нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Даже численное решение такого уравнения требует специальных методов (из-за сингулярности в нуле).

Поэтому попробуем подобрать приближение.

Так как проблема каспов связана с галактиками низкой поверхностной яркости, будем искать приближение для них. Таким образом, не будем учитывать вклад обычной материи на динамику системы.

Согласно статье [6], скорость вращения, связанная с темной материей во внутренних частях галактик, возрастает примерно линейно с радиусом.

Тогда можно записать:

$$\vartheta \propto r \rightarrow \vartheta = kr, \text{ где } k - \text{константа.}$$

В таком случае верно равенство:

$$\frac{d(r\vartheta^2)}{dr} = k \frac{d(\vartheta r^2)}{dr}$$

Возвращаясь к системе:

$$\begin{cases} \frac{d(r\vartheta^2)}{dr} = 4\pi G \rho r^2 \\ \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \rho \vartheta)}{dr} = -A \rho^2 \end{cases}$$

Распишем нижнее уравнение так:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho \vartheta) = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \vartheta \frac{d\rho}{dr} + \rho \frac{d(\vartheta r^2)}{dr} \right) = -A \rho^2$$

Подставляя теперь верхнее уравнение, учитывая линейное приближение, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dr} &= -\frac{\rho^2}{\vartheta} \left(A + \frac{4\pi G}{k} \right) \\ \frac{1}{\rho} &= \left(A + \frac{4\pi G}{k} \right) \int \frac{dr}{\vartheta} \end{aligned}$$

Анализируя последнее выражение, можно сказать, что касп пропадает при $0 \leq \gamma < 1$, где γ - показатель степенной зависимости скорости от радиуса:

$$\vartheta \propto r^\gamma \rightarrow \vartheta = Br^\gamma, \text{ где } B = \text{const.}$$

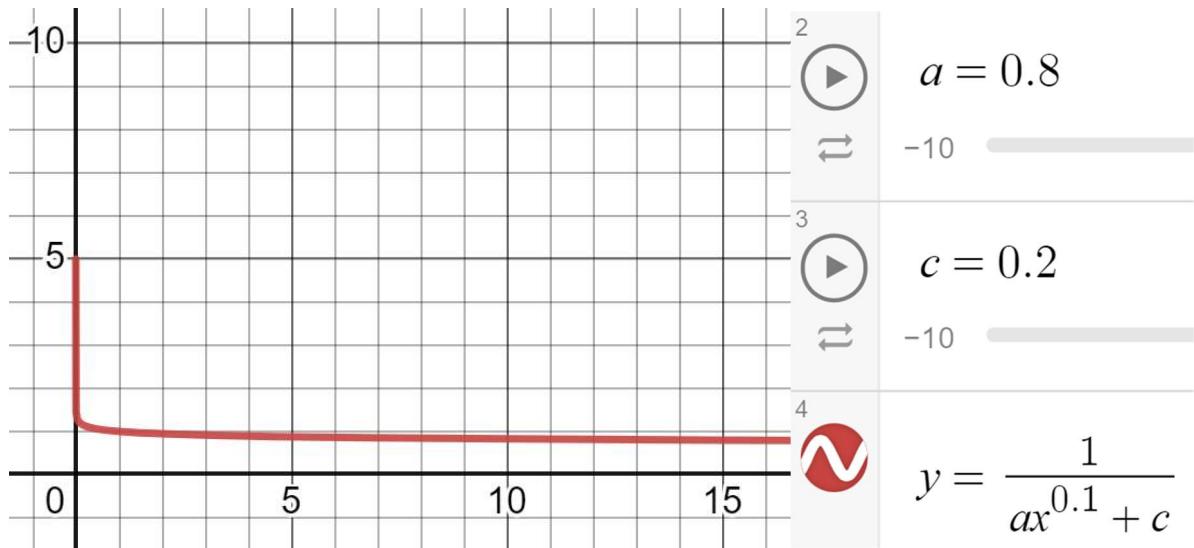
Тогда зависимость плотности гало от радиуса с параметром γ будет такой:

$$\rho(r) = \frac{1}{\frac{r^{1-\gamma}}{B(1-\gamma)} \left(\frac{4\pi G}{k} + A \right) + C}$$

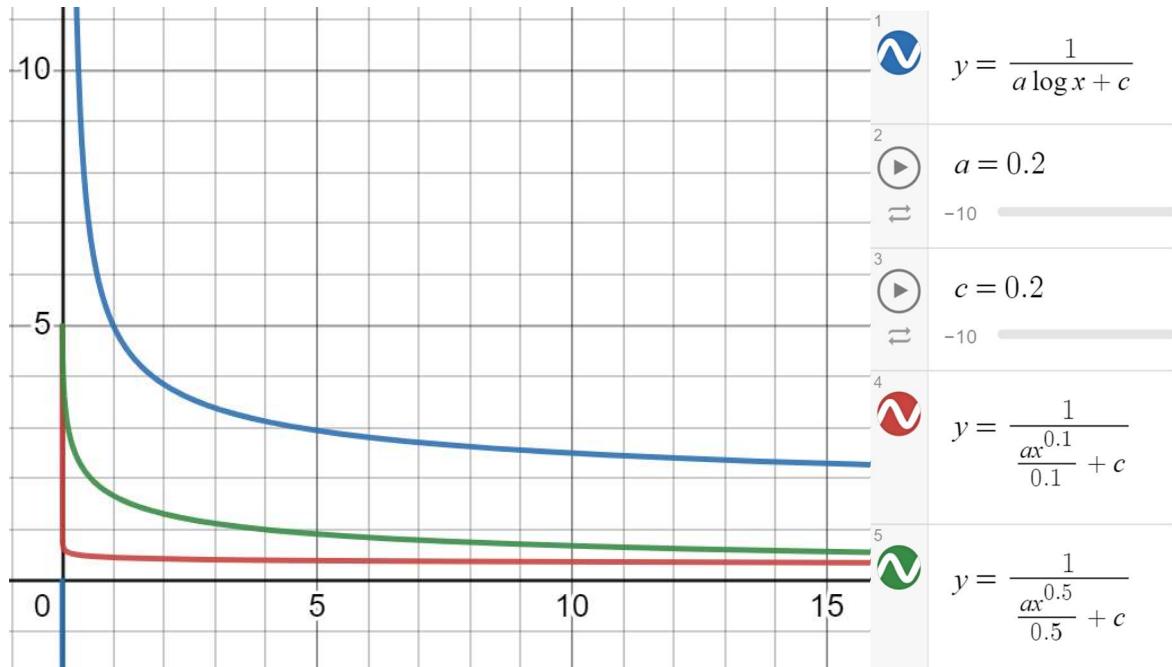
где C – константа интегрирования и имеет смысл обратной плотности гало в центре (при $0 \leq \gamma < 1$).

Мы видим, что плотность в центре в таком случае конечна.

Таким образом, при сколь угодно близкой к линейной, но с показателем степени меньше 1, зависимости плотности от радиуса имеем примерную картину зависимости, представленную ниже.



Для сравнения приведем зависимости при различных γ (если на малых r работает линейное приближение, сделанное выше).



Для зависимости $\vartheta \propto \sqrt{r} \rightarrow \vartheta = B\sqrt{r}$, где $B = const$, которой удовлетворяет NFW профиль без аннигиляции (при адекватности линейного приближения на малых r), получим:

$$\rho(r) = \frac{1}{\frac{2\sqrt{r}}{B} \left(\frac{4\pi G}{k} + A \right) + C}$$

То есть профиль плотности поменяется, а вид кривых вращения останется прежним. Но каспа в центре уже не будет.

Для линейной зависимости $\vartheta \propto r \rightarrow \vartheta = Br$, где $B = const$:

$$\rho(r) = \frac{1}{\frac{\log r}{B} \left(\frac{4\pi G}{k} + A \right) + C}$$

Имеется особая точка, следовательно, модель аннигиляции частиц темной материи не убирает проблему каспов в таком случае. Похожая картина и при $\gamma < 1$ (наличие каспа).

Заключение

В данной работе были представлены уравнения, описывающие динамику гало темной материи, а также представлены различные варианты приближений.

Была рассмотрена модель аннигиляции темной материи, построена система, позволяющая получить зависимости $\rho(r)$ и $\vartheta(r)$. Однако полученные уравнения имеют трудности в аналитическом решении.

Согласно линейному приближению ($\gamma \approx 1$) скоростей на малых радиусах, проанализирована зависимости $\rho(r)$ и $\vartheta(r)$.

Для $\vartheta \propto r^\gamma$ при показателе $0 \leq \gamma < 1$ каспа нет, при $\gamma > 1$ – есть. Таким образом, задача требует дальнейшего исследования.

Модель аннигилирующей темной материи весьма актуальна, так как в последние годы был обнаружен избыток гамм-излучения из центральной области галактики, которое трудно объяснить излучением обычных астрофизических источников. И данный избыток может быть связан с аннигиляцией темной материи. Однако не стоит забывать, что присутствуют большие неопределенности астрофизических фонов.

Литература

- [1] *Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, Simon D.M. White* The Structure of Cold Dark Matter Halos, [arXiv:astro-ph/9508025](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9508025)
- [2] Дорошкевич А Г, Лукаш В Н, Михеева Е В "К решению проблем каспов и кривых вращения в гало тёмной материи в космологической стандартной модели" УФН **182** 3–18 (2012)
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Galaxy_rotation_curve
- [4] Засов А В, Сабурова А С, Хоперсков А В, Хоперсков С А "Тёмная материя в галактиках" УФН **187** 3–44 (2017)
- [5] Березинский В С, Докучаев В И, Ерошенко Ю Н "Мелкомасштабные сгустки тёмной материи" УФН **184** 3–42 (2014)
- [6] *W.J.G. de Blok* The Core-Cusp Problem, [arXiv:0910.3538 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/0910.3538)