ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ В МОДЕЛЯХ ГРАВИТАЦИИ

Выполнил студент
443 группы
Чистяков Всеволод Всеволодович

Научный руководитель
д.ф.-м.н. профессор
Белокуров Владимир Викторович

Допущена к защите
Зав.кафедрой

Москва
2023

Содержание

1 Введение

В современной теоретической физике интерес представляют модифицированные теории гравитации [1] [2]. Одной из таких теорий является теория квадратичной гравитации [3] - теория с действием, содержащим квадратичные по кривизне инварианты наиболее общего вида. С учётом теоремы Гаусса-Бонне оно имеет вид:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \qquad \mathcal{A}_0 = \Lambda \int d^4x \sqrt{\mathcal{G}} \qquad \mathcal{A}_1 = -\frac{\kappa}{6} \int d^4x \sqrt{\mathcal{G}} R \tag{1}$$

$$\mathcal{A}_2 = \int d^4x \sqrt{\mathcal{G}} \left(c_1 R^2 + c_2 C_{\mu\nu\rho\lambda} C^{\mu\nu\rho\lambda} \right) \tag{2}$$

где $C_{\mu\nu\rho\lambda}$-тензор Вейля.Рассмотрим однородное пространство с метрикой FLRW, общий вид которой есть:

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2 \tag{3}$$

В [4] была найдена функция $g(\tau)$, инвариантная относительно группы диффеоморфизмов $Diff(R^+)$. Представляют интерес два частных случая записи метрики:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2 \qquad a(t) = g'(g^{-1}(t)) \tag{4}$$

$$ds^2 = (g'(\tau))^2(d\tau^2 - d\mathbf{x}^2) \qquad t = g(\tau) \tag{5}$$

Во втором случае, величины, входящие в действие, выражаются через g' следующим образом:

$$R = -6\frac{g'''}{(g')^3} \qquad C_{\mu\nu\rho\lambda} = 0 \qquad \sqrt{\mathcal{G}} = (g')^4 \tag{6}$$

И действие эффективно сводится к одномерному:

$$A = A_0 + A_1 + A_2 \qquad A_i = \frac{\mathcal{A}_i}{\int d^3x} \tag{7}$$

$$A_0 = \Lambda \int d\tau \left(g'(\tau)\right)^4 \tag{8}$$

$$A_1 = -\kappa \int d\tau \left[\left(g''(\tau)\right)^2 - \frac{d}{d\tau}\left(g'(\tau)g''(\tau)\right) \right] \tag{9}$$

$$A_2 = \frac{\lambda^2}{2} \int d\tau \left(\frac{g'''(\tau)}{g'(\tau)} \right)^2 \tag{10}$$

Решение классического уравнения движения при $\Lambda = 0$ есть

$$g(\tau) = \frac{\sigma\tau^2}{2} \qquad \tau(t) = \sqrt{\frac{2t}{\sigma}} \qquad a(t) = \sqrt{2\sigma t} \tag{11}$$

Рассмотрим интеграл по траекториям

$$\int F(g) e^{-A(g)} dg = \int F(g) e^{-A_0(g) - A_1(g)} e^{-A_2(g)} dg = \int F(g) e^{-A_0(g) - A_1(g)} \mu(dg) \tag{12}$$

$$\mu(dg) = e^{-A_2(g)} dg \tag{13}$$

Введём переменную $q(\tau)$

$$q = \frac{g''}{g'} \qquad \frac{g'''}{g'} = q' + q^2 \tag{14}$$

Произведём нелинейную нелокальную замену переменных:

$$p(\tau) = q(\tau) + \int_0^\tau q^2(\tau')d\tau' \qquad \frac{g'''}{g'} = p' \tag{15}$$

При помощи этой замены мера (13) преобразуется к виду меры Винера на пространстве кусочно-непрерывных функций $p(\tau)$

$$\mu(dg) = e^{-A_2(g)}dg = e^{-\int_0^\tau (p'(\tau_1))^2 d\tau_1}dg = w_{1/\lambda}(dp) \tag{16}$$

Интегралы по мере Винера от произведений функций $p(\tau)$ берутся по следующим правилам:

$$\int p(\tau)w_{1/\lambda}(dp) = 0 \qquad \int p(\tau_1)p(\tau_2)w_{1/\lambda}(dp) = \frac{1}{\lambda^2}\min(\tau_1, \tau_2) \tag{17}$$

В случае произведения большего количества сомножителей интеграл равен 0 при нечётном их числе, а при чётном может быть вычислен с помощью теоремы Вика.

Для вычисления функциональных интегралов в этой теории все величины должны быть выражены в терминах $p(\tau)$. Выразим $g(\tau)$ через $p(\tau)$. Введём функцию η следующим образом:

$$q = p - \frac{1}{\eta} \tag{18}$$

Она удовлетворяет уравнению Рикатти, которое не может быть проинтегрировано в явном виде:

$$\eta' = -(1 - p\eta)^2 \tag{19}$$

Функция $g(\tau)$ может быть явно выражена через $\eta(\tau)$ и $p(\tau)$:

$$g(\tau) = -\sigma \int_0^\tau d\bar{\tau}\eta(\bar{\tau}) \exp\left(\int_0^{\bar{\tau}} d\tau_1 p(\tau_1)\left[1 - p(\tau_1)\eta(\tau_1)\right]\right) \tag{20}$$

Поставим задачу вычисления среднего значения масштабного фактора:

$$< a(t) >= \frac{1}{Z}\int g'(g^{-1}(t)) \exp\left\{\kappa\left(\int_0^{g^{-1}(t)} (g''(\tau_1))^2 d\tau_1 - g'(g^{-1}(t))g''(g^{-1}(t))\right)\right\} w_{1/\lambda}(dp) \tag{21}$$

Введём для сокращения последующих формул обозначения:

$$r(\tau) = \int_0^\tau (g''(\tau_1))^2 d\tau_1 - g'(\tau)g''(\tau) \tag{22}$$

Тогда (21) перепишется в виде

$$< a(t) >= \frac{1}{Z}\int g'(\tau(t))e^{\kappa r(\tau(t))}w_{\frac{1}{\lambda}}(dp) \tag{23}$$

Где $\tau(t) = g^{-1}(t)$. Интеграл (21) не может быть вычислен точно. Будем вычислять его по теории возмущений, раскладывая подынтегральное выражение и нормировочный множитель

$\frac{1}{Z}$ по "степеням"функции $p(\tau)$,представим подынтегральное выражение в виде суммы однородных по $p(\tau)$ функционалов. После интегрирования по $w_{1/\lambda}(dp)$ с учётом (17) получим выражение вида:

$$< a(t) >= \sum_n \frac{\bar{a}_{2n}(t)}{\lambda^{2n}} \tag{24}$$

В [4] путём довольно громоздких вычислений был получен коэффициент $\bar{a}_2(t)$.

$$\frac{\bar{a}_2}{\lambda^2} = \int (E_1 a_1 + a_2)\, w_{1/\lambda}(dp) = \frac{\sigma}{\lambda^2}\left[-\frac{59}{63}\left(\frac{2t}{\sigma}\right)^2 + \frac{11}{120}\kappa\sigma^2\left(\frac{2t}{\sigma}\right)^{5/2}\right] \tag{25}$$

$$a_2 \sim p^2 \qquad E_1,\, a_1 \sim p \tag{26}$$

Причём a_i и E_1 возникают из разложения $g'(\tau(t))$ и $e^{\kappa r(\tau(t))}$ соответственно. Задача заключается в построении алгоритма символьных вычислений, который позволил бы проверить результат для $\bar{a}_2(t)$, а также находить члены разложения более высокого порядка.

2 Метод разложения функционального интеграла по степеням $p(\tau)$

Для удобства вычислений введём фиктивный параметр α, сделав во всех формулах, содержащих $p(\tau)$ замену.

$$p(\tau) \to \alpha p(\tau) \tag{27}$$

После чего вместо разложения всех величин в сумму однородных функционалов по p можно раскладывать эти величины в степенной ряд по α. Пусть f-какой-либо функционал, зависящий от p.

$$f[\alpha p] = \sum_n f_n[p]\alpha^n \tag{28}$$

$$\int f[\alpha p] w_{\frac{1}{\lambda}}(dp) = \sum_n \alpha^{2n} \int f_{2n}[p] w_{\frac{1}{\lambda}}(dp) = \sum_n \frac{\alpha^{2n}}{\lambda^{2n}} I_w(f_{2n}[p]) \tag{29}$$

где

$$I_w(f) = \left(\int f[p] w_{\frac{1}{\lambda}}(dp)\right)|_{\lambda=1} \tag{30}$$

в конце вычислений нужно положить $\alpha = 1$

$$\int f[p] w_{\frac{1}{\lambda}}(dp) = \sum_n \frac{1}{\lambda^{2n}} I_w(f_{2n}[p]) \tag{31}$$

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$\int f[p] w_{\frac{1}{\lambda}}(dp) = I_w(f[\alpha p])|_{\alpha=1/\lambda} \tag{32}$$

Действительно

$$I_w(f[\alpha p])|_{\alpha=1/\lambda} = I_w\left(\sum_n f_n[p]\alpha^n\right)|_{\alpha=1/\lambda} = \left(\sum_n \alpha^{2n} I_w(f_{2n}[p])\right)|_{\alpha=1/\lambda} = \sum_n \frac{1}{\lambda^{2n}} I_w(f_{2n}[p]) \tag{33}$$

После введения параметра α введённые ранее функции g τ r становятся функциями также и параметра α. $\tau(t,\alpha)$ определяется соотношением $g(\tau(t,\alpha),\alpha)=t$. Каждая из этих величин будет раскладываться в ряд:

$$g(\tau,\alpha)=\sum_k g_k(\tau)\alpha^k \qquad \tau(t,\alpha)=\sum_k \tau_{(k)}(t)\alpha^k \tag{34}$$

Введём функции

$$a(t,\alpha)=g'(\tau(t,\alpha),\alpha) \qquad \rho(t,\alpha)=r(\tau(t,\alpha),\alpha) \qquad E(t,\alpha)=e^{\kappa\rho(t,\alpha)} \tag{35}$$

Которые также подлежат разложению в ряд:

$$a(t,\alpha)=\sum_k a_k(t)\alpha^k \qquad E(t,\alpha)=\sum_k E_k(t)\alpha^k \tag{36}$$

Вопрос о разложении в ряд сложных функций вида $g'(\tau(t,\alpha),\alpha)$ будет обсуждаться в одном из следующих разделов (21) во введённых обозначениях запишется в виде:

$$<a(t)>=\frac{I_w\left(a(t,\alpha)E(t,\alpha)\right)}{I_w\left(E(t,\alpha)\right)}|_{\alpha=1/\lambda} \tag{37}$$

Получим из этой формулы в явном виде коэффициенты $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_4$ ряда (176)

$$\begin{aligned} I_w(aE)=a_0+\alpha^2\left(a_0I_w(E_2)+I_w(a_1E_1)+I_w(a_2)\right)+\\ +\alpha^4\left(I_w(a_4)+I_w(a_3E_1)+I_w(a_2E_2)+I_w(a_1E_3)+I_w(a_0E_4)\right) \end{aligned} \tag{38}$$

$$\frac{1}{I_w(E)}=\frac{1}{1+\alpha^2I_w(E_2)+\alpha^4I_w(E_4)}=1-\alpha^2I_w(E_2)+\alpha^4\left(\left[I_w(E_2)\right]^2-I_w(E_4)\right) \tag{39}$$

$$\begin{gathered} \frac{I_w(aE)}{I_w(E)}=a_0+\alpha^2\left(I_w(a_2)+I_w(a_1E_1)\right)+\\ +\alpha^4\left(I_w(E_2)\left(a_0I_w(E_2)-I_w(a_1E_1)\right)+\left(I_w(a_2E_2)-I_w(a_2)I_w(E_2)\right)+I_w(a_3E_1)+I_w(a_1E_3)+I_w(a_4)\right) \end{gathered} \tag{40}$$

Окончательно получим выражения для коэффициентов

$$\bar{a}_2=I_w(a_1E_1)+I_w(a_2) \tag{41}$$

Что полностью согласуется с (25).

$$\bar{a}_4=I_w(E_2)\left(a_0I_w(E_2)-I_w(a_1E_1)\right)+\left(I_w(a_2E_2)-I_w(a_2)I_w(E_2)\right)+I_w(a_3E_1)+I_w(a_1E_3)+I_w(a_4) \tag{42}$$

3 Выражение $g(\tau)$ через $p(\tau)$ по теории возмущений

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$y' = F(y, x, f(x)) \tag{43}$$

в котором правая часть зависит от функции $f(x)$. Тогда решение этого уравнения $y(x)$ будет также зависеть от функции $f(x)$. Пусть функция f испытывает приращение $\tilde{f}(x) = f(x) + \alpha p(x)$. Рассмотрим возмущённое уравнение

$$\tilde{y}' = F(\tilde{y}, x, \tilde{f}(x)) \tag{44}$$

Если функция $F(\tilde{y}, x, f + \alpha p)$ аналитически зависит от $\tilde{y}$ и α и непрерывна по x, тогда $\tilde{y}(x, \alpha)$ будет также аналитически зависеть от α (по теореме Пуанкаре)

$$\tilde{y}(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x)\alpha^k \tag{45}$$

Коэффициенты $y_k(x)$ могут быть найдены подстановкой ряда (45) в уравнение (44), причём $y_0(x)$-решение невозмущённого уравнения (43), а $y_k(x)$ однородно зависят от p со степенью однородности k.

Найдём в явном виде коэффициенты ряда (45) для следующего дифференциального уравнения относительно фуекции $\eta(\tau)$:

$$\eta' = -(\alpha p \eta - 1)^2 \tag{46}$$

Запишем данное уравнение в виде

$$W(\eta, \alpha) = 0 \qquad W(\eta, \alpha) = \eta' + 1 - 2\alpha p \eta + \alpha^2 p^2 \eta^2 \tag{47}$$

Подставим разложение:

$$\eta(\tau, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \alpha^k \qquad \eta^2(\alpha, \tau) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \eta_s \eta_m \alpha^{s+m} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{k} \eta_s \eta_{k-s}\right)\alpha^k \tag{48}$$

$$W(\tau, \alpha) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\eta_k'\alpha^k - 2p\eta_k\alpha^{k+1} + p^2\left(\sum_{s=0}^{k}\eta_s\eta_{k-s}\right)\alpha^{k+2}\right] = (1 + \eta_0') + (\eta_1' - 2p\eta_0)\alpha + \tag{49}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\eta_{k+2}' - 2p\eta_{k+1} + p^2\left(\sum_{s=0}^{k}\eta_s\eta_{k-s}\right)\right]\alpha^{k+2} \tag{50}$$

Приравняем к 0 коэфициенты при различных степенях α:

$$\eta_0' = -1 \qquad \eta_1' = 2p\eta_0 \qquad \eta_{k+2}' = 2p\eta_{k+1} - p^2\left(\sum_{s=0}^{k}\eta_s\eta_{k-s}\right) \tag{51}$$

Первые три коэффициента имеют вид (при условии $\eta(0) = 0$):

$$\eta_0 = -\tau \tag{52}$$

$$\eta_1 = -2\int_0^\tau d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \tag{53}$$

$$\eta_2 = -4\int_0^\tau d\tau_1 p(\tau_1)\left(\int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)\right) - \int_0^\tau d\tau_1 \tau_1^2 p^2(\tau_1) \tag{54}$$

$g(\tau)$ следует выразить через $\eta(\tau)$ в соответствии с формулой (20).

$$g(\tau) = -\sigma\int_0^\tau d\tau_1 \eta(\tau_1)\exp\left(\int_0^{\tau_1} d\tau_2 \alpha p(\tau_2)\left[1-\alpha p(\tau_2)\eta(\tau_2)\right]\right) \tag{55}$$

Можно раскладывать это выражение напрямую в ряд по степеням α, однако имеет смысл также построить рекуррентную процедуру получения коэффициентов разложения. Обозначим

$$\varepsilon(\tau) = \exp\left(\int_0^{\tau_1} d\tau_2 \alpha p(\tau_2)\left[1-\alpha p(\tau_2)\eta(\tau_2)\right]\right) \tag{56}$$

ε удовлетворяет дифференциальному уравнению, аналогичному (46)

$$\varepsilon' = \alpha p(1-\alpha p\eta)\varepsilon \tag{57}$$

Формула 55 приобретает простой вид:

$$g(\tau) = -\sigma\int_0^\tau d\tau_1 \eta(\tau_1)\varepsilon(\tau_1) \tag{58}$$

Аналогично тому, как это было сделано для уравнения 46, можно искать решение уравнения 57 в виде ряда:

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \alpha^n \tag{59}$$

Рекуррентные соотношения на коэффициенты:

$$\varepsilon_0' = 0 \qquad \varepsilon_1' = p\varepsilon_0 \quad \varepsilon_{n+2} = p\varepsilon_{n+1} - p^2\sum_{k=0}^{n} \eta_{n-k}\varepsilon_k \tag{60}$$

Первые три коэффициента (при условии $\varepsilon(0) = 1$)

$$\varepsilon_0 = 1 \tag{61}$$

$$\varepsilon_1 = \int_0^\tau d\tau_1 p(\tau_1) \tag{62}$$

$$\varepsilon_2 = \int_0^\tau d\tau_1 p(\tau_1)\int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) + \int_0^\tau d\tau_1 \tau_1 p^2(\tau_1) \tag{63}$$

4 Разложение в ряд композиции функций

В вычислениях присутствуют сложные функции $g'(\tau(t,\alpha),\alpha)$, $r(\tau(t,\alpha),\alpha)$, причём $\tau(t,\alpha)$ определяется уравнением $g(\tau(t,\alpha),\alpha)$. Поэтому представляет интерес рассмотреть композицию произвольных функций, зависящих от параметра α.

$$h(t,\alpha) = f(\tau(t,\alpha),\alpha) \tag{64}$$

Поставим следующую задачу:

Пусть известны разложения функций

$$f(\tau,\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(\tau)\alpha^k \qquad \tau(t,\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\tau_k(t)\alpha^k \tag{65}$$

И каждая из функций $f_k(\tau)$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки $\tau_0(t)$

$$f_k(\tau)=\sum_{s=0}^{\infty}f_{ks}(\tau-\tau_0)^s \qquad f_{ks}(t)=\frac{1}{s!}\frac{d^sf}{d\tau^s}|_{\tau=\tau_0(t)} \tag{66}$$

Требуется вычислить коэффициенты $h_k(t)$ разложения:

$$h(t,\alpha)=f(\tau(t,\alpha),\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k(t)\alpha^k \tag{67}$$

Введём коэффициенты $T_m^{(s)}$:

$$(\tau-\tau_0)^s=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\alpha^k\right)^s=\sum_{m=0}^{\infty}T_m^{(s)}\alpha^m \tag{68}$$

Справедливы следующие свойства:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\alpha^k\right)^s=\alpha^s\left(\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k+1}\alpha^k\right)^s\Longrightarrow T_m^{(s)}=0 \quad m<s \tag{69}$$

$$(\tau-\tau_0)^s=(\tau-\tau_0)(\tau-\tau_0)^{s-1}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\tau_qT_r^{(s-1)}\alpha^{r+q}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{r=s-1}^{m-1}T_r^{(s-1)}\tau_{m-r}\right)\alpha^m\Longrightarrow \tag{70}$$

$$\Longrightarrow T_m^{(s)}=\sum_{r=s-1}^{m-1}T_r^{(s-1)}\tau_{m-r} \tag{71}$$

$$T_m^{(0)}=\delta_m^0 \quad T_m^{(1)}=\tau_m \tag{72}$$

Таким образом, коэффициенты $T_m^{(s)}$ могут быть найдены рекуррентно

$$f_k(\tau(t,\alpha))=\sum_{s=0}^{\infty}f_{ks}\sum_{m=1}^{\infty}T_m^{(s)}\alpha^m=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{\infty}f_{ks}T_m^{(s)}\right)\alpha^m \tag{73}$$

в силу (69)

$$M_{km}=\sum_{s=0}^{\infty}f_{ks}T_m^{(s)}=\sum_{s=0}^{m}f_{ks}T_m^{(s)} \tag{74}$$

$$f_k(\tau(t,\alpha))=\sum_{m=0}^{\infty}M_{km}\alpha^m \tag{75}$$

$$f(\tau(t,\alpha),\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}M_{km}\alpha^m\right)\alpha^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}M_{km}\alpha^{m+k} \tag{76}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} M_{km}\alpha^{m+k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} M_{k,n-k}\alpha^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} M_{k,n-k}\alpha^{n} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} M_{l,k-l}\right)\alpha^{k} \tag{77}$$

$$f(\tau(t,\alpha),\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} M_{l,k-l}\right)\alpha^{k} \tag{78}$$

$$h_k(t) = \sum_{l=0}^{k-1} M_{l,k-l} = \sum_{l=0}^{k}\sum_{s=0}^{k-l} f_{ls}T_{k-l}^{(s)} \tag{79}$$

Формула (79) решает поставленную задачу

Частные случаи:

$$h_0 = f_0(\tau_0(t)) \qquad h_1 = f_{00}T_1^0 + f_{01}T_1^1 + f_{10}T_0^0 = f_0'(\tau_0(t))\tau_1(t) + f_1(\tau_0) \tag{80}$$

Формула (79) может также быть использована для нахождения $\tau(t,\alpha)$. Если положить $f = g$, $h = t$, то $h_0 = t$, $h_{k>0} = 0$, то (79) станет системой уравнений относительно коэффициентов τ_k. .

$$t = g_0(\tau_0(t)) \Longrightarrow \tau_0(t) = g_0^{-1}(t) \qquad h_1 = 0 \Longrightarrow \tau_1(t) = -\frac{g_1(\tau_0(t))}{g_0'(\tau_0(t))} = -\frac{g_{10}}{g_{01}} \tag{81}$$

$$0 = h_2 = g_{20} + g_{01}\tau_2 + g_{11}\tau_1 + g_{02}\tau_1^2 = 0 \tag{82}$$

$$\tau_2 = -\frac{g_{20}}{g_{01}} + \frac{g_{11}g_{10}}{g_{01}^2} - \frac{g_{02}g_{10}^2}{g_{01}^3} \tag{83}$$

5 Процедура получения явного вида коэффициентов разложения среднего масштабного фактора

Сформулируем порядок действий необходимый для получения коэффициентов $\bar{a}_{2n}$

1) С помощью уравнений (51) и (60) найти достаточное число коэффициентов η_n ε_n

2) Пользуясь формулой (58) найти коэффициенты $g_k(\tau)$

3) Дифференцируя g_k вычислить коэффициенты

$$g_{ks}(t) = \frac{1}{s!}\frac{d^s g_k(\tau)}{d\tau_k}|_{\tau=\beta(t)} \qquad \beta(t) = g_0^{-1}(t) = \sqrt{\frac{2t}{\sigma}} \tag{84}$$

Отметим, что с использованием соотношений (51) и (60) g_{ks} могут быть выражены через ε_n, η_n, $p(\beta)$, $p'(\beta)$ и производные от p более высокого порядка

5)По коэффициентам g_{ks} найти коэффициенты $r_k s$

4) Пользуясь соотношением (79), и полагая в нём $h_0 = t$ $h_{k>0} = 0$, $f = g$ найти τ_k

5)Используя (79) найти коэффициенты разложения функций $\rho(t,\alpha)$ $a(t,\alpha)$

6)Зная коэффициенты ρ_s найти коэффициенты E_n из соотношения

$$E_n = \frac{\kappa}{n} \sum_{s=1}^{n} s\rho_s E_{n-s} \tag{85}$$

7)Вычислить $I_w(aE)$, $I_w(E)$

Ниже в качестве примера проведём вычисления по описанной схеме

6 Второй порядок

$$g_1(\tau) = -\sigma \int_0^\tau d\tau_1 \left(\eta_0\varepsilon_1 + \eta_1\varepsilon_0\right) = \sigma \left(\int_0^\tau d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) + 2\int_0^\tau d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \right) \tag{86}$$

Представим это выражение в форме, не содержащей повторных интегралов. Путём интегрирования по частям (подробнее об этом сказано в дополнении) получим:

$$\frac{g_1(\tau)}{\sigma} = \frac{\tau^2}{2} \int_0^\tau d\tau_1 p(\tau_1) + 2\tau \int_0^\tau d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) - \frac{5}{2} \int_0^\tau d\tau_1 \tau_1^2 p(\tau_1) \tag{87}$$

$$g_{10}(t) = g_1(\beta) \qquad g_{11}(t) = \sigma \left(\beta \int_0^\beta d\tau_2 p(\tau_2) + 2\int_0^\beta d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \right) \tag{88}$$

$$g_{12}(t) = \frac{\sigma}{2} \left(3\beta p(\beta) + \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \right) \tag{89}$$

$$g_2(\tau) = -\sigma \int_0^\tau d\tau_1 \left(\eta_0\varepsilon_2 + \eta_1\varepsilon_1 + \eta_2\varepsilon_0\right) = \tag{90}$$

$$= \int_0^\tau d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_2} d\tau_3 p(\tau_3) + \int_0^\tau d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p^2(\tau_2) + \tag{91}$$

$$+2\int_0^\tau d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_1} d\tau_3 \tau_3 p(\tau_3) + 4\int_0^\tau d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_2} d\tau_3 \tau_3 p(\tau_3) + \int_0^\tau d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2^2 p^2(\tau_2) \tag{92}$$

$$g_{21} = \beta \left(\int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^{\tau_2} d\tau_2 p(\tau_2) + \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p^2(\tau_1) \right) + \tag{93}$$

$$+2\int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) + 4\int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) + \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1^2 p^2(\tau_1) \tag{94}$$

$$\tau_{(1)} = -\frac{g_{10}(t)}{g_{01}(t)} = -\beta^{-1}\frac{g_{10}}{\sigma} = -\beta^{-1} \left(\int_0^\tau d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) + 2\int_0^\tau d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \tau_2 p(\tau_2) \right) \tag{95}$$

$$\tau_{(2)} = -\beta^{-1}\frac{g_{20}}{\sigma} + \beta^{-2}\frac{g_{11}g_{10}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\beta^{-3}\frac{g_{10}^2}{\sigma^2} \tag{96}$$

$$\tau_{(2)} = -\beta^{-1} \left(\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_2} d\tau_3 p(\tau_3) + \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p^2(\tau_2) + \right. \tag{97}$$

$$+2\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_1} d\tau_3 p(\tau_3) + 4\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_2} d\tau_3 p(\tau_3) \tag{98}$$

$$+\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2^2 p^(\tau_2) - \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_3 p(\tau_3) - 2\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_3 p(\tau_3)\Big) + \tag{99}$$

$$+2\beta^{-2}\left(\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_3 p(\tau_3) + 2\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_3 p(\tau_3)\right) - \tag{100}$$

$$-\beta^{-3}\left(\frac{1}{2}\left[\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)\right]^2 + 2\left[\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)\right]^2 + \right. \tag{101}$$

$$\left. + 2\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_2} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_3 \int_0^{\tau_3} d\tau_4 \tau_4 p(\tau_4)\right) \tag{102}$$

$$a_1(t) = g_{11} + 2g_{02}\tau_{(1)} = g_{11} - \beta^{-1} g_{10} = \sigma\left(\beta \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) + 2\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) - \right. \tag{103}$$

$$\left. - 2\beta^{-1}\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) - \beta^{-1}\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)\right) \tag{104}$$

$$a_2 = g_{21} + 2\tau_{(2)} g_{02} + 2\tau_{(1)} g_{12} + 3\tau_{(1)}^2 g_{03} = g_{21} - \frac{2g_{12}g_{10}}{g_{10}} - \frac{2g_{02}g_{20}}{g_{01}} + \frac{2g_{02}g_{11}g_{10}}{g_{01}^2} - \frac{2g_{02}^2 g_{10}^2}{g_{01}^3} = \tag{105}$$

$$= g_{21} + \sigma\tau_2 + 2\tau_{(1)} g_{12} = g_{21} - 2\beta^{-1}\frac{g_{12}g_{10}}{\sigma} - \beta^{-1} g_{20} + \beta^{-2}\frac{g_{11}g_{10}}{\sigma} - \frac{1}{2}\beta^{-3}\frac{g_{10}^2}{\sigma} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}
a_2 = \beta &\left(\int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) + \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p^2(\tau_1)\right) + 2\int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) + \\
&+ 4\int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) + \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1^2 p^2(\tau_1) - 6p(\beta)\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) - \\
&- 3p(\beta)\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) - \beta^{-1}\left(\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_2} d\tau_3 p(\tau_3) + \right. \\
&+ \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p^2(\tau_2) + 2\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} p(\tau_2) \int_0^{\tau_1} + 4\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} p(\tau_2) \int_0^{\tau_2} d\tau_3 p(\tau_3) + \\
&\left. + \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2^2 p^2(\tau_2)\right) + 2\beta^{-2}\left(\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_3 p(\tau_3) + \right. \\
&\left. + 2\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_3 p(\tau_3)\right) - \beta^{-3}\left(\frac{1}{2}\left[\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)\right]^2 + \right. \\
&\left. + 2\left[\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)\right]^2 + \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_3 \int_0^{\tau_4} d\tau_4 p(\tau_4)\right)
\end{aligned} \tag{107}$$

$$r_0 = 0 \qquad r_1 = 2\int_0^\tau d\tau_1 g_0^{''}(\tau_1) g_1^{''}(\tau_1) - g_0^{'}(\tau) g_1^{''}(\tau) - g_1^{'}(\tau) g_0^{''}(\tau) = \tag{108}$$

$$= 2g_0^{''}(\tau) g_1^{'}(\tau) - g_0^{'}(\tau) g_1^{''}(\tau) - g_1^{'}(\tau) g_0^{''}(\tau) = g_0^{''}(\tau) g_1^{'}(\tau) - g_0^{'}(\tau) g_1^{''}(\tau) \tag{109}$$

$$r_{10} = 2\left(g_{02}g_{11} - g_{01}g_{12}\right) = \sigma^2\left(2\int_0^\beta d\tau_1\tau_1 p(\tau_1) - 3\beta^2 p(\beta)\right) \tag{110}$$

$$\rho_1 = r_{10} + r_{01}\tau_{(1)} = r_{10} \qquad E_1 = \kappa\rho_1 = \kappa r_{10} \tag{111}$$

$$E_1 = \kappa\sigma^2\left(2\int_0^\beta d\tau_1\tau_1 p(\tau_1) - 3\beta^2 p(\beta)\right) \tag{112}$$

7 Четвёртый порядок

Приведём здесь ещё раз выражение для коэффициента $\bar{a}_4$

$$\bar{a}_4 = I_w(E_2)\left(a_0 I_w(E_2) - I_w(a_1E_1)\right) + \left(I_w(a_2E_2) - I_w(a_2)I_w(E_2)\right) + I_w(a_3E_1) + I_w(a_1E_3) + I_w(a_4) \tag{113}$$

Сделаем несколько замечаний по поводу входящих в эту формулу величин

$I_w(a_1E_1)$, $I_w(a_2)$-входят также в формулу для $\bar{a}_2$, винеровский интеграл берётся от функционалов второго порядка.

$I_w(E_2)$-винеровский интеграл берётся от функционала второго порядка, но при вычислении $\bar{a}_2$ не встречался

$I_w(a_2E_2)$,$I_w(a_3E_1)$, $I_w(a_1E_3)$, $I_w(a_4)$-винеровский интеграл берётся от функционалов четвёртого порядка.

Проще всего поддаётся вычислению $I_w(E_2)$

$$E_2 = \kappa\rho_2 + \frac{\kappa^2}{2}\rho_1^2 \tag{114}$$

$$\rho_2 = r_{20} + r_{11}\tau_1 \tag{115}$$

$$r_{11} = 4\eta_0 p(\beta) - 3\eta_0^2 p'(\beta) = -4\beta p(\beta) - 3\beta^2 p'(\beta) \tag{116}$$

$$r_{20} = 4\int_0^\beta g_{12}^2 d\tau_1 + 2\left(-g_{11}g_{12} + g_{02}g_{21} - g_{01}g_{22}\right) \tag{117}$$

$$r_{20} = 9\int_0^\beta \tau^2p^2 d\tau + \int_0^\beta \varepsilon_1^2 d\tau_1 + 6\int_0^\beta \tau\varepsilon_1 p d\tau - \eta_2 - \beta\varepsilon_1^2 - 6\beta^2\varepsilon_1 p + 6\beta\eta_1 p + 2\beta^3p^2 \tag{118}$$

Из формулы (116) видно, что ρ_2 будет содержать производные от p. Они, однако, не дадут вклада в $I_w(E_2)$. Действительно, $\tau_1 r_{11}$ содержит только слагаемые с производными вида

$$p'(\beta)\int_0^\beta d\tau\tau^k p(\tau) \tag{119}$$

Что при взятии I_w даст 0, поскольку

$$I_w(p'(\beta)p(\tau)) = \frac{d}{d\beta}\min(\beta,\tau) = \frac{d}{d\beta}\tau = 0 \tag{120}$$

Отметим, что при вычислении $I_w(a_2E_2)$ возникнут слагаемые вида $I_w(p'(\beta)p(\beta))$, которые не равны 0, так как:

$$I_w(p'(\beta)p(\beta)) = I_w\left(\frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}p^2(\beta)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}I_w(p^2(\beta)) = \frac{1}{2} \tag{121}$$

Приведём здесь выражения a_4 и a_3 через коэффициенты g_{ks}. Получить вручную эти формулы, которые возникли уже в четвёртом порядке теории возмущений довольно трудно. Формулы, приведённые ниже, были получены с помощью программы на языке python с использованием библиотеки символьных вычислений sympy.

$$a_3 = g_{31} - \frac{2g_{02}}{g_{01}} g_{30} - \frac{2g_{10}}{g_{01}} g_{22} - \frac{2g_{12}}{g_{01}} g_{20} + \frac{2g_{02}}{g_{01}^2} g_{10} g_{21} + \frac{2g_{02}}{g_{01}^2} g_{11} g_{20} + \frac{6g_{03}}{g_{01}^2} g_{10} g_{20} + \frac{3g_{13}}{g_{01}^2} g_{10}^2 + \frac{2g_{10}}{g_{01}^2} g_{11} g_{12} - \\ - \frac{4g_{10}}{g_{01}^3} g_{02}^2 g_{20} - \frac{4g_{02}}{g_{01}^3} g_{10}^2 g_{12} - \frac{2g_{02}}{g_{01}^3} g_{10} g_{11}^2 - \frac{6g_{03}}{g_{01}^3} g_{10}^2 g_{11} - \frac{4g_{04}}{g_{01}^3} g_{10}^3 + \frac{6g_{11}}{g_{01}^4} g_{02}^2 g_{10}^2 + \frac{8g_{02}}{g_{01}^4} g_{03} g_{10}^3 - \frac{4g_{02}^3}{g_{01}^5} g_{10}^3 \tag{122}$$

$$a_4 = g_{41} - \frac{2g_{02}}{g_{01}} g_{40} - \frac{2g_{10}}{g_{01}} g_{32} - \frac{2g_{12}}{g_{01}} g_{30} - \frac{2g_{20}}{g_{01}} g_{22} + \frac{2g_{02}}{g_{01}^2} g_{10} g_{31} + \frac{2g_{02}}{g_{01}^2} g_{11} g_{30} + \frac{2g_{02}}{g_{01}^2} g_{20} g_{21} + \frac{6g_{03}}{g_{01}^2} g_{10} g_{30} + \\ + \frac{3g_{03}}{g_{01}^2} g_{20}^2 + \frac{3g_{23}}{g_{01}^2} g_{10}^2 + \frac{2g_{10}}{g_{01}^2} g_{11} g_{22} + \frac{2g_{10}}{g_{01}^2} g_{12} g_{21} + \frac{6g_{10}}{g_{01}^2} g_{13} g_{20} + \frac{2g_{11}}{g_{01}^2} g_{12} g_{20} - \frac{4g_{10}}{g_{01}^3} g_{02}^2 g_{30} - \frac{2g_{02}^2}{g_{01}^3} g_{20}^2 - \\ - \frac{4g_{02}}{g_{01}^3} g_{10}^2 g_{22} - \frac{4g_{02}}{g_{01}^3} g_{10} g_{11} g_{21} - \frac{8g_{02}}{g_{01}^3} g_{10} g_{12} g_{20} - \frac{2g_{02}}{g_{01}^3} g_{11}^2 g_{20} - \frac{6g_{03}}{g_{01}^3} g_{10}^2 g_{21} - \frac{12g_{03}}{g_{01}^3} g_{10} g_{11} g_{20} - \frac{12g_{04}}{g_{01}^3} g_{10}^2 g_{20} - \\ - \frac{4g_{14}}{g_{01}^3} g_{10}^3 - \frac{6g_{11}}{g_{01}^3} g_{10}^2 g_{13} - \frac{2g_{10}^2}{g_{01}^3} g_{12}^2 - \frac{2g_{10}}{g_{01}^3} g_{11}^2 g_{12} + \frac{6g_{21}}{g_{01}^4} g_{02}^2 g_{10}^2 + \frac{12g_{10}}{g_{01}^4} g_{02}^2 g_{11} g_{20} + \frac{24g_{02}}{g_{01}^4} g_{03} g_{10}^2 g_{20} + \frac{8g_{02}}{g_{01}^4} g_{10}^3 g_{13} + \\ + \frac{12g_{02}}{g_{01}^4} g_{10}^2 g_{11} g_{12} + \frac{2g_{02}}{g_{01}^4} g_{10} g_{11}^3 + \frac{8g_{03}}{g_{01}^4} g_{10}^3 g_{12} + \frac{9g_{03}}{g_{01}^4} g_{10}^2 g_{11}^2 + \frac{12g_{04}}{g_{01}^4} g_{10}^3 g_{11} + \frac{5g_{05}}{g_{01}^4} g_{10}^4 - \frac{12g_{20}}{g_{01}^5} g_{02}^3 g_{10}^2 - \\ - \frac{12g_{12}}{g_{01}^5} g_{02}^2 g_{10}^3 - \frac{12g_{02}^2}{g_{01}^5} g_{10}^2 g_{11}^2 - \frac{32g_{02}}{g_{01}^5} g_{03} g_{10}^3 g_{11} - \frac{14g_{02}}{g_{01}^5} g_{04} g_{10}^4 - \frac{6g_{03}^2}{g_{01}^5} g_{10}^4 + \frac{20g_{11}}{g_{01}^6} g_{02}^3 g_{10}^3 + \frac{25g_{03}}{g_{01}^6} g_{02}^2 g_{10}^4 - \\ - \frac{10g_{02}^4}{g_{01}^7} g_{10}^4 \tag{123}$$

8 Зависимость показателя степени от порядка

Для многих встречающихся функционалов винеровский интеграл от них выражается в виде степенной функции

$$I_w(f_n) = C\beta^{d_n^f} \tag{124}$$

C-некоторая константа, n-степень однородности функционала по p. Такими являются, в частности, функционалы η_n, ε_n, g_n, a_n, ρ_n. Выясним, каким образом зависит показатель степени d_n^f от n. Для этого подставим в уравнение

$$\eta'_{n+2} = 2p\eta_{n+1} - p^2 \left(\sum_{s=0}^{n} \eta_s \eta_{n-s} \right) \tag{125}$$

η_n в виде $\eta_n = C\beta^{d_n^\eta}$. Получим систему уравнений:

$$d_n^\eta - 1 = d_{n-1}^\eta + \frac{1}{2} = d_{n-2-s}^\eta + d_s^\eta + 1 \tag{126}$$

Поскольку $I_w\left(p(\tau_1)p(\tau_2)\right) = \min(\tau_1, \tau_2)$ необходимо формально положить $p \sim \beta^{1/2}$. С учётом $\eta_0 = -\beta$ находим

$$d_n^\eta = 1 + \frac{3}{2}n \tag{127}$$

аналогично из уравнения

$$\varepsilon_{n+2} = p\varepsilon_{n+1} - p^2 \sum_{k=0}^{n} \eta_{n-k}\varepsilon_k \tag{128}$$

и условия $\varepsilon_0 = 1$ получим

$$d_n^\varepsilon = \frac{3}{2}n \tag{129}$$

Далее, так как $g' = -\sigma\eta\varepsilon$ и $a(t) = g'(g^{-1}(t))$

$$d_n^g = 2 + \frac{3}{2}n \qquad d_n^a = 1 + \frac{3}{2}n \tag{130}$$

Из соотношения

$$r(\tau) = \int_0^\tau (g''(\tau_1))^2 d\tau_1 - g'(\tau)g''(\tau) \tag{131}$$

находим

$$d_n^r = d_n^\rho = 1 + \frac{3}{2}n \tag{132}$$

$I_w(E_n)$ степенной функцией уже не является, но в силу

$$E_n = \frac{\kappa}{n}\sum_{s=1}^{n} s\rho_s E_{n-s} \tag{133}$$

E_n можно представить в виде:

$$E_n = \sum_{m=1}^{n} \epsilon_{nm}\kappa^m \tag{134}$$

Где $I_w(\epsilon_{nm})$ уже будут степенной функцией β

$$d_{nm}^\epsilon = m + \frac{3}{2}n \tag{135}$$

В частности

$$I_w(a_1E_1) = c\kappa\beta^5 \qquad I_w(a_2) = c\beta^4 \qquad I_w(E_2) = c_1\kappa\beta^4 + c_2\kappa^2\beta^5 \tag{136}$$

$$I_w(a_2E_2) = c_1\kappa\beta^8 + c_2\kappa^2\beta^9 \qquad I_w(a_4) = c\beta^7 \qquad I_w(a_1E_3) = c_1\kappa\beta^8 + c_2\kappa^2\beta^9 + c_3\kappa^3\beta^{10} \tag{137}$$

$$I_w(a_3E_1) = c\beta^8 \tag{138}$$

9 Автоматизация вычислений

Вычисляемые величины имеют вид многочленов $f = \sum_{n=0}^\infty f_n\alpha^n$ коэффициенты которых являются функионалами, а если точнее, отображениями $f_n : C \times C \times ... \times C \to \tilde{C}$ из $n-$ой декартовой степени пространства непрерывных функций в множество кусочно-непрерывных функций $\tilde{C}$. Вычисление винеровского интеграла является отображением $I_w : f_n \to \tilde{C}$ из множества функционалов описанного выше типа в пространство кусочно-непрерывных функций. Задача компьютерного вычисления поправок произвольного порядка $\sim p^n$ сводится к двум подзадачам:

1) выбор подходящей структуры данных для выполнения операций с f_n
2) построение алгоритма вычисления $I_w(f_n)$

9.1 Построение структуры данных

На множестве функционалов f_n определены следующие операции:
1) сложение
2) умножение на число
3) умножение на переменную в произвольной степени β^k
4) умножение двух функционалов
5) интегрирование

Каждому функционалу можно сопоставить дерево с ориентированными рёбрами.Вершину, в которую не входит ни одно ребро будем называть листом, а вершину, из которой не исходит ни одного ребра будем называть корнем. У всех деревьев, рассматриваемых в дальнейшем имеется лишь один корень, а количество листьев n совпадает с со степенью p^n.Дерево строится по следующим правилам. Функции $p(\tau)$ сопоставляется вершина с весом 0

$$p(\tau) \backsimeq 0 \tag{139}$$

выражению вида $\tau^k p(\tau)$ сопоставляется вершина с весом k

$$\tau^k p(\tau) \backsimeq k \tag{140}$$

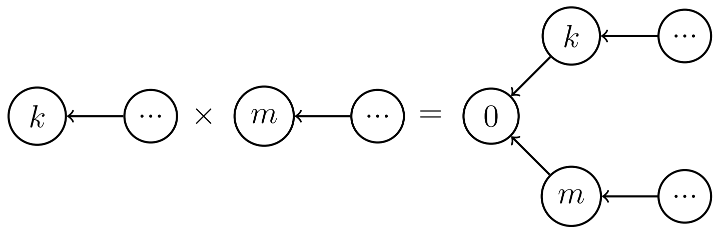
Каждое интегрирование соответствует ребру, ведущему в новую вершину

$$\tau^{k_2} \int_0^{\tau} d\tau_1 \tau_1^{k_1} p(\tau_1) \backsimeq k_2 \longleftarrow k_1 \tag{141}$$

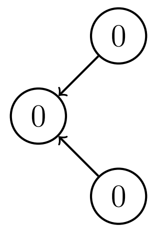
В самом общем случае функционала первого порядка

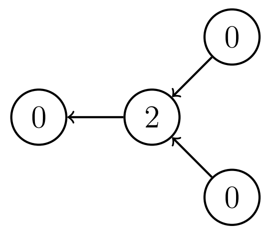
$$\tau^{k_s} \int_0^{\tau} d\tau_{s-1} \tau_{s-1}^{k_{s-1}} \int_0^{\tau_{s-1}} ... \tau_2^{k_2} \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \tau_1^{k_1} p(\tau_1) \backsimeq k_s \longleftarrow k_{s-1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow k_2 \longleftarrow k_1 \tag{142}$$

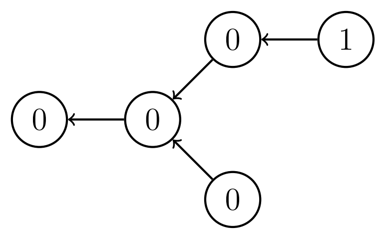
Функционалы более высокого порядка строятся как произведения функционалов первого порядка. Определим операцию произведения деревьев. Пусть $\cdots$ обозначает всю совокупность вершин деревьев кроме корня, тогда

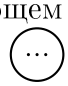

(143)

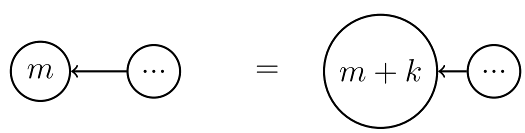
Например

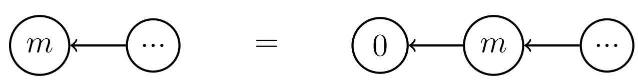
$p^2(\tau) \backsimeq$ 
(144)

$\int_0^\tau d\tau_1 \tau_1^2 p^2(\tau_1) \backsimeq$ 
(145)

$\int_0^\tau d\tau_1 p(\tau_1) \left(\int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)\right) \backsimeq$ 
(146)

сформулируем в общем виде правила интегрирования и умножения дерева на переменную в некоторой степени.  также обозначает всю совокупность вершин дерева кроме корня

$\tau^k \times$ 
(147)

int: 
(148)

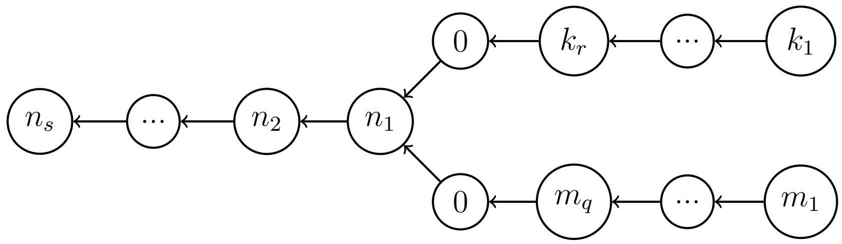
Осталось определить операции сложения, умножения на число и дифференцирования деревьев. Пусть T_i-деревья c_i-произвольные коэффициенты. Линейную комбинацию $c_1 T_1 + ... + c_n T_n$ будем записывать в виде формальной пары наборов: $([c_1 ... c_n], [T_1 ... T_n])$ такие наборы можно складывать и умножать на числа

$$\lambda_1 \left([c_1 ... c_n], [T_1 ... T_n]\right) + \lambda_2 ([\tilde{c}_1 ... \tilde{c}_m], [\tilde{T}_1 ... \tilde{T}_m]) = ([\lambda_1 c_1, ..., \lambda_1 c_n, \lambda_2 \tilde{c}_1, ..., \lambda_2 \tilde{c}_m], [T_1, ..., T_n, \tilde{T}_1, ..., \tilde{T}_m]) \quad (149)$$

Определённые выше операции интегрирования, умножения на τ^k и умножения двух деревьев распространяются на такие наборы по линейности интегрирования и дистрибутивности умножения.

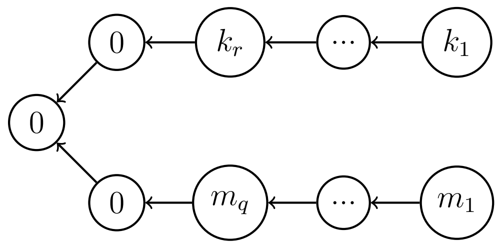
9.2 Алгоритм вычисления I_w для функционалов второго порядка

определим $I_w(f)$ для функционалов второго порядка. Наиболее общий функционал второго порядка изображается в виде



(150)

Для вычисления I_w используется правило:$I_w\left(p(\tau_1)p(\tau_2)\right) = \min(\tau_1, \tau_2)$. Сначала рассмотрим функционал вида:



(151)

$$J(\tau) = I_w(f) = \int_0^{\tau} d\xi_r \xi_r^{k_r} \int_0^{\tau} d\eta_q \eta_q^{m_q} ... \int_0^{\xi_2} d\xi_1 \xi_1^{k_1} \int_0^{\eta_2} d\eta_1 \eta_1^{m_1} \min(\xi_1, \eta_1) \tag{152}$$

из соображений размерности можно найти вид $J(\tau)$:

$$J(\tau) = b(k_r, ..., k_1 | m_q, ..., m_1) \tau^{\sum_{l=1}^{r} k_l + \sum_{l=1}^{q} m_l + r + q + 1} \tag{153}$$

дифференцируя (152) по τ получим:

$$J'(\tau) = \left(b(k_{r-1}, ..., k_1 | m_q, ..., m_1) + b(k_r, ..., k_1 | m_{q-1}, ..., m_1)\right) \tau^{\sum_{l=1}^{r} k_l + \sum_{l=1}^{q} m_l + r + q} \tag{154}$$

что даёт рекуррентное соотношение на b:

$$b(k_r, ..., k_1 | m_q, ..., m_1) = \frac{b(k_{r-1}, ..., k_1 | m_q, ..., m_1) + b(k_r, ..., k_1 | m_{q-1}, ..., m_1)}{\sum_{l=1}^{r} k_l + \sum_{l=1}^{q} m_l + r + q + 1} \tag{155}$$

так как $I_w(p^2(\tau)) = \tau$, "начальное условие"для b есть

$$b(\,|\,) = 1 \tag{156}$$

И b может быть вычислено при любом наборе аргументов. В самом общем случае (150) I_w вычисляется следующим образом:

$$I_w(f) = \beta^{n_s} \int_0^{\beta} d\chi_{s-1} \chi_{s-1}^{n_{s-1}} ... \int_0^{\chi_3} d\chi_2 \chi_2^{n_2} \int_0^{\chi_2} d\chi_1 b(k_r, ..., k_1 | m_q, ..., m_1) \chi_1^{\sum_{l=1}^{r} k_l + \sum_{l=1}^{q} m_l + r + q + 1 + n_1} = \tag{157}$$

$$= b(k_r, ..., k_1 | m_q, ..., m_1) \left(\prod_{j=1}^{s-1} \frac{1}{S' + j + \sum_{l=1}^{j} n_l} \right) \beta^{\sum_{l=1}^{s} n_l + \sum_{l=1}^{r} k_l + \sum_{l=1}^{q} m_l + r + q + s} \tag{158}$$

$$S' = \sum_{l=1}^{r} k_l + \sum_{l=1}^{q} m_l + r + q + 1 \tag{159}$$

9.3 Алгоритм вычисления I_w для функционалов порядка 4 и выше

Построение алгоритма вычисления I_w для функционалов четвёртого и более высоких порядков является более сложной задачей, так как наиболее общий вид функционалов старших порядков, который был бы аналогичен дереву (150) неединственен. Например, для функционалов четвёртого порядка имеются два неэквивалентных типа деревьев. Сплошным линиям соответствует произвольная совокупность вершин.

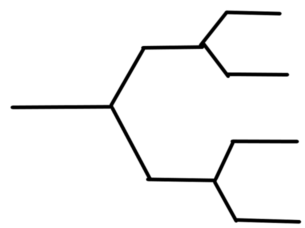


Рис. 1:

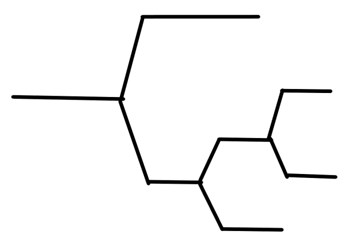


Рис. 2:

При вычислении I_w по теореме Вика каждые две "ветви"необходимо спарить. С учётом различных способов спаривания число неэквивалентных деревьев со спаренными ветвями равно 4.

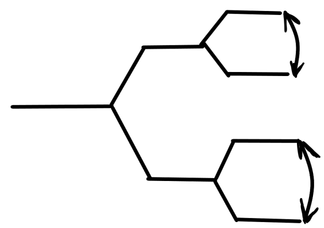


Рис. 3:

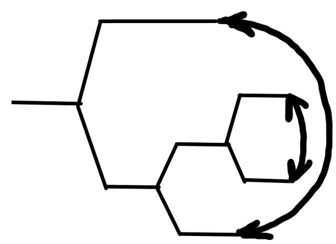


Рис. 4:

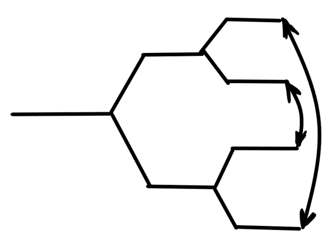


Рис. 5:

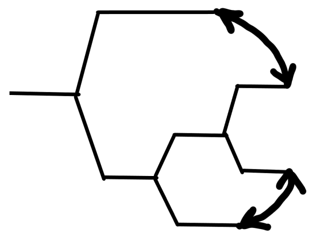


Рис. 6:

Причём деревья (рис. 3) и (рис. 4) могут быть разбиты на поддеревья второго порядка, следовательно для них задача вычисления I_w сводится к уже решённой задаче. Покажем, что и для деревьев на рисунках (рис. 5) и (рис. 4) можно свести задачу к аналогичной задаче для деревьев второго порядка.

Будем предполагать, что $I_w(f)$ как функция β имеет степенной вид:

$$I_w(f) = b\beta^S \tag{160}$$

продифференцируем обе части этого соотношения по параметру β:

$$bS\beta^{S-1} = \sum_i \beta^{k_i} I_w(f_i) \qquad I_w(f_i) = b_i\beta^{S-1-k_i} \tag{161}$$

Где функционалы f_i содержат на одну вершину меньше, чем исходный функционал f. Для b имеем формулу, аналогичную (155):

$$b = \sum_i \frac{b_i}{S} \tag{162}$$

Дифференцирование можно продолжать до тех пор, пока f_i не примет вид $f_i = p(\beta)\tilde{f}_i$, то есть будет содержать $p(\beta)$ не под интегралом. На этом этапе можно преобразовать дерево так, чтобы число ветвей стало на 2 меньше. Покажем это на примере следующего дерева (оно относится к типу, изображённому на рис. 5)

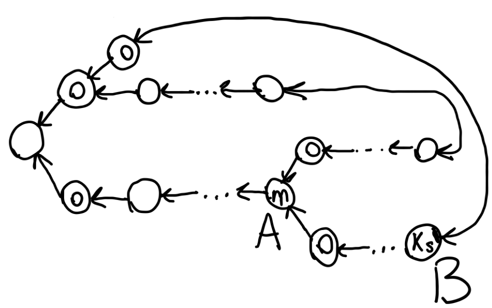


Рис. 7:

При спаривании $p(\beta)$ с $p(\tau_s)$, которому соответствует вершина B, $p(\beta)p(\tau_s)$ заменяется на $min(\beta,\tau_s) = \tau_s$, после чего все операции интегрирования на пути AB производятся элементарно. Результатом этих операций будет умножение дерева на коэффициент

$$\prod_{j=1}^{s} \frac{1}{j + \sum_{l=1}^{j} k_l} \tag{163}$$

И увеличение веса вершины A на

$$N = \sum_{j=1}^{s} k_j + s + 1 \tag{164}$$

После чего дерево можно преобразовать:

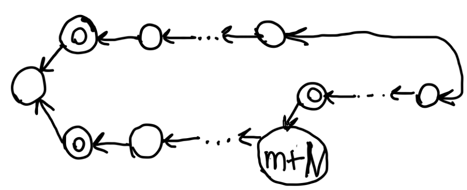


Рис. 8:

Далее можно применять описанный ранее алгоритм для деревьев второго порядка.

10 Результаты

Ниже представлены символьные выражения искомых коэффициентов, полученные с помощью программы и вычисленные значения I_w от них.

$$\begin{gathered}
\frac{a_2}{\sigma} = \beta \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) + \beta \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) p(\tau_1) + 2 \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) + \\
+ 4 \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) + \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1^2 p(\tau_1) p(\tau_1) - \beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_2} d\tau_3 p(\tau_3) - \\
- \beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) p(\tau_2) - 2\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) - \\
- 4\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_2} d\tau_3 \tau_3 p(\tau_3) - \beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2^2 p(\tau_2) p(\tau_2) + \\
+ \beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) + 2\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) + \\
+ 2\beta^{-2} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) + 4\beta^{-2} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) - \\
- \frac{1}{2}\beta^{-3} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) - \\
- 2\beta^{-3} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) - \\
- 2\beta^{-3} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) - \beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) - \\
- 2\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) - 3p(\beta) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) - \\
- 6p(\beta) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)
\end{gathered} \tag{165}$$

$$I_w(a_2) = \frac{18}{35}\beta^4\sigma \tag{166}$$

f	$I_w(f)$
$\beta \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{1}{6}\beta^4$
$\beta \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) p(\tau_1)$	$\frac{1}{3}\beta^4$
$\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1)$	$\frac{5}{24}\beta^4$
$\int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{1}{12}\beta^4$
$\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1^2 p(\tau_1) p(\tau_1)$	$\frac{1}{4}\beta^4$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_2} d\tau_3 p(\tau_3)$	$\frac{1}{30}\beta^4$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) p(\tau_2)$	$\frac{1}{15}\beta^4$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{1}{24}\beta^4$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_2} d\tau_3 \tau_3 p(\tau_3)$	$\frac{1}{60}\beta^4$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2^2 p(\tau_2) p(\tau_2)$	$\frac{1}{20}\beta^4$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{11}{120}\beta^4$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{7}{120}\beta^4$
$\beta^{-2} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{1}{18}\beta^4$
$\beta^{-2} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{13}{360}\beta^4$
$\beta^{-3} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{11}{420}\beta^4$
$\beta^{-3} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{41}{2520}\beta^4$
$\beta^{-3} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{13}{1260}\beta^4$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{11}{120}\beta^4$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{7}{120}\beta^4$
$p(\beta) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{1}{8}\beta^4$
$p(\beta) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{1}{12}\beta^4$

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 E_1}{\kappa\sigma^3} = {} & 2\beta \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) - 3\beta \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \beta^2 p(\beta) + 4 \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) - \\
& - 6 \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \beta^2 p(\beta) - 2\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) + \\
& + 3\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \beta^2 p(\beta) - 4\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) + \\
& + 6\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \beta^2 p(\beta)
\end{aligned} \tag{167}$$

$$I_w(a_1 E_1) = -\frac{139}{72}\beta^5 \kappa\sigma^3 \tag{168}$$

f	$I_w(f)$
$\beta \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1)$	$\frac{5}{24}\beta^5$
$\beta \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \beta^2 p(\beta)$	$\frac{1}{2}\beta^5$
$\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1)$	$\frac{2}{15}\beta^5$
$\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \beta^2 p(\beta)$	$\frac{1}{3}\beta^5$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1)$	$\frac{1}{18}\beta^5$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \beta^2 p(\beta)$	$\frac{1}{8}\beta^5$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1)$	$\frac{13}{360}\beta^5$
$\beta^{-1} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \beta^2 p(\beta)$	$\frac{1}{12}\beta^5$

$$(\rho_1)^2 = 4 \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) - 12 \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \beta^2 p(\beta) + \; + 9\beta^2 p(\beta) \beta^2 p(\beta) \tag{169}$$

$$I_w(\rho_1^2) = \frac{83}{15}\beta^5 \tag{170}$$

f	$I_w(f)$
$\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1)$	$\frac{2}{15}\beta^5$
$\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) \beta^2 p(\beta)$	$\frac{1}{3}\beta^5$
$\beta^2 p(\beta) \beta^2 p(\beta)$	$1\beta^5$

$$\begin{aligned} \rho_2 = {} & 9 \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1^2 p(\tau_1) p(\tau_1) + \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) + 6 \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) p(\tau_1) + \\ & + 4 \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) + \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1^2 p(\tau_1) p(\tau_1) - \beta \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) - \\ & - 6\beta^2 \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) p(\beta) - 12\beta \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) p(\beta) - 2\beta^3 p(\beta) p(\beta) + \\ & + 4p(\beta) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) + 8p(\beta) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2) \end{aligned} \tag{171}$$

$$I_w(\rho_2) = -\frac{9}{2}\beta^4 \tag{172}$$

f	$I_w(f)$
$\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1^2 p(\tau_1)p(\tau_1)$	$\frac{1}{4}\beta^4$
$\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{1}{12}\beta^4$
$\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) p(\tau_1)$	$\frac{1}{8}\beta^4$
$\int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{1}{12}\beta^4$
$\int_0^\beta d\tau_1 \tau_1^2 p(\tau_1)p(\tau_1)$	$\frac{1}{4}\beta^4$
$\beta \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1)$	$\frac{1}{3}\beta^4$
$\beta^2 \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) p(\beta)$	$\frac{1}{2}\beta^4$
$\beta \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 p(\tau_1) p(\beta)$	$\frac{1}{3}\beta^4$
$\beta^3 p(\beta) p(\beta)$	$1\beta^4$
$p(\beta) \int_0^\beta d\tau_1 \tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{1}{8}\beta^4$
$p(\beta) \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)$	$\frac{1}{12}\beta^4$

$$I_w(E_2) = \kappa\sigma^2 I_w(\rho_2) + \frac{(\kappa\sigma^2)}{2} I_w((\rho_1)^2) = -\frac{9}{2}\beta^4\kappa\sigma^2 + \frac{83}{30}\beta^5(\kappa\sigma^2)^2 \tag{173}$$

$$\bar{a}_2 = -\frac{139}{72}\beta^5\kappa\sigma^3 + \frac{18}{35}\beta^4\sigma \tag{174}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_4 = \frac{81}{35}\beta^8\kappa\sigma^3 + \frac{28391}{2800}\beta^9\kappa^2\sigma^5 - \frac{42247}{2160}\beta^{10}\kappa^3\sigma^7 + \frac{6889}{900}\beta^{11}\kappa^4\sigma^9 + I_w(a_2E_2) + I_w(a_1E_3) + \\ + I_w(a_3E_1) + I_w(a_4) = c_7\beta^7\sigma + c_8\beta^8\kappa\sigma^3 + c_9\beta^9\kappa^2\sigma^5 + c_{10}\beta^{10}\kappa^3\sigma^7 + \frac{6889}{900}\beta^{11}\kappa^4\sigma^9\end{aligned} \tag{175}$$

11 Заключение

В ходе работы были методами символьных вычислений получены значения $\bar{a}_2$ $\bar{a}_4$ коэффициентов ряда теории возмущений

$$< a(t) >= \sum_n \frac{\bar{a}_{2n}(t)}{\lambda^{2n}} \tag{176}$$

Коэффициент $\bar{a}_2$

$$\bar{a}_2 = -\frac{139}{72}\beta^5\kappa\sigma^3 + \frac{18}{35}\beta^4\sigma \tag{177}$$

Отличается от вычисленного ранее в [4]

$$\bar{a}_2 = \frac{11}{120}\beta^5\kappa\sigma^3 - \frac{59}{63}\beta^4\sigma \tag{178}$$

Был также вычислен коэффициент при β^{11} в выражении для $\bar{a}_4$

$$\bar{a}_4 = \frac{6889}{900}\beta^{11}\kappa^4\sigma^9 + ... \tag{179}$$

Коэффициенты при остальных степенях β могут быть найдены после вычисления $I_w(a_4)$, $I_w(a_2E_2)$, $I_w(a_1E_3)$, $I_w(a_3E_1)$. Вычисление этих значений не представляет принципиальных трудностей, а требует более сложной программной реализации уже разработанного алгоритма.

В процессе алгоритмизации вычислений возникли математические задачи, которые могут также иметь и самостоятельный интерес. Например, комбинаторная задача классификации деревьев, возникшая при построении алгоритма вычисления I_w от функционалов порядка 4 и выше. Интерес представляют также возникающие здесь алгебраические структуры (подробнее об этом сказано в дополнении A). Также интересен вопрос о сложности построенного алгоритма: какова асимптотика $O(f(n))$ зависимости времени выполнения программы от порядка n теории возмущений. Не существует ли более быстрого алгоритма, например, алгоритма работающего за время $O(1)$-то есть, точной формулы для вычисляемого функционального интеграла?

Полученные результаты и разработанные методы будут полезными в дальнейших исследованиях. Планируется также численно находить средние значения величин в этой теории и полученные результаты понадобятся для перекрёстной проверки. Разработанный алгоритм может быть применён в модели с $\Lambda \neq 0$, что представляет интерес с точки зрения космологии (модель инфляции Старобинского).

A Интегрирование по частям и возможность построения базиса

Рассмотрим наиболее общий функционал первого порядка:

$$k_s \leftarrow k_{s-1} \leftarrow \cdots \leftarrow k_2 \leftarrow k_1 \tag{180}$$

Он зависит от s параметров. Покажем, что с помощью интегрирования по частям его можно представить в виде линейной комбинации функционалов, которые зависят лишь от двух параметров. Действительно, пусть

$$F_s = \tau^{k_s} \int_0^{\tau} d\tau_{s-1} \tau_{s-1}^{k_{s-1}} \int_0^{\tau_{s-1}} ... \tau_2^{k_2} \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \tau_1^{k_1} p(\tau_1) \tag{181}$$

-функционал, соответствующий дереву из s вершин

$$F_s = \beta^{k_s} \int_0^{\beta} \tau_{s-1}^{k_{s-1}} F_{s-1} = \beta^{k_s} \int_0^{\beta} d\tau_{s-1} \left(\frac{\tau_{s-1}^{k_{s-1}+1}}{k_{s-1}+1} \right)' F_{s-1} \tag{182}$$

$$= \frac{\beta^{k_s+k_{s-1}+1}}{k_{s-1}+1} F_{s-1} - \beta^{k_s} \int_0^{\beta} d\tau_{s-1} \frac{\tau_{s-1}^{k_{s-1}+1}}{k_{s-1}+1} F'_{s-1} \tag{183}$$

каждое слагаемое в формуле (183) соответствует дереву с $s-1$ вершиной. Повторяя данную процедуру достаточное число раз, получим линейную комбинацию деревьев всего с двумя вершинами. Обозначим

$$m \leftarrow k \tag{184}$$

как $T_{m,k}$. Тогда применение операции $\int_0^{\beta} d\tau$ запишется в виде

$$\int_0^{\beta} d\tau T_{mk} = \frac{T_{m+1,k}}{m+1} - \frac{T_{0,m+k+1}}{m+1} \tag{185}$$

операция умножения на переменную в произвольной степени представится в виде

$$\beta^n T_{m,k} = T_{m+n,k} \tag{186}$$

Введём функционалы t_k

$$k \tag{187}$$

операции интегрирования и умножения на β^n запишутся в виде

$$\beta^n t_k = t_{k+n} \qquad \int_0^{\beta} d\tau \, t_k = T_{0,k} \tag{188}$$

Из вышесказанного следует, что $T_{m,k}$ и t_k можно выбрать в качестве базиса в пространстве функционалов первого порядка F_1, причём действие линейных операторов $\beta^n \times$ и $\int_0^{\beta} d\tau$ может быть легко представлено в этом базисе формулами (185) (186) и (188) Пространство всех функционалов представляется в виде бесконечной прямой суммы

$$F = \bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i \tag{189}$$

Представляет интерес задача построения базисов в F_i, аналогичных тому, что был построен для F_1. Это позволит символьно приводить подобные слагаемые, сократит объём формул (a_2, например, содержит 17 слагаемых) и количество различных встречающихся деревьев. Отметим, что операции $\beta^n \times$ и $\int_0^\beta d\tau$ не выводят из пространств F_i:

$$\beta^n \times : F_i \to F_i \qquad \int_0^\beta d\tau : F_i \to F_i \tag{190}$$

Действия этих операторов должны быть также записаны в каждом из пространств F_i. Операция умножения $\times$ является билинейным отображением

$$\times : F_i \times F_j \to F_{i+j} \tag{191}$$

После построения базисов в пространствах F_i будет возможно приводить подобные слагаемые при умножении функционалов с помощью структурных констант.

B Обоснование возможности дифференцирования по параметру

Пусть $D = (0, \infty)^2$ $\bar{D} = [0, \infty)^2$. Рассмотрим интеграл вида

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha \int_0^\beta dx dy F(x, y) \tag{192}$$

где $(\alpha, \beta) \in D$, функция $F(x, y)$ определена и непрерывна при $(x, y) \in \bar{D}$.

Лемма:

$I(\alpha, \beta)$-дифференцируема при $(\alpha, \beta) \in D$

Доказательство:

Рассмотрим функцию

$$\tilde{I}(x, \beta) = \int_0^\beta dy F(x, y) \tag{193}$$

согласно теореме о непрерывной зависимости интеграла от параметра, $\tilde{I}(x, \beta)$ непрерывна по **совокупности переменных** (x, β) при $(x, \beta) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$. Следовательно, для интеграла

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha dx \tilde{I}(x, \beta) \tag{194}$$

справедлива теорема о формуле Ньютона-Лейбница:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \tilde{I}(\alpha, \beta) = \int_0^\beta dy F(\alpha, y) \tag{195}$$

аналогично

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \int_0^{\alpha} dx F(x,\beta) \tag{196}$$

$$\exists \frac{\partial I}{\partial \alpha}, \frac{\partial I}{\partial \beta} \text{ непрерывные в } D \Longrightarrow I(\alpha,\beta) \text{ дифференцируема в } D \tag{197}$$

доказательство закончено.

Следствие:

$$\frac{d}{d\beta} I(\beta,\beta) = \int_0^{\beta} dx F(x,\beta) + \int_0^{\beta} dy F(\beta,y) \tag{198}$$

Доказательство:

Рассмотрим $I(\beta,\beta)$ как сложную функцию $I(\alpha(\beta),\beta)$. В силу доказанной выше леммы справедлива формула дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d}{d\beta} I(\alpha(\beta),\beta) = \alpha'(\beta)\frac{\partial I}{\partial \alpha} + \frac{\partial I}{\partial \beta} = \int_0^{\beta} dx F(x,\beta) + \int_0^{\beta} dy F(\beta,y) \tag{199}$$

C Матричная запись некоторых формул

Формула

$$h_k(t) = \sum_{l=0}^{k-1} M_{l,k-l} = \sum_{l=0}^{k} \sum_{s=0}^{k-l} f_{ls} T_{k-l}^{(s)} \tag{200}$$

содержит большое количество индексов и не очень удобна для вычислений вручную. Представим её в матричном виде. Пусть имеется полином $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} p_k \alpha^k$ сопоставим ему матрицу

$$P^M = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_n \\ 0 & p_0 & \dots & p_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_0 \end{pmatrix} \tag{201}$$

Будем вести все вычисления с точностью до $o(\alpha^{n+1})$. Введём полиномы $Q(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} q_k \alpha^k$ и $R(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} r_k \alpha^k$.Если $R = PQ$, то для коэффициентов справедливо соотношение

$$r_k = \sum_{s=0}^{k} p_s q_{k-s} \tag{202}$$

Прямым вычислением можно убедиться, что запись (202) эквивалентна

$$R^M = P^M Q^M \tag{203}$$

Этот факт обсуждается в [5]. Ранее мы вводили коэффициенты $T_m^{(s)}$ как

$$(\tau - \tau_0)^s = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \alpha^k\right)^s = \sum_{m=0}^{\infty} T_m^{(s)} \alpha^m \tag{204}$$

Матрица этих коэффициентов может быть представлена как

$$T^{(s)} = (\tau^M - \tau_0 I)^s \tag{205}$$

Отметим, что матрица $\tau^M - \tau_0 I$ нильпотентна, что согласуется с

$$T_m^{(s)} = 0 \quad m < s \tag{206}$$

формула 205 эквивалентна полученной ранее

$$T_m^{(s)} = \sum_{r=s-1}^{m-1} T_r^{(s-1)} \tau_{m-r} \tag{207}$$

Введём многочлены $f_s = \sum_k f_{ks}\alpha^k$. Тогда (200) запишется в виде:

$$h^M = \sum_{s=0}^{\infty} f_s^M (\tau^M - I\tau_0)^s \tag{208}$$

В силу нильпотентности матрицы $\tau^M - I\tau_0$ в сумме отлично от 0 лишь конечное число слагаемых. Уравнение для нахождения коэффициентов τ_k запишется в виде

$$tI = \sum_{s=0}^{\infty} g_s^M (\tau^M - I\tau_0)^s \tag{209}$$

Использованная ранее итерационная процедура вычисления τ_k соответствует решению уравнения (209) методом итераций.

D Коэффициенты функций от рядов

Пусть имеется ряд $P(\alpha) = \sum_{k=0} p_k \alpha^k$ необходимо найти коэффициенты E_n в разложении

$$E(\alpha) = e^{P(\alpha)} = \sum_{n=0} E_n \alpha^n \tag{210}$$

Воспользуемся разложением производной

$$P'(\alpha) = \sum_{k=1} k p_k \alpha^{k-1} = \sum_{k=0} (k+1) p_{k+1} \alpha^k \tag{211}$$

$$E'(\alpha) = E(\alpha) P'(\alpha) \tag{212}$$

Подставляя E и P в виде ряда, получим

$$\sum_n (n+1) E_{n+1} \alpha^n = \sum_n \left(\sum_{s=0}^{n} (s+1) p_{s+1} E_{n-s} \right) \alpha^n = \sum_n \left(\sum_{s=1}^{n+1} s p_s E_{n+1-s} \right) \alpha^n \tag{213}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α получим

$$E_n = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} s p_s E_{n-s} \tag{214}$$

Аналогично найдём коэффициенты q_n:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{P(\alpha)} = \sum_{n=0} q_n \alpha^n \tag{215}$$

$$Q'(\alpha) = -Q^2(\alpha) P'(\alpha) \tag{216}$$

$$q_n = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} q_s q_{m-s} p_{n-m} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \tag{217}$$

Список литературы

[1] Iosif L. Buchbinder Ilya L. Shapiro "Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity"Oxford University Press 2021

[2] Thomas P. Sotiriou, Valerio Faraoni "f(R) Theories Of Gravity"arXiv:0805.1726 [gr-qc]

[3] Alberto Salvio "Quadratic Gravity"arXiv:1804.09944 [hep-th]

[4] V. V. Belokurov and E. T. Shavgulidze "Path Integrals in Quadratic Gravity"JHEP 02 (2022) 112 , [arXiv:2110.06041]

[5] Н. А. Вавилов, В.Г. Халин, А. В. Юрков "mathematica для нематематика"М. МЦНМО 2021

[6] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков "Ведение в теорию ранней вселенной: Теория горячего большого взрыва М. ЛКИ, 2008. - 552 с.

[7] A. A. Starobinsky, “A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity,” Phys. Lett. 91B (1980) 99.

[8] A. Salvio, “Inflationary Perturbations in NoScale Theories,” Eur. Phys. J. C 77 (2017) no.4, 267 [arXiv:1703.08012].

[9] Х. С. Го "Гауссовские меры в банаховых пространствах"М. Мир 1979

[10] I. L. Buchbinder and S. L. Lyakhovich, “Canonical Quantization and Local Measure of R2 Gravity,” Class. Quant. Grav. 4 (1987) 1487.