

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа

Оценки формы гало темной материи по движению звезд.

Выполнил:
Студент 214 группы
Корешкова Екатерина Павловна
Научный руководитель:
член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва
2022

Содержание

Введение.	3
Постановка задачи.	4
Получение распределения скоростей.	5
Профиль Наварро-Френка-Уайта.	5
Псевдоизотермический профиль.	6
Сравнение скоростей.	7
Профиль Наварро-Френка-Уайта.	7
Псевдоизотермический профиль.	9
Вывод.	10
Заключение.	10
Список использованной литературы.	11
Приложение.	11

Введение.

Полученные в результате прямых наблюдений кривые вращения галактик показывают отсутствие убывания скоростей звезд на периферии в противоречие теоретическим зависимостям. Данное расхождение демонстрирует недостаточность гравитационного потенциала видимой массы. Для объяснения полученных кривых вращения была предложена теория о существовании темной материи.

В ходе численных симуляций гравитирующих частиц был получен теоретический профиль плотности темной материи, имеющий сингулярность в центре галактики - профиль Наварро-Френка-Уайта. С другой стороны, наблюдательные данные, полученные на основе кривых вращения, демонстрируют профили с практически постоянной плотностью в центре - псевдоизотермический профиль.

Расхождение наблюдательных данных с результатами численных симуляций получило название проблемы каспов. Неопределенность в описании распределения тёмной материи в центральных областях галактик влечет трудности при решении задачи экспериментального обнаружения тёмной материи. Полученное несоответствие предсказаний и наблюдательных данных может использоваться как аргумент против справедливости общепринятой космологической модели (Λ CDM).

Одним из объяснений данного расхождения может быть ошибочность предположений о круговом движении звезд, что приводит к некорректному определению их скоростей и, как следствие, к ошибке в наблюдаемом профиле плотности.

Целью данной работы является рассмотрение сильно вытянутых траекторий звезд и оценка ошибки в значении скорости, полученном в предположении кругового движения.

Постановка задачи.

Будем рассматривать движение звезды по сильно вытянутой орбите в гравитационном потенциале темной материи в приближении центрально симметричного поля.

Из закона сохранения энергии:

$$E_0 = \frac{mV_r^2}{2} + \frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r) = \text{const}|_t$$

где $L_0 = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$

Уравнение траектории имеет вид:

$$\varphi = \int \frac{\frac{L_0}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}}$$

Тогда угол $\Delta\varphi$, под которым видна малая полуось орбиты из центра поля:

$$\Delta\varphi = \int_{\frac{r_{max}}{2}}^{r_{max}} \frac{\frac{L_0}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}}$$

В приближении сильно вытянутых орбит полагаем $\Delta\varphi \approx 0$, значит $\varphi(r_{max}) = \varphi(\frac{r_{max}}{2})$. Функция $\varphi(r)$ монотонна, тогда $\varphi(r) \equiv \text{const}$ и $\varphi'(r) \equiv 0$. Откуда:

$$\varphi'(r) = \frac{\frac{L_0}{r^2}}{\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} \equiv 0$$

Получаем $L_0 = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$.

Таким образом, закон сохранения энергии примет вид:

$$E_0 = \frac{mV_r^2}{2} + U(r) = \text{const}|_t \quad (1)$$

Далее вместо V_r будем использовать V , так как вращательной компонентой скорости мы принебрегли.

Получение распределения скоростей.

Профиль Наварро-Френка-Уайта.

Данный профиль является аппроксимацией результатов численного моделирования и имеет вид:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s}(1 + \frac{r}{R_s})^2}$$

Получим зависимость скорости от расстояния для звезды, движущейся по вытянутой орбите.

Продифференцируем (1) по t :

$$\frac{m}{2} \frac{dV^2}{dt} + \frac{dU(r)}{dt} = 0$$

С учетом $dr = V dt$:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \frac{dV^2}{dr} + \frac{dU(r)}{dr} &= 0 \\ \frac{dV^2}{dr} &= -\frac{8\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(s) ds = -\frac{8\pi G}{r^2} \rho_0 R_s^3 \left(\ln\left(\frac{r}{R_s} + 1\right) - \frac{r}{r + R_s} \right) \\ \int_{V_{max}}^V dV^2 &= -8\pi G \rho_0 R_s^3 \int_0^r \frac{1}{r^2} \left(\ln\left(\frac{r}{R_s} + 1\right) - \frac{r}{r + R_s} \right) dr \\ V^2 &= V_{max}^2 - 8\pi G \rho_0 R_s^2 + 8\pi G \rho_0 R_s^3 \frac{\ln\left(\frac{r}{R_s} + 1\right)}{r} \end{aligned} \quad (2a)$$

Для звезды, движущейся по круговой орбите, имеет место:

$$\begin{aligned} \frac{mV^2}{r} &= \frac{dU}{dr} \\ rV^2 &= 4\pi G \int_0^r \rho(s) ds = 4\pi G \rho_0 R_s^3 \left(\ln\left(\frac{r}{R_s} + 1\right) - \frac{r}{r + R_s} \right) \\ V^2 &= \frac{4\pi G}{r} \rho_0 R_s^3 \left(\ln\left(\frac{r}{R_s} + 1\right) - \frac{r}{r + R_s} \right) \end{aligned} \quad (3a)$$

Псевдоизотермический профиль.

Данный профиль получен из наблюдательных данных и имеет вид:

$$\rho(r) = \frac{\rho_C}{1 + (\frac{r}{r_C})^2}$$

Получим зависимость скорости от расстояния для звезды, движущейся по вытянутой орбите.

Аналогично, дифференцируя (1) по t и используя $dr = Vdt$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dV^2}{dr} &= -\frac{8\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(s) ds = -\frac{8\pi G}{r^2} \rho_C r_C^2 (r - r_C \operatorname{arctg}(\frac{r}{r_C})) \\ \int_{V_{max}}^V dV^2 &= -8\pi G \rho_C r_C^2 \int_0^r (\frac{1}{r} - \frac{r_C}{r^2} \operatorname{arctg}(\frac{r}{r_C})) dr \\ V^2 &= V_{max}^2 - 8\pi G \rho_C r_C^2 - 8\pi G \rho_C r_C^2 \left(\ln\left(\frac{\sqrt{r^2 + r_C^2}}{r_C}\right) + \frac{r_C}{r} \operatorname{arctg}(\frac{r}{r_C}) \right) \end{aligned} \quad (2b)$$

Аналогично, для кругового движения:

$$\begin{aligned} rV^2 &= 4\pi G \int_0^r \rho(s) ds = 4\pi G \rho_C r_C^2 (r - r_C \operatorname{arctg}(\frac{r}{r_C})) \\ V^2 &= 4\pi G \rho_C r_C^2 \left(1 - \frac{r_C}{r} \operatorname{arctg}(\frac{r}{r_C}) \right) \end{aligned} \quad (3b)$$

Сравнение скоростей.

Чтобы сравнить полученную зависимость скорости от расстояния $V^2(r)$ с кривой вращения, определим среднее за период расстояние для случая сильно вытянутой орбиты.

Профиль Наварро-Френка-Уайта.

По определению среднего расстояния:

$$\langle r \rangle_T = \frac{\int_0^T r dt}{\int_0^T dt}$$

Используя $dr = V dt$:

$$\langle r \rangle_T = \frac{\int_0^{r_{max}} \frac{r dr}{V}}{\int_0^{r_{max}} \frac{dr}{V}}$$

Аппроксимируем полученную зависимость $V^2(r)$ прямой:

$$V^2 \approx V_{max}^2 - \frac{V_{max}^2}{r_{max}} r$$

Тогда для среднего расстояния получим:

$$\langle r \rangle_T = \frac{\int_0^{r_{max}} \frac{r dr}{\sqrt{V_{max}^2 - \frac{V_{max}^2}{r_{max}} r}}}{\int_0^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{V_{max}^2 - \frac{V_{max}^2}{r_{max}} r}}} = \frac{\frac{2}{3} + 2}{3} r_{max} \approx 0.28 r_{max}$$

На максимальном расстоянии $V^2(r_{max}) = 0$:

$$V^2(r_{max}) = V_{max}^2 - 8\pi G \rho_0 R_s^2 + 8\pi G \rho_0 R_s^3 \frac{\ln(\frac{r_{max}}{R_s} + 1)}{r_{max}} = 0$$

Отсюда получаем выражение для V_{max}^2

$$V_{max}^2 = 8\pi G \rho_0 R_s^2 - 8\pi G \rho_0 R_s^3 \frac{\ln(\frac{r_{max}}{R_s} + 1)}{r_{max}}$$

Тогда скорость на среднем расстоянии:

$$V^2 = \frac{200\pi G \rho_0 R_s^3}{7r_{max}} \left(\ln\left(\frac{0.28r_{max}}{R_s} + 1\right) - 0.28 \ln\left(\frac{r_{max}}{R_s} + 1\right) \right) \quad (4a)$$

Для кругового движения скорость на расстоянии $0.28r_{max}$:

$$V^2 = \frac{100\pi G \rho_0 R_s^3}{7r_{max}} \left(\ln\left(\frac{0.28r_{max}}{R_s} + 1\right) - \frac{0.28r_{max}}{0.28r_{max} + R_s} \right) \quad (4b)$$

Вычитая (4b) из (4a), получим оценку ошибки в определении скорости:

$$\Delta V^2 = \frac{100\pi G \rho_0 R_s^3}{7r_{max}} \left(0.56 \ln\left(\frac{r_{max}}{R_s} + 1\right) - \ln\left(\frac{0.28r_{max}}{R_s} + 1\right) - \frac{0.28r_{max}}{0.28r_{max} + R_s} \right)$$

Рассмотрим предельные случаи:

$$\Delta V^2(r_{max} \ll R_s) = 0$$

$$\Delta V^2(r_{max} \gg R_s) = 0$$

$$\Delta V^2(r_{max} = R_s) = \frac{100\pi G \rho_0 R_s^2}{7} \left(0.56 \ln(2) - \ln(1.28) - \frac{0.28}{1.28} \right) = 1.11\pi G \rho_0 R_s^2$$

При наблюдении измеряются не полные скорости, а их проекции на луч зрения. Поэтому для сильно вытянутых орбит:

$$v = V < \cos(i) >_i \Rightarrow v^2 = \frac{V^2}{2} \quad (5a)$$

для круговых орбит:

$$3v^2 = V^2 \Rightarrow v^2 = \frac{V^2}{3} \quad (5b)$$

и оценка ошибки для проекций скоростей:

$$\Delta v^2 = \frac{100\pi G \rho_0 R_s^3}{7r_{max}} \left(0.28 \ln\left(\frac{r_{max}}{R_s} + 1\right) - \frac{2}{3} \ln\left(\frac{0.28r_{max}}{R_s} + 1\right) - \frac{0.28r_{max}}{0.84r_{max} + 3R_s} \right)$$

В предельных случаях:

$$\Delta v^2(r_{max} \ll R_s) = 0$$

$$\Delta v^2(r_{max} \gg R_s) = 0$$

$$\Delta v^2(r_{max} = R_s) = \frac{100\pi G \rho_0 R_s^2}{7} \left(0.28 \ln(2) - \frac{2}{3} \ln(1.28) - \frac{0.28}{3.84} \right) = -0.62\pi G \rho_0 R_s^2$$

Отсюда можем получить оценки относительной ошибки:

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} = \frac{0.28 \ln\left(\frac{r_{max}}{R_s} + 1\right) - \frac{2}{3} \ln\left(\frac{0.28r_{max}}{R_s} + 1\right) - \frac{0.28r_{max}}{0.84r_{max} + 3R_s}}{\ln\left(\frac{0.28r_{max}}{R_s} + 1\right) - 0.28 \ln\left(\frac{r_{max}}{R_s} + 1\right)}$$

В предельных случаях:

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \Big|_{r_{max} \ll R_s} = \frac{-47}{54} \approx -87\%$$

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \Big|_{r_{max} \gg R_s} = \frac{1}{3 \ln(25)} \approx 10\%$$

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \Big|_{r_{max} = R_s} = \frac{-672 \ln(2) + 1600 \ln(\frac{32}{25}) + 175}{672 \ln(2) - 2400 \ln(\frac{32}{25})} \approx -82\%$$

Псевдоизотермический профиль.

Аналогично, используя выражение для среднего за период расстояния с учетом $dr = Vdt$, аппроксимируя зависимость $V^2(r)$ прямой, и используя равенство $V^2(r_{max}) = 0$ получим значение скорости на среднем расстоянии:

$$V^2 = 8\pi G \rho_C r_C^2 \left(\ln\left(\frac{\sqrt{r_{max}^2 + r_C^2}}{r_C}\right) + \frac{r_C}{r_{max}} \operatorname{arctg}\left(\frac{r_{max}}{r_C}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{(0.28r_{max})^2 + r_C^2}}{r_C}\right) - \frac{r_C}{0.28r_{max}} \operatorname{arctg}\left(\frac{0.28r_{max}}{r_C}\right) \right) \quad (5a)$$

Для кругового движения скорость на расстоянии $0.28r_{max}$:

$$V^2 = 4\pi G \rho_C r_C^2 \left(1 - \frac{r_C}{0.28r_{max}} \operatorname{arctg}\left(\frac{0.28r_{max}}{r_C}\right) \right) \quad (5b)$$

Вычитая (5b) из (5a), получим оценку ошибки в определении скорости:

$$\Delta V^2 = 8\pi G \rho_C r_C^2 \left(\ln\left(\frac{\sqrt{r_{max}^2 + r_C^2}}{r_C}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{(0.28r_{max})^2 + r_C^2}}{r_C}\right) + \frac{r_C}{r_{max}} \operatorname{arctg}\left(\frac{r_{max}}{r_C}\right) - \frac{r_C}{0.56r_{max}} \operatorname{arctg}\left(\frac{0.28r_{max}}{r_C}\right) - \frac{1}{2} \right)$$

Рассмотрим предельные случаи:

$$\Delta V^2(r_{max} \ll r_C) = 0$$

$$\Delta V^2(r_{max} \gg r_C) = -8\pi G \rho_C r_C^2 \left(\ln\left(\frac{25}{7}\right) - \frac{1}{2} \right) = -6.18\pi G \rho_C r_C^2$$

$$\Delta V^2(r_{max} = r_C) = 8\pi G \rho_C r_C^2 \left(\ln(2\sqrt{2}) + \operatorname{arctg}(1) - \ln(\sqrt{0.28^2 + 1}) - \frac{1}{0.56} \operatorname{arctg}(0.28) - \frac{1}{2} \right) = 6.4\pi G \rho_C r_C^2$$

Аналогично, используя соотношения (5a) и (5b), получим оценку для относительной ошибки:

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{r_{max}^2 + r_C^2}}{r_C}\right) + \frac{r_C}{r_{max}} \operatorname{arctg}\left(\frac{r_{max}}{r_C}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{(0.28r_{max})^2 + r_C^2}}{r_C}\right) - \frac{2r_C}{0.84r_{max}} \operatorname{arctg}\left(\frac{0.28r_{max}}{r_C}\right) - \frac{1}{3}}{\ln\left(\frac{\sqrt{r_{max}^2 + r_C^2}}{r_C}\right) + \frac{r_C}{r_{max}} \operatorname{arctg}\left(\frac{r_{max}}{r_C}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{(0.28r_{max})^2 + r_C^2}}{r_C}\right) - \frac{r_C}{0.28r_{max}} \operatorname{arctg}\left(\frac{0.28r_{max}}{r_C}\right)}$$

В предельных случаях:

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \Big|_{r_{max} \ll r_C} = \frac{815}{864} \approx 94\%$$

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \Big|_{r_{max} \gg r_C} = \frac{-2}{3\ln(625)} \approx -10\%$$

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \Big|_{r_{max} = r_C} = \frac{42 \ln(2) - 42 \ln(\frac{674}{625}) - 200 \operatorname{arctg}(\frac{7}{25}) + 21\pi - 28}{42 \ln(2) - 42 \ln(\frac{674}{625}) - 300 \operatorname{arctg}(\frac{7}{25}) + 21\pi} \approx 93\%$$

Вывод.

В результате мы получили оценку для относительной ошибки скорости в центральной области $\Delta v^2 = 0$ как для профиля Наварро-Френка-Уайта, так и для псевдоизотермического профиля. Отсюда можно сделать вывод, что в обоих случаях звезды, движущиеся по сильно вытянутым орбитам не вносят существенной ошибки в кривую вращения, а следовательно, и в получаемый профиль плотности темной материи.

Таким образом, звезды, движущиеся по сильно вытянутым орбитам не могут являться решением проблемы каспов.

Заключение.

В данной работе было рассмотрено движение звезд по сильно вытянутым орбитам в приближении центрально-симметричного поля темной материи с профилями плотности, имеющими вид профиля Наварро-Френка-Уайта и псевдоизотермического профиля. Из этих приближений были получены зависимости скорости звезды от расстояния $V^2(r)$ и соответствующая ошибка Δv^2 , как разность проекций скоростей для сильно вытянутых и круговых орбит на среднем расстоянии.

Список использованной литературы.

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие - В 10 т. Т. I. Механика. - 4-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988

Приложение.

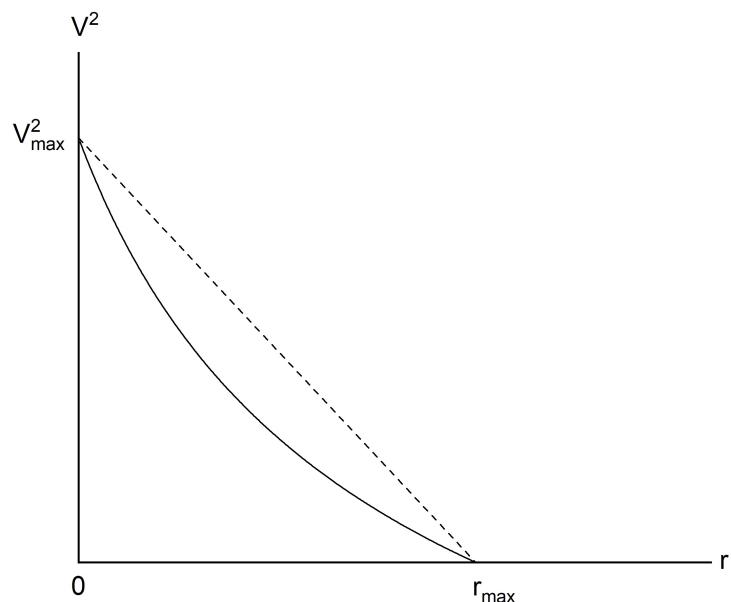


Рис. 1: Аппроксимация (2a) прямой.

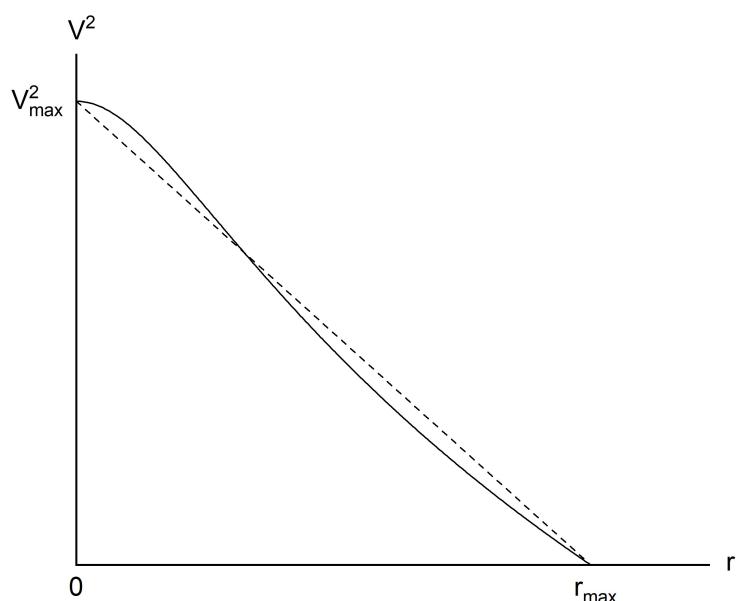


Рис. 2: Аппроксимация (2b) прямой.