

**Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова**

**Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии**

**Курсовая работа
Оценка формы гало темной материи по
движению звёзд**

Выполнил:
студент 2 курса 204 группы
МОСТОВСКИЙ А. М.

Научный руководитель:
д.ф. - м.н., член-корр.РАН
ГОРБУНОВ Д.С.

Москва
2023 г.

Содержание

Введение	1
Модель	2
Профиль Наварро-Френка-Уайта (NFW)	2
Псевдоизотермический профиль (ISO)	2
Метод	3
Симуляция	5
Результаты	6
Круговые орбиты	6
Результаты аппроксимации	7
Кривые вращения	8
Почти круговые орбиты	8
Результаты аппроксимации	9
Кривые вращения	10
Произвольные орбиты	11
Выводы	11
Приложение	12

Введение

Полученные в результате прямых наблюдений кривые вращения галактик показывают отсутствие убывания скоростей звезд на периферии в противоречие теоретическим зависимостям. Данное расхождение демонстрирует недостаточность гравитационного потенциала видимой массы. Для объяснения полученных кривых вращения была предложена теория о существовании темной материи. В симуляциях гравитирующих частиц был получен теоретический профиль плотности темной материи с сингулярностью в центре галактики - профиль Наварро-Френка-Уайта. Однако, наблюдательные данные, полученные на основе кривых вращения, демонстрируют профили с постоянной плотностью в центре - псевдоизотермический профиль. Расхождение наблюдательных данных с результатами численных симуляций получило название проблемы каспов. Особенное остро это несоответствие проявляется в галактиках низкой поверхностной яркости и карликовых галактиках, в которых компонента темной материи является доминирующей. Например, галактики UGC 1281 (ссылочка), UGC 11648 и F571-8 (ссылочка) относятся к галактикам данного типа и их профили не соответствуют предсказанному теорией, также данные галактики наблюдаются с ребра, что важно для модели, используемой в работе. Полученное несоответствие предсказаний и наблюдательных данных может использоваться как аргумент против справедливости общепринятой космологической модели (Λ CDM).

Возможными объяснениями данного расхождения могут служить ошибки при определении положения звёзд относительно центра галактики, низкая статистика наблюдаемых звёзд и предположение о их круговом движении. Всё это приводит к ошибкам в построении кривой вращения и, как следствие, некорректному определению профиля плотности. Целью данной работы является анализ вклада перечисленных выше ошибок в кривую вращения: оценивается неопределенность, которую они вносят в кривую вращения, параметры профиля плотности.

Модель

Профиль Наварро-Френка-Уайта (NFW)

Данный профиль получен в результате численного моделирования и имеет вид:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2},$$

где r - расстояние от центра галактики, R_s - характерный радиус гало, а ρ_0 - параметр, связанный с критической плотностью вселенной.

Решая уравнение Пуассона $\Delta\Phi(r) = -4\pi G\rho(r)$, можно получить выражение для потенциала:

$$\Phi(r) = -\Phi_0 \frac{\ln(1 + \frac{r}{R_s})}{r}, \quad \Phi_0 = 4\pi\rho_0 G R_s^3$$

Вычислим сразу круговую скорость:

$$v_c(r) = \sqrt{-r \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}} = \sqrt{\Phi_0 \left(\frac{1}{r + R_s} - \frac{\ln(1 + \frac{r}{R_s})}{r} \right)} \quad (1)$$

И вторую космическую для данного потенциала:

$$v_{esc}(r) = \sqrt{-2\Phi(r)} = \sqrt{2\Phi_0 \frac{\ln(1 + \frac{r}{R_s})}{r}} \quad (2)$$

Псевдоизотермический профиль (ISO)

Данный профиль получен в результате аппроксимации наблюдаемых данных и имеет вид:

$$\rho(r) = \frac{\rho_c}{1 + \left(\frac{r}{R_c}\right)^2},$$

где R_c - характерный радиус гало, ρ_c - плотность темной материи в центре галактики.

Аналогично случаю выше получаются выражение для потенциала:

$$\Phi(r) = -\Phi_0 \left(\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{r^2}{R_c^2} \right) + \frac{\arctan \left(\frac{r}{R_c} \right)}{\frac{r}{R_c}} \right), \quad \Phi_0 = 4\pi\rho_c G R_c^2$$

И для круговой скорости:

$$v_c = \sqrt{\Phi_0 \left(\frac{R_c}{r} - \frac{\arctan \left(\frac{r}{R_c} \right)}{\frac{r^2}{R_c^2}} \right)} \quad (3)$$

Метод

Для решения поставленной задачи проводится численное моделирование дисковых галактик с углом наклона $i = 90^\circ$ (i - угол между нормалью к диску и лучом зрения), в которых распределение плотности темной материи соответствует профилю NFW. А затем проводится псевдонааблюдение нескольких десятков звезд в симулированных галактиках и строятся кривые вращение. Для получения кинематических характеристик объектов симулированной галактики решается система уравнений:

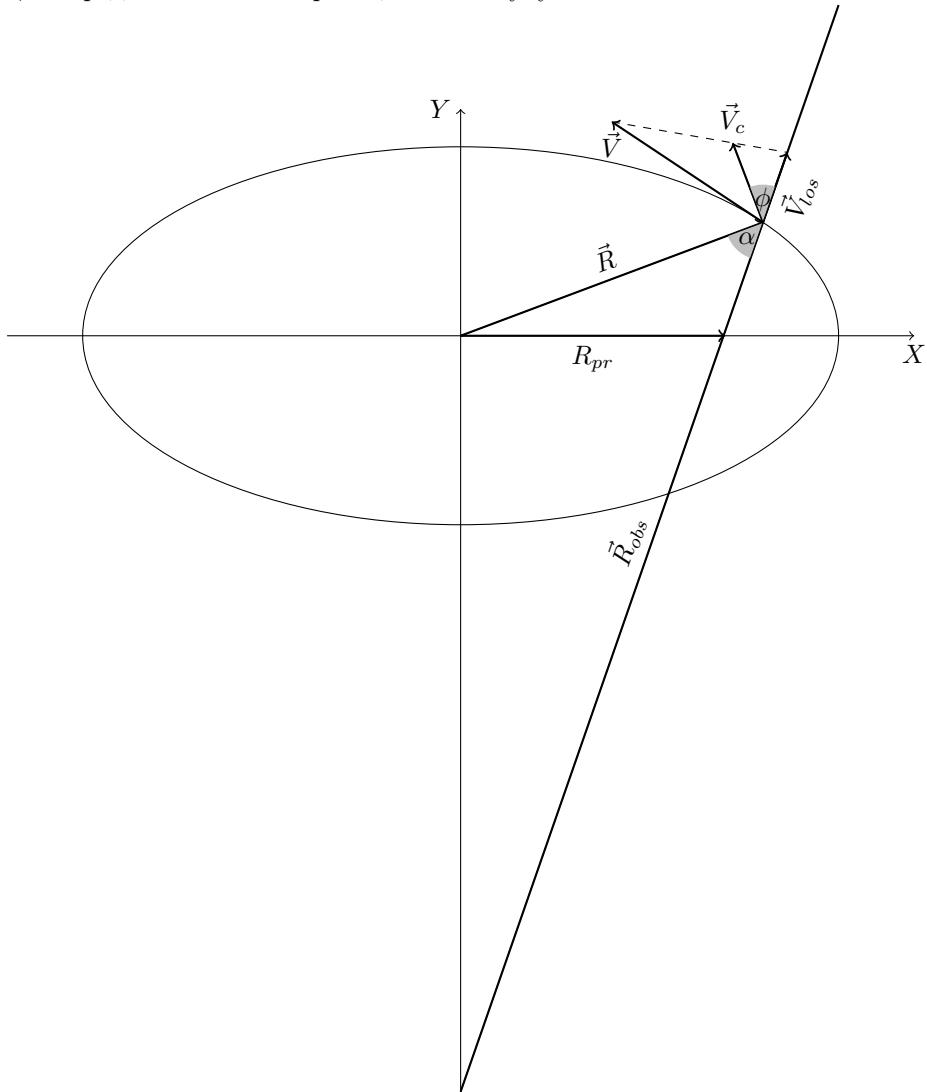
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} &= -\text{grad}(\Phi(r)), \\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \vec{v}(t) \end{aligned}$$

Или, подставляя выражение для потенциала и приводя к безразмерному виду, пригодному к численному решению в декартовой системе координат с началом в центре галактики:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= \frac{X}{R} \left(\frac{\ln(1+R)}{R^2} - \frac{1}{R(1+R)} \right), \\ \frac{dV_y}{dt} &= \frac{Y}{R} \left(\frac{\ln(1+R)}{R^2} - \frac{1}{R(1+R)} \right), \\ R &= \frac{r}{R_s}, \\ X &= \frac{x}{R_s}, \\ Y &= \frac{y}{R_s}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ V_x &= \frac{v_x}{2\sqrt{\pi}R_s\sqrt{G\rho_0}}, \\ V_y &= \frac{v_y}{2\sqrt{\pi}R_s\sqrt{G\rho_0}} \end{aligned} \quad (4)$$

Данная система решается при помощи кода на python (ссылка на гитхаб) методом Рунге-Кутта четвёртого порядка. Для различных начальных значений X_0, Y_0, V_{x0}, V_{y0} , причем модуль начальной скорости $V_0 = \sqrt{V_{x0}^2 + V_{y0}^2}$ меньше второй космической (2) для данного начального положения R_0 .

Псевдонаблюдения построены на предположении о круговом движении звезд и том факте, что точное положение звезды в галактике не определяется, а определяется лишь проекция на главную ось галактики.



\vec{R}_{obs} - радиус-вектор от точки наблюдения до звезды (он же луч зрения),
 \vec{V}_{los} - проекция скорости \vec{V} на луч зрения, α - угол между радиус-вектором от точки наблюдения и радиус-вектором из начала координат. \vec{V}_c - круговая скорость, соответствующая данной лучевой. Угол между круговой и

лучевой скоростями $\phi = 90^\circ - \alpha$.

$$\begin{aligned}
|\vec{V}_{los}| &= \frac{(\vec{V}, \vec{R}_{obs})}{|\vec{R}_{obs}|}, \\
\cos \alpha &= \frac{(\vec{R}, \vec{R}_{obs})}{|\vec{R}_{obs}| |\vec{R}|}, \\
|\vec{V}_c| &= \frac{|\vec{V}_{los}|}{\cos \phi} = \frac{|\vec{V}_{los}|}{\sin \alpha}, \\
R_{pr} &= \frac{|R_x| (R_{obsy} - R_y)}{R_{obsy}}
\end{aligned} \tag{5}$$

Однако, как уже было сказано выше, вместо точного положения звезды наблюдается проекция \vec{R}_{pr} на главную ось, поэтому в выражении для $\cos \alpha$ в системе (5) в расчётах необходимо \vec{R} заменить на R_{pr} .

Симуляция

Для изучения ошибок вносимых неточностью в определении расстояния, в симуляцию, реализуемую путём решения системы (4), заупускаются звезды равномерное распределенные в области $R_0 < 1$, с круговыми скоростями V_0 , задающимися выражением (1).

Также отдельно для изучения влияния незначительных некруговых движений генерируется набор кинематических данных для звёзд в области $R_0 < 1$ и начальными скоростями V_0 , имеющими отклонение от круговой скорости (1) не более 10% и набор для звезд с произвольными начальными скоростями V_0 (характерный вид орбит представлен на рисунке 6).

Далее для каждого сгенерированного набора данных вычисляются в соответствии с формулами (5) наблюдаемые и круговые скорости. И по случайному выбранным точкам после усреднения (которое основано на предположении о возможности определения пространственной координаты с точностью 1%) строятся кривые вращения с различной относительной ошибкой скоростей (0%, 5%, 10%, 20%), которые аппроксимируются зависимостями круговой скорости от расстояния для профилей NFW (1) и псевдоизотермического (3). При аппроксимации ищется отклонение от начальных параметров. Поэтому в выражениях (1) и (3) R_s и R_c заменяются на bR_s и bR_s соответственно, где b характеризует отношение наблюдаемого параметра R'_s к исходному, также для выяснения отклонения параметра ρ_0 выражения (1), (3) домножаются на a , где a^2 равно отношению наблюдаемого параметра ρ'_0 к исходному (т.е $b = \frac{R'_s}{R_s}$, $a = \sqrt{\frac{\rho'_0}{\rho_0}}$)

Результаты

Круговые орбиты

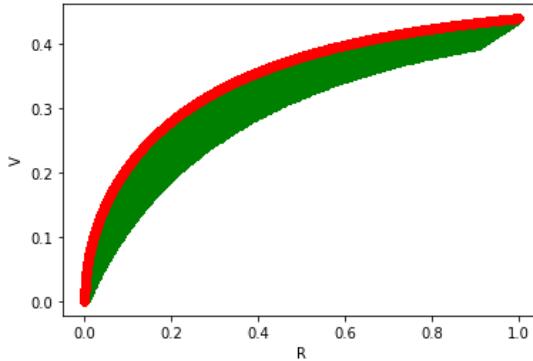


Рис. 1: кривая вращения в случае круговых орбит

На рисунке 1 область всех возможных скоростей, наблюдаемых в симуляции представлена зеленым цветом, а красная огибающая соответствует теоретической зависимости (1). Видно, что наблюдаемые скорости меньше теоретических, что вполне согласуется с формулами (5), так при замене \vec{R} на \vec{R}_{pr} угол α становится больше, а, следовательно, $|\vec{V}_c|$ меньше.

Построенные кривые вращения для разного числа наблюдаемых звёзд хорошо аппроксимируются профилем NFW, на что указывает высокий коэффициент корреляции R (см. таблицу 1). Однако параметры аппроксимирующей кривой имеют отклонение от исходных порядка 100 % в случае нулевой ошибки и в среднем от 11 до 60 при учёте относительной ошибки измерения, что может привести к искажению в оценках массы гало. Псевдоизотермический профиль так же хорошо согласуется с построенными кривыми вращения (см. 2), хоть коэффициент корреляции в данном случае меньше.

В итоге видно, что в случае круговых орбит имеется хорошее согласование с теоретическим профилем даже при малой статистике звёзд (10-20 штук). Следовательно, ошибка в определении положения звёзд не может служить объяснением проблемы каспов.

Результаты аппроксимации

Профиль NFW							
число точек	ошибка	a	b	$\frac{\Delta\rho_0}{\rho_0}$	$\frac{\Delta R_s}{R_s}$	R^2	χ^2
10	0%	$0,597 \pm 0,152$	$1,93 \pm 0,74$	-0,64	0,93	0,91	0,004
	5%	$0,609 \pm 0,093$	$1,85 \pm 0,46$	-0,63	0,85	0,90	18,6
	10%	$0,609 \pm 0,186$	$1,85 \pm 0,91$	-0,63	0,85	0,90	4,7
	20%	$0,609 \pm 0,372$	$1,85 \pm 1,83$	-0,63	0,85	0,90	1,2
20	0%	$0,606 \pm 0,104$	$1,92 \pm 0,52$	-0,63	0,92	0,96	0,006
	5%	$0,696 \pm 0,108$	$1,56 \pm 0,30$	-0,52	0,56	0,94	46
	10%	$0,621 \pm 0,210$	$1,88 \pm 0,81$	-0,61	0,88	0,95	11,3
	20%	$0,696 \pm 0,430$	$1,56 \pm 1,20$	-0,52	0,56	0,94	2,9
50	0%	$0,677 \pm 0,069$	$1,6 \pm 0,24$	-0,54	0,6	0,97	0,019
	5%	$0,991 \pm 0,007$	$0,89 \pm 0,11$	-0,02	-0,11	0,90	3753
	10%	$0,991 \pm 0,014$	$0,89 \pm 0,21$	-0,02	-0,11	0,89	938
	20%	$0,991 \pm 0,028$	$0,89 \pm 0,42$	-0,02	-0,11	0,89	235
100	0%	$0,555 \pm 0,050$	$2,16 \pm 0,30$	-0,69	1,16	0,97	0,043
	5%	$0,687 \pm 0,047$	$1,58 \pm 0,12$	-0,53	0,58	0,98	675
	10%	$0,687 \pm 0,094$	$1,58 \pm 0,25$	-0,53	0,58	0,98	169
	20%	$0,687 \pm 0,188$	$1,58 \pm 0,47$	-0,53	0,58	0,98	42

Таблица 1: параметры аппроксимации профилем NFW

Псевдоизотермический профиль					
число точек	ошибка	a	b	R^2	χ^2
10	0%	$2,52 \pm 0,31$	$0,199 \pm 0,035$	0,88	0,005
	5%	$2,57 \pm 0,16$	$0,192 \pm 0,018$	0,86	24,4
	10%	$2,57 \pm 0,33$	$0,192 \pm 0,037$	0,86	6,1
	20%	$2,57 \pm 0,65$	$0,192 \pm 0,07$	0,86	1,5
20	0%	$3,20 \pm 0,27$	$0,144 \pm 0,017$	0,92	0,013
	5%	$3,17 \pm 0,18$	$0,147 \pm 0,010$	0,92	64
	10%	$3,17 \pm 0,36$	$0,147 \pm 0,019$	0,92	16,1
	20%	$3,17 \pm 0,73$	$0,147 \pm 0,038$	0,92	4,0
50	0%	$3,25 \pm 0,22$	$0,142 \pm 0,012$	0,95	0,032
	5%	$2,05 \pm 0,01$	$0,256 \pm 0,017$	0,97	1067
	10%	$2,05 \pm 0,01$	$0,256 \pm 0,034$	0,97	267
	20%	$2,05 \pm 0,03$	$0,256 \pm 0,068$	0,97	67
100	0%	$2,89 \pm 0,11$	$0,166 \pm 0,009$	0,96	0,05
	5%	$3,59 \pm 0,12$	$0,127 \pm 0,004$	0,98	850
	10%	$3,59 \pm 0,24$	$0,127 \pm 0,008$	0,98	212
	20%	$3,47 \pm 0,46$	$0,133 \pm 0,017$	0,98	54

Таблица 2: параметры аппроксимации псевдоизотермическим профилем

Кривые вращения

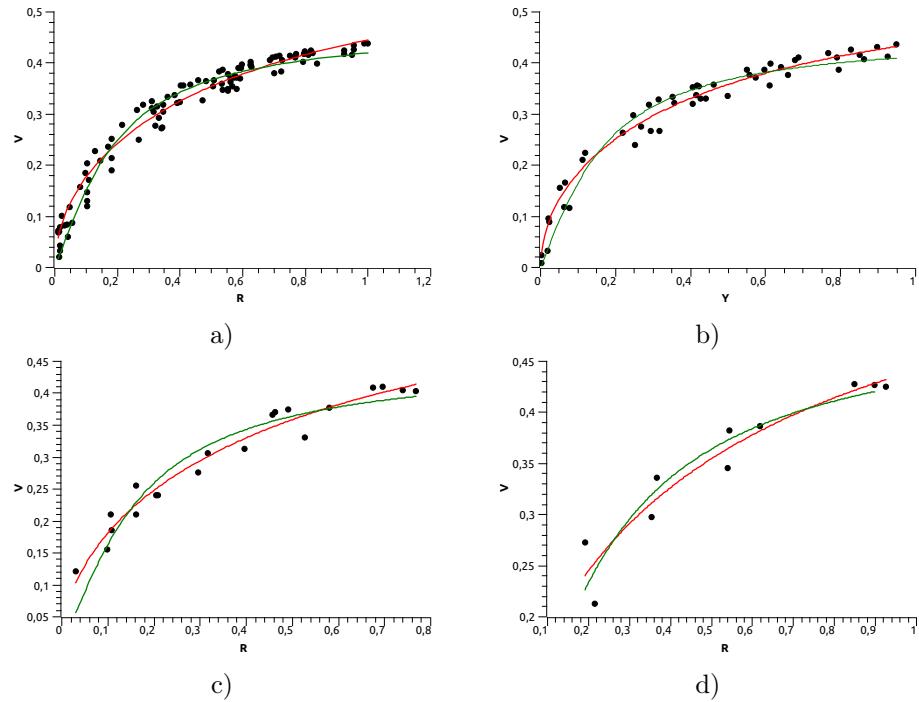


Рис. 2: кривые вращения для различного числа наблюдаемых звёзд: а)100, б)50, в) 20, г) 10

Почти круговые орбиты

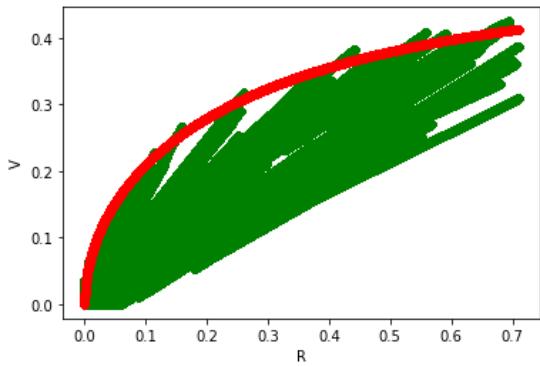


Рис. 3: кривая вращения в случае почти круговых орбит

В случае почти круговых орбит дисперсия скоростей, ожидаемо, больше чем в случае с круговыми орбитами, однако всё равно остается в разумных пределах, что делает двинные пригодными для дальнейшей статистической обработке.

Кривые вращения для данных орбит (рис.4) уже существенно отклоняются от кривых, соответствующих профилю NFW и ближе к кривым, дающимся псевдоизотермическим профилем, если опираться на коэффициент корреляции (см. таблицы 3,4) даже при большой статистике звёзд. В случае учёта ошибки скоростей отклонение от начальных параметров значительно меньше, чем без её учёта, однако всё равно остается на довольно высоком уровне (до 1200%). Данный факт указывает на возможность объяснения рассогласования теоретического профиля и наблюдаемого профилей отклонением от круговых орбит.

Результаты аппроксимации

Профиль NFW							
число точек	ошибка	a	b	$\frac{\Delta \rho_0}{\rho_0}$	$\frac{\Delta R_s}{R_s}$	R^2	χ^2
20	0%	$0,103 \pm 0,0304$	31 ± 18	-0,99	30	0,80	0,050
	5%	$0,179 \pm 0,013$	$4,81 \pm 0,62$	-0,98	3,81	0,53	3424
	10%	$0,179 \pm 0,025$	$4,81 \pm 1,24$	-0,98	3,81	0,53	856
	20%	$0,179 \pm 0,050$	$4,81 \pm 2,48$	-0,98	3,81	0,53	214
50	0%	$0,099 \pm 0,227$	31 ± 137	-0,99	30	0,81	0,038
	5%	$0,112 \pm 0,002$	$6,80 \pm 1,49$	-0,99	5,8	0,38	4 438
	10%	$0,112 \pm 0,003$	$6,80 \pm 2,97$	-0,9	5,8	0,38	1110
	20%	$0,100 \pm 0,007$	$7,11 \pm 7,08$	-0,99	6,11	0,50	254
100	0%	$0,112 \pm 0,176$	29 ± 89	-0,99	28	0,79	0,10
	5%	$0,094 \pm 0,007$	$13,5 \pm 2,4$	-0,99	12,5	0,61	3094
	10%	$0,109 \pm 0,012$	$11,2 \pm 3,1$	-0,99	10,2	0,61	995
	20%	$0,094 \pm 0,026$	$13,5 \pm 9,5$	-0,99	12,5	0,61	244

Таблица 3: параметры аппроксимации профилем NFW

Псевдоизотермический профиль					
число точек	ошибка	a	b	R^2	χ^2
20	0%	$1,44 \pm 0,20$	$0,395 \pm 0,128$	0,86	0,036
	5%	$1,55 \pm 0,01$	$0,305 \pm 0,004$	0,84	1167
	10%	$1,55 \pm 0,02$	$0,305 \pm 0,007$	0,84	292
	20%	$1,55 \pm 0,04$	$0,305 \pm 0,015$	0,84	73
50	0%	$1,20 \pm 0,11$	$0,685 \pm 0,312$	0,91	0,018
	5%	$1,011 \pm 0,001$	$0,859 \pm 0,025$	0,64	2582
	10%	$1,011 \pm 0,001$	$0,859 \pm 0,051$	0,64	646
	20%	$1,011 \pm 0,003$	$0,859 \pm 0,102$	0,83	161
100	0%	$1,44 \pm 0,14$	$0,166 \pm 0,009$	0,86	0,070
	5%	$1,05 \pm 0,01$	$0,847 \pm 0,012$	0,89	1068
	10%	$1,05 \pm 0,01$	$0,847 \pm 0,023$	0,89	267
	20%	$1,05 \pm 0,01$	$0,847 \pm 0,047$	0,89	67

Таблица 4: параметры аппроксимации псевдоизотермическим профилем

Кривые вращения

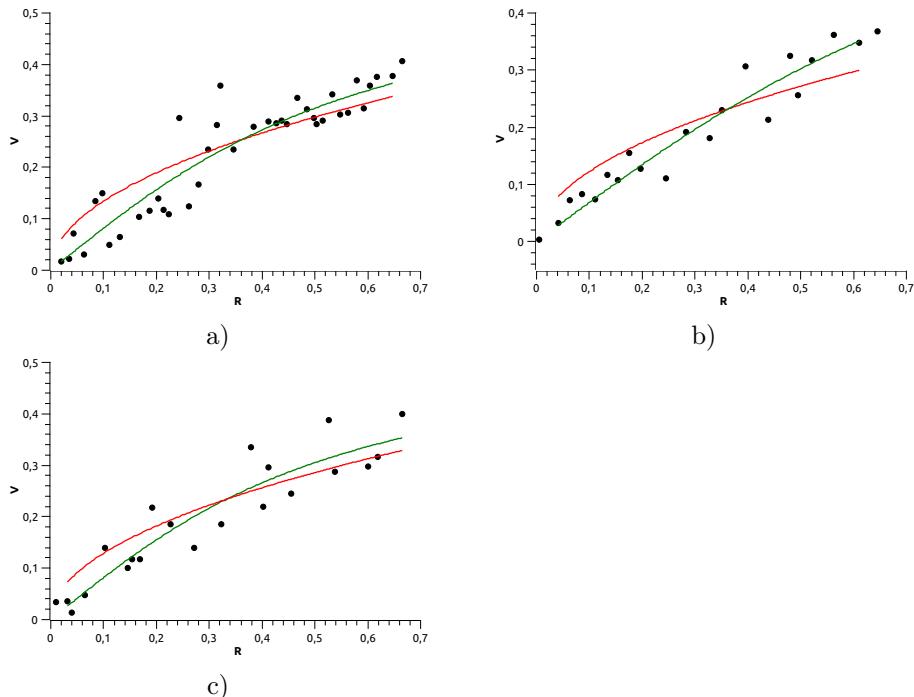


Рис. 4: кривые вращения для различного числа наблюдаемых звёзд: а) 100, б) 50, в) 20

Произвольные орбиты

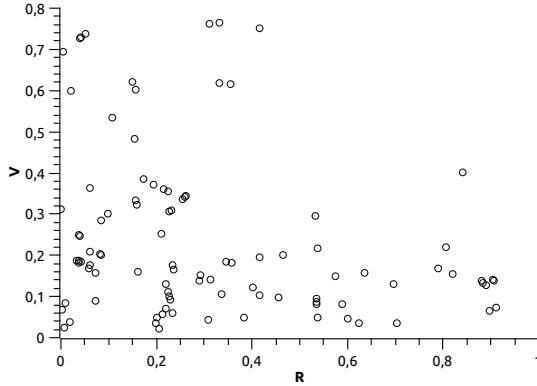


Рис. 5: кривая вращения в случае произвольных орбит

Для произвольных орбит скоррелированность в распределении скоростей не наблюдается, поэтому какая-либо статистическая обработка данных и построение кривых вращения в данном случае не представляются возможными. Также столь случайное распределение скоростей говорит о том, что при малой статистике могут наблюдаться в такой же степени произвольные кривые вращения.

Выводы

По итогам работы можно сделать вывод, что наибольший вклад в неопределенность кривой вращения вносят некруговые движения. Факторы неопределенности в положении и малой статистики не играют такой же значительной роли, как негрутовые движения. Тот факт, что малая неопределенность в положении незначительна оправдывает рассмотрение в симуляции галактик с наклоном 90° , потому что в случае меньшего наклона мы лишь можем более точно положение а звёзд, а для лучевых скоростей наклон является лишь масштабным фактором. Также для дальнейшего изучения вклада некруговых движений стоит обратить внимание на вопрос произвольности орбит с физической точки зрения для объяснения реально наблюдаемых кривых вращений с полученными в симуляции для данного случая. Однако для случая почти круговых орбит получившиеся в симуляции кривые качественно ближе к наблюдаемым, что может служить основанием для объяснения проблемы каспов и верности Λ CDM модели.

Приложение

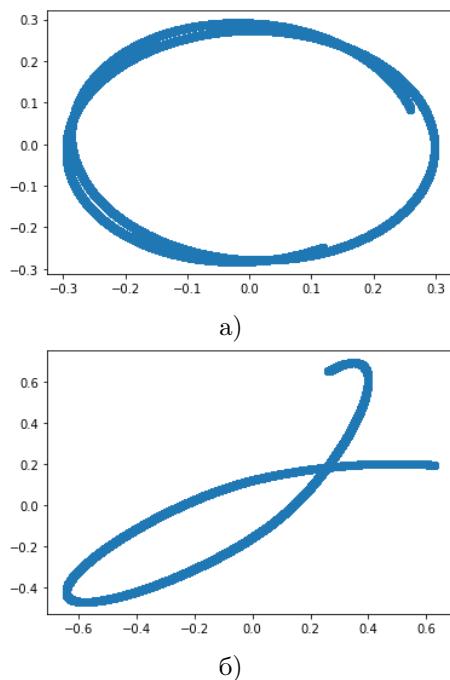


Рис. 6: характерный вид орбиты при а) начальных скоростях незначительно отклонённых от круговых б) при произвольных начальных скоростях