Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа

Поляризация реликтового излучения

студента 218-й группы
Данковского Ивана Дмитриевича

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН, г.н.с. ОТФ ИЯИ РАН
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва
2022

Содержание

1. Введение

После рекомбинации Вселенная становится прозрачной для фотонов первичной плазмы. Эти фотоны сохранились во Вселенной до наших дней и наблюдаются в виде реликтового излучения. Измерение характеристик реликтового излучения позволяет получить важнейшую информацию о Вселенной в эпоху рекомбинации и о более поздних этапах её развития.

Форма энергетического спектра реликтового излучения с высокой степенью точности совпадает с формой планковского спектра. Небольшие вариации интенсивности излучения в зависимости от направления прихода - это вариации температуры, единственной характеристики планковского спектра. Помимо угловой зависимости температуры реликтового излучения, значительный интерес представляет его поляризация, которая также зависит от направления прихода фотонов.

2. Поляризация реликтового излучения

Пусть электромагнитное излучение распространяется в направлении $\mathbf{n}$. Обозначим через E_a, где $a = 1, 2$, компоненты электрического поля в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$. В общем случае поляризационные свойства излучения характеризуются эрмитовым тензором

$$I_{ab} = \langle E_a E_b^* \rangle \tag{1}$$

Полная интенсивность излучения при этом

$$I = \left\langle |E_1|^2 \right\rangle + \left\langle |E_2|^2 \right\rangle \tag{2}$$

Введем безразмерный тензор поляризации

$$P_{ab} = \frac{I_{ab}}{I} \tag{3}$$

В общем случае справедливо $0 \leq \det P_{ab} \leq 1/4$, так что можно ввести инвариантную скалярную величину - степень поляризации излучения:

$$\mathcal{P} = \sqrt{1 - 4 \det P} \tag{4}$$

Она изменяется от нуля (неполяризованное излучение) до единицы (полностью поляризованное излучение).

В оптике поляризацию света принято описывать с помощью параметров Стокса U, Q, V. Их связь с матрицей P_{ab} дается соотношением

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + Q & U - iV \\ U + iV & 1 - Q \end{pmatrix} \tag{5}$$

Вместо тензора P_{ab} часто бывает удобно использовать бесследовый тензор

$$\mathcal{P}_{ab} = P_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab} = \frac{1}{\langle E_a E^a \rangle}\left(\langle E_a E_b \rangle - \frac{1}{2}\langle E_c E^c \rangle g_{ab}\right) \tag{6}$$

Здесь был учтен тот факт, что нас интересует тензор поляризации на небесной сфере (считаем, что она имеет единичный радиус), и была введена метрика g_{ab} на этой сфере. Тензор $\mathcal{P}_{ab}$ равен нулю для неполяризованного излучения.

Заданный на сфере тензор $\mathcal{P}_{ab}$ можно представить через скалярный и псевдоскалярный потенциалы $\mathcal{P}_E$ и $\mathcal{P}_B$:

$$\mathcal{P}_{ab} = \{\nabla_a \nabla_b\}\mathcal{P}_E - \{\epsilon_a^c \nabla_b \nabla_c\}\mathcal{P}_B \tag{7}$$

где ∇_a - ковариантная производная на сфере, фигурные скобки означают выделение симметричной и бесследовой части соответствующего тензора:

$$\{\nabla_a \nabla_b\} = \frac{1}{2}(\nabla_a \nabla_b + \nabla_b \nabla_a - g_{ab}\Delta) \tag{8}$$

$$\{\epsilon_a^c \nabla_b \nabla_c\} = \frac{1}{2}(\epsilon_a^c \nabla_b \nabla_c + \epsilon_b^c \nabla_a \nabla_c) \tag{9}$$

Здесь $\Delta = g_{ab}\nabla^a \nabla^b$ - лапласиан на сфере.

Для потенциалов $E-$ и $B-$мод на сфере удобно использовать разложение по сферическим гармоникам:

$$\mathcal{P}_E(\mathbf{n}) = \sqrt{2}\sum_m \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} a_{lm}^E Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{10}$$

$$\mathcal{P}_B(\mathbf{n}) = \sqrt{2}\sum_m \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} a_{lm}^B Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{11}$$

Для анализа поляризации введем спектры двух мод и всевозможные смешанные корреляторы: $\left\langle a_{lm}^E a_{l'm'}^{E*} \right\rangle$, $\left\langle a_{lm}^B a_{l'm'}^{B*} \right\rangle$, $\left\langle a_{lm}^E a_{l'm'}^{T*} \right\rangle$ и т.д. Здесь коэффициенты a_{lm}^T определяются флуктуациями температуры. Для гауссовых случайных флуктуаций выполняется соотношение

$$\left\langle a_{lm}^X a_{l'm'}^{Y*} \right\rangle = C_l^{XY} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{12}$$

где $X, Y = T, E, B$. Отсюда имеем

$$C_l^{XY} = \frac{1}{2l+1}\sum_m \left\langle a_{lm}^X a_{lm}^{Y*} \right\rangle \tag{13}$$

Всего таких корреляторов шесть, однако в силу сохранения четности смешанные корреляторы C_l^{TB} и C_l^{EB} равны нулю. Таким образом, из данных по наблюдению реликтового излучения можно в принципе извлечь четыре спектра: C_l^{TT}, C_l^{TE}, C_l^{EE}, C_l^{BB}.

3. Вклад в поляризацию от тензорных возмущений

В космологическом контексте важность разделения поляризации на E-моду ($\mathcal{P}_E \neq 0, \mathcal{P}_B = 0$) и B-моду ($\mathcal{P}_E = 0, \mathcal{P}_B \neq 0$) связана с тем, что скалярные возмущения генерируют только E-моду, а тензорные возмущения - как E-, так и B-моду. В данной работе был рассмотрен вклад в поляризацию, а именно в спектр C_l^{EE}, от тензорных возмущений.

3.1. Общие соотношения

Некоторые свойства сферических функций Бесселя j_l, которые будут использоваться далее (см. [1], приложение F):

Асимптотики:

$$j_l(x) \approx \frac{\sin(x - \frac{\pi l}{2})}{x}, x \gg l \tag{14}$$

$$j_l(x) \approx \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\sqrt{x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2} - \left(l + \frac{1}{2}\right) \arccos\left(\frac{l + \frac{1}{2}}{x}\right) - \frac{\pi}{4}\right) \tag{15}$$

Рекуррентные соотношения:

$$j_{l+1}(x) + j_{l-1}(x) = \frac{2l+1}{x} j_l(x) \tag{16}$$

Также далее фигурирует производная корреляционной функции $\frac{\partial h(k,\eta)}{\partial \eta} = h'(k,\eta)$, выражение для нее:

$$\frac{\partial h(k,\eta)}{\partial \eta} = h'(k,\eta) = \frac{-3 j_2(k\eta)}{\eta} \tag{17}$$

3.2. Вклад от вторичной ионизации

Следующее соотношение выражает вклад в C_l^{EE} от эпохи вторичной ионизации, см. [1], формула (10.97):

$$C_l^{EE} = 9\pi\tau_{rei}^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} P_T(k) \left\{ \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta h'(k,\eta) \frac{j_2[(\eta_{rei} - \eta)k]}{(\eta_{rei} - \eta)^2 k^2} \right\}^2 \left\{ \frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2}\left[(\eta_0 - \eta_{rei})k\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} j_l[(\eta_0 - \eta_{rei})k] + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)} j_{l+2}[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \right\}^2 \tag{18}$$

Здесь $P_T(k)$ - спектр тензорных возмущений, τ_{rei} - оптическая толщина эпохи вторичной ионизации. Оценим значение интеграла для больших мультиполей, то есть для $l \gg \frac{\eta_0 - \eta_{rei}}{\eta_{rei}}$. Считая l большим и используя соотношения (16), можно преобразовать выражение в фигурных скобках следующим образом:

$$\left\{\frac{(l+2)\,(l+1)}{(2l-1)(2l+1)}j_{l-2}\left[(\eta_0-\eta_{rei})k\right]-\frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)}j_l[(\eta_0-\eta_{rei})k]+\right.$$
$$\left.+\frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)}j_{l+2}[(\eta_0-\eta_{rei})k]\right\}^2\approx\left\{\frac{1}{4}j_{l-2}\left[(\eta_0-\eta_{rei})k\right]-\frac{3}{2}j_l[(\eta_0-\eta_{rei})k]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}j_{l+2}[(\eta_0-\eta_{rei})k]\right\}^2\approx j_l^2[(\eta_0-\eta_{rei})k]\left(\frac{l^2}{(\eta_0-\eta_{rei})^2k^2}-2\right)^2 \quad (19)$$

Оценка внутреннего интеграла производится с помощью (17) и асимптотики (14):

$$\int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta h'(k,\eta)\frac{j_2[(\eta_{rei}-\eta)k]}{(\eta_{rei}-\eta)^2k^2}=\int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta\frac{-3j_2(k\eta)}{\eta}\frac{j_2[(\eta_{rei}-\eta)k]}{(\eta_{rei}-\eta)^2k^2}=$$
$$=3\int_0^{\eta_{rei}-\eta_r}\frac{d\bar\eta}{\eta_{rei}-\bar\eta}\frac{j_2[k(\eta_{rei}-\bar\eta)]j_2(\bar\eta k)}{\bar\eta^2k^2} \quad (20)$$

Здесь была сделана замена $\eta_{rei}-\bar\eta=\eta$. Далее, делая замену $u=\bar\eta k$, используя асимптотику (14) для $j_2[k(\eta_{rei}-\bar\eta)]$ и формально распространяя интегрирование от 0 до ∞ получим:

$$3\int_0^{\eta_{rei}-\eta_r}\frac{d\bar\eta}{\eta_{rei}-\bar\eta}\frac{j_2[k(\eta_{rei}-\bar\eta)]j_2(\bar\eta k)}{\bar\eta^2k^2}\approx-3\int_0^{\infty}\frac{\sin(k\eta_{rei}-u)j_2(u)}{(k\eta_{rei})^2u^2}du \quad (21)$$

Полученный интеграл легко вычисляется с помощью табличных интегралов:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(u)j_2(u)}{u^2}du=0 \quad (22)$$
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(u)j_2(u)}{u^2}du=\frac{1}{12} \quad (23)$$

Итоговое соотношение:

$$\int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta h'(k,\eta)\frac{j_2[(\eta_{rei}-\eta)k]}{(\eta_{rei}-\eta)^2k^2}=\frac{\cos(k\eta_{rei})}{4k^2\eta_{rei}^2} \quad (24)$$

Подставляя (24) и (19) в изначальное выражение (18) и считая спектр тензорных возмущений масштабно-инвариантным: $P_T(k)=A_T$, получим:

$$C_l^{EE}=9\pi\tau_{rei}^2A_T\int_0^{\infty}\frac{dk}{k}\left(\frac{\cos(k\eta_{rei})}{4k^2\eta_{rei}^2}\right)^2 j_l^2[(\eta_0-\eta_{rei})k]\left(\frac{l^2}{(\eta_0-\eta_{rei})^2k^2}-2\right)^2\approx$$
$$\approx 9\pi\tau_{rei}^2A_T\int_0^{\infty}\frac{dk}{k}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4k^2\eta_{rei}^2}\right)^2 j_l^2[(\eta_0-\eta_{rei})k]\left(\frac{l^2}{(\eta_0-\eta_{rei})^2k^2}-2\right)^2 \quad (25)$$

Для j_l используем асимптотику (15). Усреднение квадрата косинуса по периоду даст множитель 1/2, в итоге получим:

$$j_l^2[(\eta_0-\eta_{rei})k]=\frac{1}{2k(\eta_0-\eta_{rei})\sqrt{k^2(\eta_0-\eta_{rei})^2-l^2}} \quad (26)$$

$$C_l^{EE} = \frac{9\pi\tau_{rei}^2}{64\eta_{rei}^4 l^6}(\eta_0 - \eta_{rei})^4 \int_1^\infty \frac{du}{u^6\sqrt{u^2-1}}\left(\frac{1}{u^2}-2\right)^2 \quad (27)$$

Здесь была сделана замена переменной $k = \frac{ul}{\eta_0 - \eta_{rei}}$.

Учитывая, что $\int_1^\infty \frac{du}{u^6\sqrt{u^2-1}}\left(\frac{1}{u^2}-2\right)^2 = \frac{32}{45}$, придем к итоговому выражению:

$$C_l^{EE} = \frac{\pi}{10}\tau_{rei}^2\left(\frac{\eta_0 - \eta_{rei}}{\eta_{rei}}\right)^4 \frac{A_T}{l^6} \quad (28)$$

Для проверки полученной оценки был проведен численный расчет для $l = 300 - 500$ с помощью системы *Mathematica*. Результат представлен на графике:

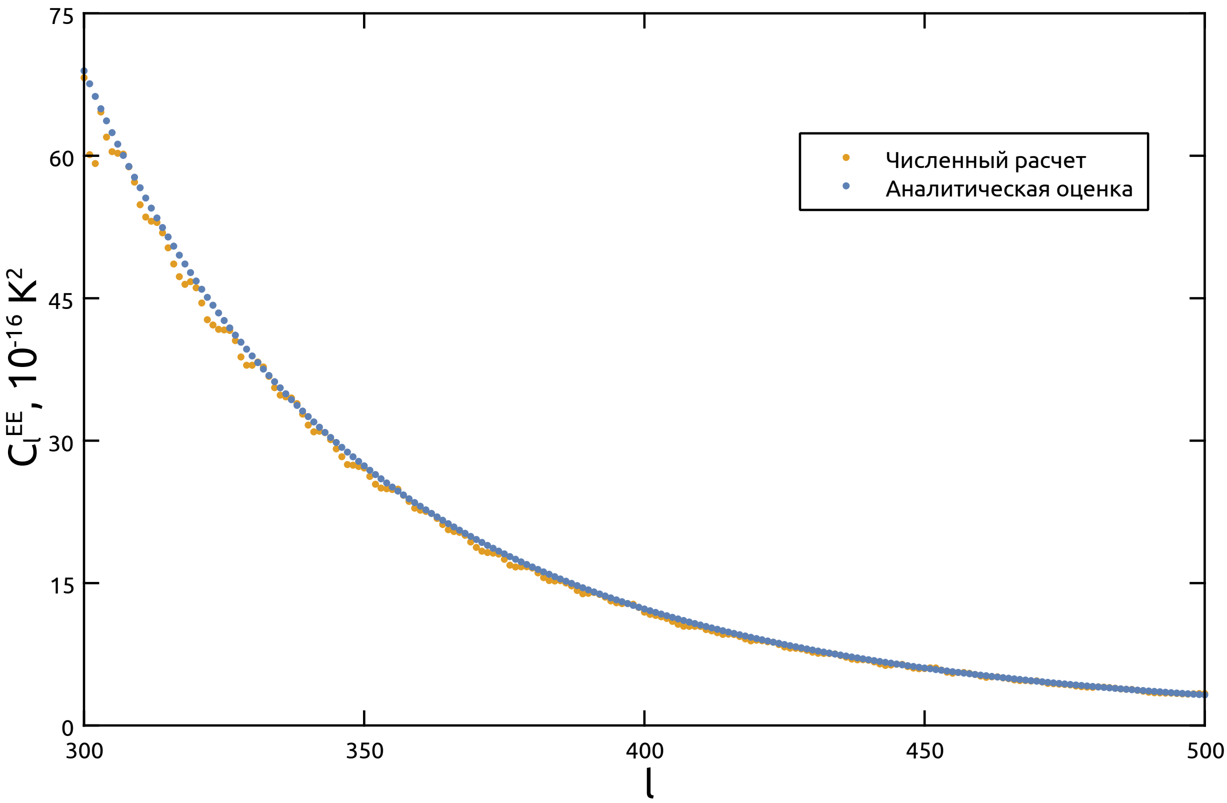

Рис. 1. Вклад в C_l^{EE} от эпохи вторичной ионизации

3.3. Вклад от рекомбинации

Аналогичный вклад в C_l^{EE} от эпохи рекомбинации, см. [1], формула (10.95):

$$C_l^{EE} = \frac{\pi}{25}\Delta\eta_r^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} P_T(k)\left[h'(k,\eta_r)\right]^2 \left\{\frac{(l+2)\,(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2}\left[(\eta_0-\eta_r)k\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} j_l[(\eta_0-\eta_r)k] + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)} j_{l+2}[(\eta_0-\eta_r)k]\right\}^2 \quad (29)$$

Пренебрегаем в (29) η_r по сравнению с η_0, считаем l достаточно большим ($l \gg \eta_0/\eta_r$), спектр масштабно-инвариантным: $P_T(k) = A_T$, и учитываем (17). Тогда выражение, аналогично (19), приводится к следующему виду с помощью рекуррентных соотношений (16):

$$C_l^{EE} = \frac{\pi}{25}\Delta\eta_r^2 A_T \int_0^\infty \frac{dk}{k}\frac{9j_2^2(k\eta_r)}{\eta_r^2} j_l^2[\eta_0 k]\left(\frac{l^2}{\eta_0^2 k^2} - 2\right)^2 \tag{30}$$

Для $j_l^2[\eta_0 k]$ можно использовать асимптотику (15). Усреднение возникшего при этом квадрата косинуса даст $1/2$, в результате получим:

$$j_l^2[\eta_0 k] = \frac{1}{2k\eta_0\sqrt{k^2\eta_0^2 - l^2}} \tag{31}$$

Для $j_2(k\eta_r)$ можно использовать асимптотику (14), аналогично усредняя квадрат синуса получим:

$$j_2^2(k\eta_r) = \frac{1}{2k^2\eta_r^2} \tag{32}$$

Промежуточный итог:

$$C_l^{EE} = \frac{9\pi\Delta\eta_r^2 A_T}{100\eta_r^4\eta_0 l}\int_{l/\eta_0}^\infty \frac{dk}{k^4}\frac{1}{\sqrt{\frac{k^2\eta_0^2}{l^2} - 1}}\left(\frac{l^2}{\eta_0^2 k^2} - 2\right)^2 \tag{33}$$

Полученный интеграл можно вычислить, сделав замену $u = \frac{k\eta_0}{l}$ Тогда

$$\int_{l/\eta_0}^\infty \frac{dk}{k^4}\frac{1}{\sqrt{\frac{k^2\eta_0^2}{l^2} - 1}}\left(\frac{l^2}{\eta_0^2 k^2} - 2\right)^2 = \frac{\eta_0^3}{l^3}\int_1^\infty \frac{du}{u^4\sqrt{u^2-1}}\left(\frac{1}{u^2} - 2\right)^2 = \frac{104\eta_0^3}{105 l^3} \approx \frac{\eta_0^3}{l^3}$$

Итоговое выражение:

$$C_l^{EE} = \frac{9\pi}{100}\left(\frac{\Delta\eta_r}{\eta_r}\right)^2\left(\frac{\eta_0}{\eta_r}\right)^2\frac{A_T}{l^4} \tag{34}$$

Сравнение с численным расчетом для $l = 300 - 600$:

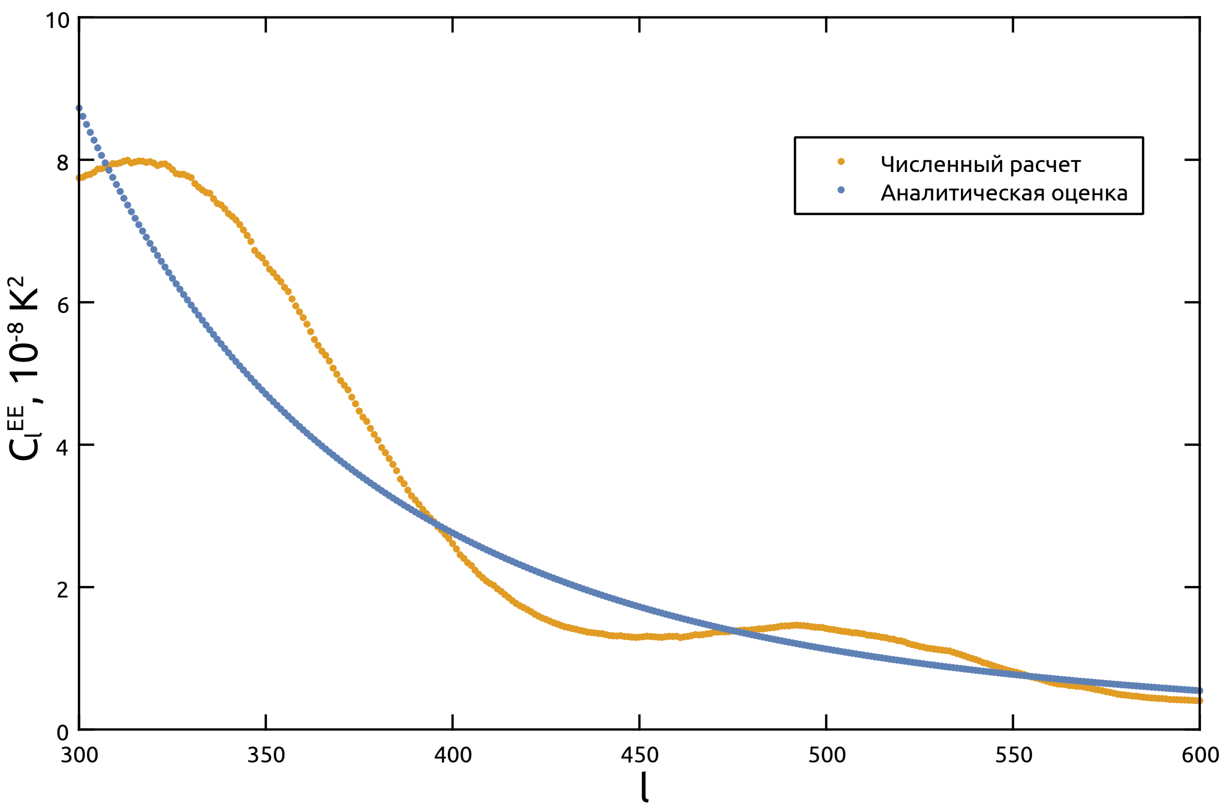

Рис. 2. Вклад в C_l^{EE} от рекомбинации

4. Зависимость спектра от космологических параметров

4.1. Вклад от вторичной ионизации

Вклад в C_l^{EE} от вторичной ионизации зависит лишь от оптической толщины τ_{rei} и от конформных времен соответствующих эпох. Выражения для них (см. [1], ф-лы (2.15) и (9.89)):

$$\eta_0 = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} I(\Omega_M) \tag{35}$$

- конформное время современной эпохи, интеграл $I(\Omega_M)$ равен

$$I(\Omega_M) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}(1+z)^4}} \tag{36}$$

Конформное время эпохи вторичной ионизации:

$$\eta_{rei} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{1 + z_{rei}}} \tag{37}$$

Оптическая толщина:

$$\tau_{rei} = \frac{\eta_B \sigma_T n_{\gamma,0}}{2 H_0 \sqrt{\Omega_M}} (1 + z_{rei})^{\frac{3}{2}} \tag{38}$$

где $\eta_B = \frac{n_B}{n_\gamma}$ - отношение плотности числа барионов и фотонов, $n_{\gamma,0}$ - современная плотность числа реликтовых фотонов, σ_T - томсоновское сечение рассеяния фотона на свободном покоящемся электроне

Используя (38), (35) и (37), получим:

$$C_l^{EE} = \frac{\pi\eta_B^2\sigma_T^2 n_{\gamma,0}^2}{40H_0^2\Omega_M}\left(\sqrt{\frac{1+z_{rei}}{\Omega_M}}I(\Omega_M)-1\right)^4\frac{A_T}{l^6} \tag{39}$$

С помощью полученного выражения можно проанализировать зависимость спектра, например, от Ω_M. Для этого пренебрежем Ω_{rad} в интеграле $I(\Omega_M)$ и с помощью численного расчета найдем зависимость следующего отношения от Ω_M: $\frac{C_l^{EE}(\Omega_M)}{C_l^{EE}(\Omega_M=0.24)}$, при этом положим $z_{rei} = 10$. Расчет показывает, что при увеличении Ω_M, вклад в C_l^{EE} от эпохи вторичной ионизации монотонно убывает. Вид зависимости для $\Omega_M = 0.2 - 0.3$ приведен на рис. 3.

4.2. Вклад от рекомбинации

Пользуемся следующим соотношением для эпохи рекомбинации:

$$\Delta\eta_r = \frac{2T_r\eta_r}{\Delta_H} \tag{40}$$

где $\Delta_H = 13.6$ эВ - энергия связи электрона в атоме водорода на основном уровне, T_r - температура рекомбинации

Конформное время этой эпохи:

$$\eta_r = \int_{z_r}^{\infty}\frac{dz}{a_0H_0\sqrt{(1+z)^3\Omega_M+(1+z)^4\Omega_{rad}}} = \frac{2}{a_0H_0\sqrt{\Omega_M}}\mathcal{F}\left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}\right) \tag{41}$$

где

$$\mathcal{F}\left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}\right) = \sqrt{\frac{1}{1+z_r}+\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} - \sqrt{\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} \tag{42}$$

Учитывая (40), (41) и (35), получим:

$$C_l^{EE} = \frac{9\pi T_r^2}{25\Delta_H^2}\left(\frac{I(\Omega_M)}{\mathcal{F}\left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}\right)}\right)^2\frac{A_T}{l^4} \tag{43}$$

С помощью этого выражения можно проанализировать зависимость спектра от Ω_M, при этом считаем, что отношение $\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}$ остается постоянным. Аналогично предыдущему разделу, найдем зависимость $\frac{C_l^{EE}(\Omega_M)}{C_l^{EE}(\Omega_M=0.24)}$. Из графика видно, что вклад в C_l^{EE} от рекомбинации монотонно возрастает при увеличении Ω_M, но скорость изменения меньше, чем для аналогичного вклада от эпохи вторичной ионизации.

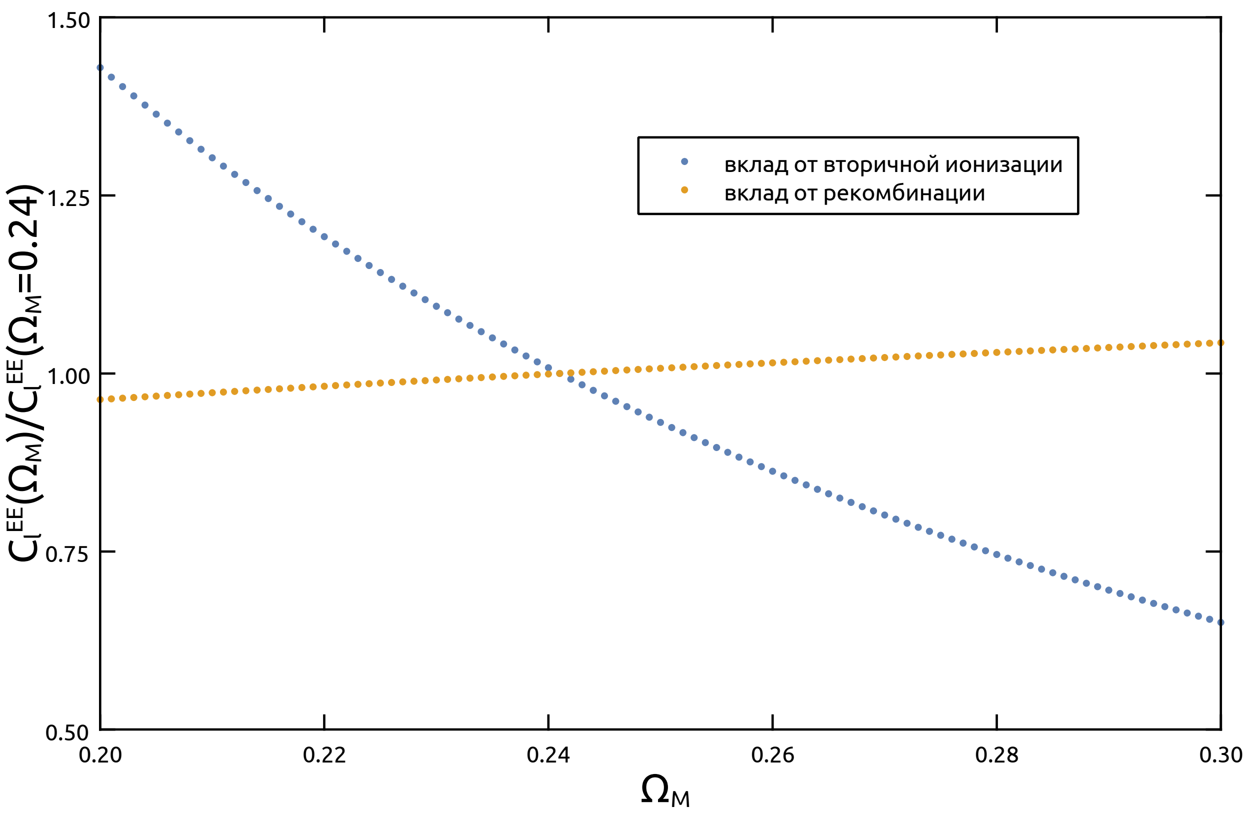

Рис. 3. Зависимость $\frac{C_l^{EE}(\Omega_M)}{C_l^{EE}(\Omega_M=0.24)}$

5. Итоги

В ходе работы были получены аналитические оценки для вкладов от различных эпох в спектр C_l^{EE}. С помощью численного расчета можно достичь большей точности, но наличие явных выражений позволяет проанализировать зависимость спектра от космологических параметров. Для примера был проведен анализ зависимости от Ω_M вкладов для рекомбинации и вторичной ионизации. Из анализа можно сделать вывод, что вклад от вторичной ионизации более чувствителен к изменению этого параметра, чем вклад от рекомбинации.

Список литературы

1. Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория.*
2. V. Mukhanov, *CMB-slow or How to Estimate Cosmological Parameters by Hand*