МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра физики частиц и космологии

Эволюция двойной системы реликтовых черных дыр в раннней Вселенной

Курсовая работа

студента 2 курса 211 группы
Богданова Максима Александровича

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН, г.н.с. ОТФ ИЯИ РАН
Дмитрий Сергеевич Горбунов

Москва 2022

Содержание

1 Изменение массы черной дыры **3**
- 1.1 Излучение Хокинга 3
- 1.2 Поглощение массы 3
- 1.3 Суммарное изменение массы 5
- 1.4 Критическая масса 5
- 1.5 Масса первичной черной дыры в момент возникновения 6
- 1.6 Предельные случаи 6
- 1.7 Поиск аналитического решение в виде ряда 8

2 Попытка описания системы, состоящей из двух первичных черных дыр **11**
- 2.1 Случай постоянной массы 11
- 2.2 Случай медленно меняющейся массы 13

1 Изменение массы черной дыры

Изменение массы черной дыры dM складывается из двух составляющих:

- Излучение Хокинга (dM^-)
- Поглащение окружающего вещества (dM^+)

$$dM = dM^- + dM^+ \tag{1}$$

1.1 Излучение Хокинга

Мощность излучения черной дыры равна:

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dt} = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2 M^2} \tag{2}$$

$$dE_{\text{изл}} = -dE_{\text{ч.д.}} = -c^2 dM \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) получим:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2 M^2} \tag{4}$$

Пусть $a_2 := \frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2}$, тогда $a_2 \approx 4 \cdot 10^{15} \frac{\text{кг}^3}{\text{с}}$

В итоге получим:

$$dM^- = -\frac{a_2}{M^2} dt, \text{где } a_2 \approx 4 \cdot 10^{15} \frac{\text{кг}^3}{\text{с}} \tag{5}$$

1.2 Поглощение массы

Мы будем рассматривать черную дыру, как некоторую область в пространстве, границей которой является сфера радиуса Швардшильда $R_{\text{ш}}$

Из классических соображений формулу для радиуса Швардшильда можно получить следующим образом. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mc^2}{2} - G \cdot \frac{mM}{R_{\text{ш}}} = 0$$

Данный закон сохранения энергии показывает, каким должен быть минимальный радиус сферы, чтобы тело обладающее скоростью c на ее поверхности могло улететь на бесконечность (смогло выйти за пределы гравитационного влияния объекта) . Отсюда можно получить

$$R_{\text{ш}} = \frac{2GM}{c^2} \tag{6}$$

Рассмотрим площадку площадью ds на поверхности сферы за время dt через эту площадку пройдет масса:

$$d(dm_t)_s = m_i n < v_r > dtds, \tag{7}$$

где m_i - масса частиц среды, n - концентрация, а $< v_r >$ - средняя скорость частиц вдоль направления совпадающего с внутренней нормалью к площадке

Если среда однородна, то $m_i n = \frac{m_i N}{V} = \frac{m}{V} = \rho$

$$d(dm_t)_s = \rho < v_r > dtds, \tag{8}$$

Мы считаем, что среда состоит из ультрарелятивистских частиц, то есть $|\vec{v}| \approx c$

Найдем среднюю проекцию скорости частиц на направление r сонаправленное с внутренней нормалью к площадке

$$v_{r_i} = c \cdot cos(\theta_i) \tag{9}$$

Нас интересуют только положительные проекции, поэтому мы интегрируем только по половине телесного угла

$$< v_r >= \frac{1}{2\pi} \int v_r \cdot d\Omega \tag{10}$$

$$d\Omega = \frac{ds}{r^2} = \frac{r^2 \cdot sin(\theta) d\theta d\varphi}{r^2} = sin(\theta) d\theta d\varphi$$

$$< v_r >= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} c \cdot cos(\theta) sin(\theta) d\varphi = c \int\limits_0^1 sin(\theta) d(sin(\theta)) = \frac{c}{2}$$

$$< v_r >= \frac{c}{2} \tag{11}$$

$$d(dm_t)_s = \frac{\rho c}{2} dtds \tag{12}$$

$$\int d(dm_t)_s = \int\limits_{S_{\text{Сф.}}} \frac{\rho c}{2} dtds, \tag{13}$$

где интегрирование ведется по поверхности сферы радиуса Шварцшильда

$$dm_t = \frac{\rho c}{2} dt 4\pi R_{\text{ш}}^2 = 2\pi\rho c \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 dt = \frac{8\pi G^2}{c^3} \rho M^2 dt$$

В ранней вселенной плотность зависила от времени следующим образом:

$$\rho(t) = \frac{3}{32\pi G} \cdot \frac{1}{t^2} \tag{14}$$

$$dm = \frac{8\pi G}{c^3} \cdot \frac{3}{32\pi G} \cdot \frac{M^2}{t^2} dt = \frac{3G}{4c^3} \cdot \frac{M^2}{t^2} dt$$

Пусть $a_1 := \frac{3G}{4c^3} \approx 2 \cdot 10^{-36} \frac{\text{с}}{\text{кг}}$

$$dM^+ = a_1 \left(\frac{M}{t}\right)^2 dt \tag{15}$$

1.3 Суммарное изменение массы

Из формулы (3) следует

$$dM = dM^+ + dM^- = a_1 \left(\frac{M}{t}\right)^2 dt - \frac{a_2}{M^2} dt$$

Поделив на dt, получим дифференциальное уравнение описывающее изменение массы черной дыры

$$\frac{dM}{dt} = a_1 \left(\frac{M}{t}\right)^2 - \frac{a_2}{M^2} \tag{16}$$

К сожалению, данное дифференциальное уравнение не имеет аналитического решения, поэтому давайте рассмотрим некоторые предельные случаи

1.4 Критическая масса

Пусть $\frac{dM}{t} = 0$, тогда

$$a_1 \left(\frac{M}{t}\right)^2 = \frac{a_2}{M^2}$$

$$M^4 = \frac{a_2}{a_1} \cdot t^2$$

$$M_{\text{к}} = \left(\frac{a_2}{a_1} \cdot t^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

$M_{\text{к}}$ - критическая масса

При $M > M_{\text{к}}$ масса черной дыры растет (доминирует поглащение вещества)

При $M < M_к$ масса черной дыры уменьшается (доминирует испарение)

Обозначим $a_0 := \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 7 \cdot 10^{12} \frac{\text{кг}}{c^{\frac{1}{2}}}$

$$M_к = a_0\sqrt{t} \tag{17}$$

1.5 Масса первичной черной дыры в момент возникновения

Оценим сверху массу первичной черной дыры в момент возникновения. Рассмотрим точку и найдём размер причинно связной области с центром в этой точке. Пусть в момент времени t=0 из этой точки равномерно во все стороны были испущенны лучи. Тогда границей этой области к моменту времени t будет являться сфера с радиусом $r = ct$. Отсюда мы можем оценить объем области $V = \frac{4}{3}\pi(ct)^3$. Исходя из выражения для плотности вещества (14), найдем массу вещества содержащегося внутри этой области $m = \rho V$. В итоге получим

$$M = \frac{c^3 t}{8G} \tag{18}$$

1.6 Предельные случаи

Рассмотрим поведение дифференциального уравнения в зависимости от начального условия. Пусть $M(t_0) = M_0$ и пусть выполнено соотношение $M_0 << M_к(t_0)$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dM}{dt} = \frac{a_1}{t^2}M^2 - \frac{a_2}{M^4}M^2 \tag{19}$$

Если выполнено соотношение $M_0 << M_к(t0)$, то и выполнено соотношение

$$\frac{a_1}{t_0^2} << \frac{a_2}{M_0^4} \tag{20}$$

Отсюда следует, что в течение следующего бесконечно малого промежутка времени dt, масса будет уменьшаться, а коэффициент $\frac{a_2}{M_0^4}$ увеличеваться, в свою очередь коэффициент $\frac{a_1}{t_0^2}$ будет уменьшаться, следовательно соотношение (20) сохраниться. Поэтому слагаемым $\frac{a_1}{t^2}M^2$ в данном случае можно принебреч. В итоге мы получим следующее уравнение

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{a_2}{M^2} \tag{21}$$

$$\int\limits_{M_0}^{M(t)} M^2 dM = -a_2 \int\limits_{t_0}^{t} dt$$

$$M = \left(M_0^3 - 3a_2(t - t_0)\right)^{\frac{1}{3}} \tag{22}$$

Из этого соотношения можно оценить время, τ за которое черная дыра испарится

$$\tau = \frac{M_0^3}{3a_2} \tag{23}$$

Теперь пердположим, что выполнено $M_к(t_0) << M_0 < \frac{c^3 t_0}{8G}$, тогда справидливо соотношение

$$\frac{a_1}{t_0^2} >> \frac{a_2}{M_0^4} \tag{24}$$

Отсюда следует, что в течение следующего бесконечно малого промежутка времени dt, масса будет увеличиваться, а коэффициент $\frac{a_2}{M_0^4}$ уменьшаться, в свою очередь коэффициент $\frac{a_1}{t_0^2}$ тоже будет будет уменьшаться, но медленнее, следовательно соотношение (24) сохраниться. Сохранятся оно будет до тех пор пока кривая M(t) не пересечет кривую $M_к(t)$. Поэтому слагаемым $\frac{a_2}{M^2}$ в данном случае можно принебреч. В итоге мы получим следующее уравнение

$$\frac{dM}{dt} = a_1 \left(\frac{M}{t}\right)^2 \tag{25}$$

$$\int\limits_{M_0}^{M(t)} \frac{dM}{M^2} = a_1 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{t^2}$$

$$M = \frac{M_0 t_0}{t t_0 - a_1 M_0 (t - t_0)} t \tag{26}$$

Оценим до какого моента времени справедлива данная формула, для этого опредлим в какой момент времени предложенная зависимость пересечет зависимость $M_к(t)$

$$\frac{M_0 t_0}{t t_0 - a_1 M_0 (t - t_0)} t = a_0 \sqrt{t}$$

$$(a_0 t_0 - a_1 a_0 M_0) t - M_0 t_0 \sqrt{t} + a_1 a_0 M_0 t_0 = 0$$

$$t = \left(\frac{M_0 t_0 + \sqrt{(M_0 t_0)^2 - 4a_1 a_0 M_0 (a_0 t_0 - a_1 a_0 M_0)}}{2(a_0 t_0 - a_1 a_0 M_0)}\right)^2 \tag{27}$$

1.7 Поиск аналитического решение в виде ряда

Попробуем написать формальное разложение в ряд Тейлора функции M(t). Для этого домножим уравнение (16) справа и слева на $\frac{1}{M^2}$ и сделаем замену переменной $z(t) = \frac{1}{M(t)}$. Получим следующее уравнение для функции z(t)

$$\frac{dz}{dt} = a_2 z^4 - \frac{a_1}{t^2} \tag{28}$$

Разложение в ряд тейлора функции z(t) в точке t_0выглядит следующим образом

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n \tag{29}$$

То есть нам нужно вычислить n-ю производную функции z(t)

$$z^{(n)} = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(a_2 z^4) - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{a_1}{t^2}\right)$$

Для облегчения вычисления производной сделаем следующую замену в правой части ъ $= z^2$

$$z^{(n)} = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(a_2 \text{ъ}^2) - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{a_1}{t^2}\right)$$

Вычислим сначала производную $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{a_1}{t^2}\right)$. Пусть $f(t) = \frac{a_1}{t^2}$. Тогда

$$f^{(1)} = -2 \cdot \frac{a_1}{t^3}, f^{(2)} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{a_1}{t^4}$$

Отсюда получим

$$f^{(n)}(t) = (-1)^n (n+1)! \left(\frac{a_1}{t^{n+2}}\right)$$

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{a_1}{t^2}\right) = (-1)^{n-1} n! \left(\frac{a_1}{t^{n+1}}\right) \tag{30}$$

Пусть теперь $f(t) = (g(t))^2$

$$f^{(1)} = 2gg'$$

$$f^{(2)} = 2gg'' + 2(g')^2$$

$$f^{(3)} = 2gg''' + 6g'g''$$

$$f^{(4)} = 2gg'''' + 8g'g''' + 6(g'')^2$$

$$f^{(5)} = 2gg''''' + 10g'g''' + 20g''g'''$$

Отсюда видно

$$f^{(n)} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_{ni} g^{(i)} g^{(n-i)}, \tag{31}$$

где b_{ni} задается следующим образом

$$b_{n0} = 2$$

$$\forall i > \left[\frac{n}{2}\right] b_{ni} = 0$$

$$\text{Если } i - 1 \neq \frac{n}{2} \text{ и } i > 0, \text{ то } b_{ni} = b_{n-1i} + b_{n-1i-1}$$

$$\text{Если } i - 1 = \frac{n}{2} \text{ и } i > 0, \text{ то } b_{ni} = 2b_{n-1i} + b_{n-1i-1}$$

Вычислим теперь производную $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(a_2ъ^2)$. Положим $f(t) = a_2ъ^2(t)$. Тогда согласно формуле (31)

$$f^{(n)} = a_2 \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_{ni} ъ^{(i)} ъ^{(n-i)}$$

Но $ъ = z^2$. Тогла итоговое выражение для n-й производной можно записать в виде

$$f^{(n)} = a_2 \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_{ni} \left(\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} b_{i\alpha} z^{(\alpha)} z^{(i-\alpha)} \right) \left(\sum_{\beta=0}^{\left[\frac{n-i}{2}\right]} b_{n-1\beta} z^{(\beta)} z^{(n-i-\beta)} \right)$$

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(a_2ъ^2) = a_2 \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_{n-1i} \left(\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} b_{i\alpha} z^{(\alpha)} z^{(i-\alpha)} \right) \left(\sum_{\beta=0}^{\left[\frac{n-1-i}{2}\right]} b_{n-1-i\beta} z^{(\beta)} z^{(n-1-i-\beta)} \right) \tag{32}$$

$$z^{(n)} = a_2 \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_{n-1i} \left(\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} b_{i\alpha} z^{(\alpha)} z^{(i-\alpha)} \right) \left(\sum_{\beta=0}^{\left[\frac{n-1-i}{2}\right]} b_{n-1-i\beta} z^{(\beta)} z^{(n-1-i-\beta)} \right) + (-1)^n n! \left(\frac{a_1}{t^{n+1}} \right)$$

Теперь можем окончательно записать

$$M(t) = \left(M_0^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (t - t_0)^n \right)^{-1}, \tag{33}$$

где

$$c_n = \frac{a_2}{n!} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_{n-1i} \left(\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} b_{i\alpha} z^{(\alpha)} z^{(i-\alpha)} \right) \left(\sum_{\beta=0}^{\left[\frac{n-1-i}{2}\right]} b_{n-1-i\beta} z^{(\beta)} z^{(n-1-i-\beta)} \right) + (-1)^n \left(\frac{a_1}{t^{n+1}} \right)$$

2 Попытка описания системы, состоящей из двух первичных черных дыр

Мы будем считать, что в начале своей эволюции система из двух первичных черных дыр подчиняется законам классической механики, а сами черные дыры движутся по круговым орбитам. Начнем с того, что рассмотрим случай, когда масса первичных черных дыр постоянна.

2.1 Случай постоянной массы

Пусть масса одной из первичных черных дыр m_1, а масса другой m_2. Выберем начало системы координат в центре инерции системы, тогда радиус-вектора тел системы будут вырвжвться следующим образом:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r},$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r},$$

где $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Напишем функцию Лагранжа для данной системы:

$$L = \frac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2} + G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Если подставить выражения для радиус векторов то получим

$$L = \frac{\mu\vec{v}_1^{\,2}}{2} + G\frac{m_1 m_2}{r},$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ - приведенная масса.

Расписывая, скорость в полярных координатах и учитывая, что радиус орбиты постоянен получим

$$L = \frac{\mu\omega^2 r^2}{2} + G\frac{m_1 m_2}{r},$$

где ω - угловая скорость Подставляя данный лагранжиан в уравнение лагранжа получим

$$\mu\omega^2 r = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Отсюда мы можем выразить ω

$$\omega = \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{r^{-\frac{3}{2}}} \qquad (34)$$

Интенсивность излучения гравитационных волн заданной поляризации в телесный угол $d\Omega$ записывается в виде

$$dI = \frac{G}{72\pi c^5} \left(D^{(3)}_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \right)^2 d\Omega, \tag{35}$$

где $e_{\alpha\beta}$ - симметричный тензор поляризации, а $D_{\alpha\beta}$ - тензор квадрупольного момента масс.

Тензор квадрупольного момента масс вводиться следующим образом

$$D_{\alpha\beta} = \mu(3x^\alpha x^\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})$$

В нашем случае, когда плоскостьб движения совпадает с плоскотью xy его компоненты можно записать

$$D_{xx} = \mu r^2(3cos^2(\varphi) - 1)$$

$$D_{xy} = 3\mu r^2 cos(\varphi) sin(\varphi)$$

$$D_{yy} = \mu r^2(3sin^2(\varphi) - 1)$$

$$D_{zz} = \mu r^2$$

Рассмотрим две поляризации гравитационных волн $e_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $e_{\theta\theta} = -e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Преобразуя компоненты тензора $D_{\alpha\beta}$ в сферические координаты, вычисляя по формуле(35) и усредняя по времени получим для этих двух случаев

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{G\mu^2\omega^6 r^4}{2\pi c^5}(1 + 6cos^2(\theta) + cos^4(\theta))$$

после интегрирования по напарвлениям:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^5}$$

Поскольку $E = -G\frac{m_1 m_2}{2r}$, то скорость сближения

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^3} \tag{36}$$

Решая данное дифференциальное уравнение получим

$$r(t) = \left(r_0^4 - \frac{256 G m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5c^3} t \right)^{\frac{1}{4}}$$

Отсюда мы можем оценить время, за которое черные дыры упадут друг на друга, это произойдет, когда расстояние между телами станет равно сумме их радиусов швардшильда . Согласно (6)

$$R_{\text{ш }1} + R_{\text{ш }2} = \frac{2G(m_1 + m_2)}{c^2}$$

$$\tau = \left(r_0^4 - \left(\frac{2G(m_1 + m_2)}{c^2}\right)^4\right)\frac{5c^3}{256Gm_1m_2(m_1 + m_2)} \tag{37}$$

2.2 Случай медленно меняющейся массы

Если масса черных дыр меняется достаточно медленно то ее производные малы, и тогда можно ими принебреч , когда мы вычисляем третью производную компонент тензора квадрупольного мосента. В таком случае за основу можно взять формулу (36), но необходимо учесть одно важное обстоятельство, а именно, нам необходимо, чтобы система центра инерции оставалось инерциальной, поэтому дополнительно потребуем чтобы масса второго выражалось через массу первого следующим образом

$$m_2 = m_1\gamma = m(t)\gamma,$$

где γ - вещественное число

В качестве m(t) возьмем зависимость (26) , так как на больших временах ее производные стремятся к нулю

$$m = \frac{m_0t_0}{tt_0 - a_1m_0(t - t_0)}t$$

$$m' = \frac{a_1m_0^2t_0^2}{(a_1m_0t_0 + t(t_0 - a_1m_0))^2}$$

$$m' = \frac{2a_1m_0^2t_0^2(a_1m_0 - t_0)}{(a_1m_0t_0 + t(t0 - a_1m_0))^3}$$

Тогда дифференциальное уравнение приобретает вид:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64G^3\gamma(1+\gamma)}{5c^5r^3}\left(\frac{m_0t_0}{tt_0 - a_1m_0(t - t_0)}t\right)^3 \tag{38}$$

$$r(t) = \left(r_0^4 - \frac{64G^3\gamma(1+\gamma)}{5c^5r^3}\int_{t1}^{t}\left(\frac{m_0t_0}{tt_0 - a_1m_0(t - t_0)}t\right)^3 dt\right)^{\frac{1}{4}} \tag{39}$$

Зависимость суммы радиусов Швардшильда от времени дается следующим соотношением

$$R_{ш\Sigma} = \frac{2G(1+\gamma)}{c} \frac{m_0 t_0}{t t_0 - a_1 m_0 (t - t_0)} t \tag{40}$$

Приравнивая (39) и (40) получаем урвнение, из которго можно определить время слияния черных дыр. При этом есть ограничение на времена, которые можем мы рассматривать (27).