

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Бакаев Дмитрий Сергеевич

**Восстановление профиля темной материи в карликовых
сферических галактиках**

Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА 2 КУРСА

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
член-корр. РАН
Дмитрий Сергеевич Горбунов

Москва-2025

Содержание

Введение	2
Постановка задачи	3
NFW профиль.....	4
Модель Пламмера	6
Симуляция звездной системы	8
Метод Gravsphere	9
Результаты и заключение	14

Введение

Существование некоторой невидимой материи на космологических масштабах было впервые предложено, чтобы объяснить расхождения в наблюдаемых и теоретических данных о скоростях вращения звезд в галактиках [8].

Если предположить, что видимая материя доминирует в галактиках и подчиняется закону гравитации Ньютона, то круговая скорость звезд должна убывать обратно пропорциональна квадратному корню из радиуса:

$$v_{circ} \sim \frac{1}{\sqrt{R}}$$

Зависимость круговой скорости от радиуса называется кривой вращения галактики.

По результатам астрономических наблюдений, проведенных Верой Рубин и Кентом Фордом в начале 1970-х годов было установлено, что реальная кривая вращения галактики М31 имела плоский вид.

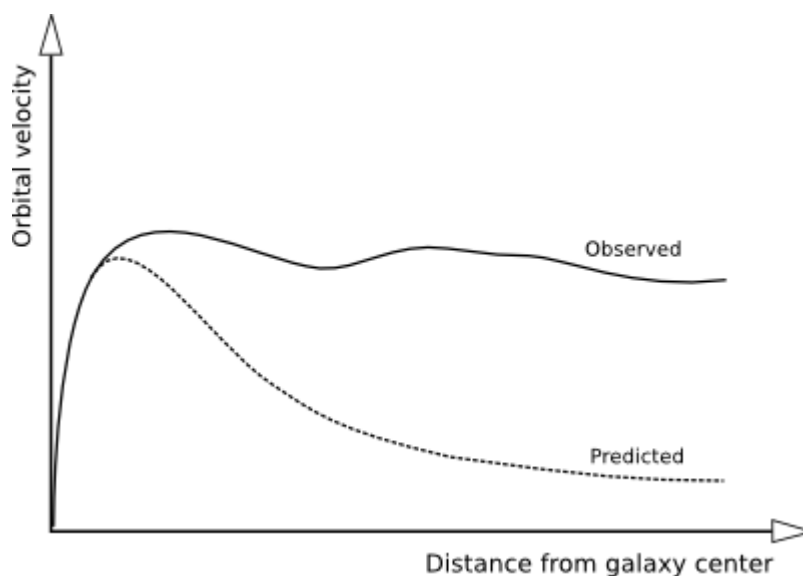


Рис. 1: характерная кривая вращения галактики

Существует несколько способов объяснить наблюдаемую закономерность, включая модификации закона гравитации и предположение о существовании *темной материи*.

По современным представлениям темная материя - гипотетическая форма материи, участвующая только в гравитационном взаимодействии, и потому недоступная для прямого наблюдения. По оценкам, общая масса наблюдаемой вселенной состоит на 4,9% из видимой материи и на 26,8% из темной материи.

Состав и природа темной материи на данный момент неизвестны, но существует множество гипотез, которые можно разделить на две группы [8]:

1. *Холодная темная материя*: темная материя состоит из медленно движущихся, почти нерелятивистских частиц, слабо взаимодействующих с обычным веществом и электромагнитным излучением.

Теория хорошо предсказывает образование крупных структур темной материи, таких как карликовые галактики, в которых доминирует темная материя.

Потенциальные кандидаты на роль темной материи: вимпы, аксионы.

2. *Горячая темная материя*: темная материя состоит из частиц, которые были релятивистскими в ранней вселенной. Такая теория предсказывает подавление образования малых структур.

Основной кандидат: нейтрино.

Постановка задачи

Одной из ключевых задач современной астрофизики является получение распределения темной материи в галактиках. Так как напрямую измерить

плотность и массу темной материи невозможно, задача подразумевает восстановление ее профиля по косвенным наблюдательным данным: положениям звезд в галактике и их скоростям. В данной работе рассматривается проблема восстановления плотности темной материи в моделируемой галактике. Для симуляции карликовой сферической галактике с доминирующей темной материей используется пакет Galpy для языка программирования python. Далее, используя Байесовский метод GravSphere, определяется распределение темной материи в галактике по полученным данным. Такой подход позволяет сравнить полученный профиль темной материи с заданным при симуляции галактики и оценить точность метода.

NFW профиль

Профиль Наварро-Френка-Уайта является одним из наиболее часто используемых для описания распределения темной материи в галактиках. NFW профиль явно задается в виде [6]:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2}$$

где $\rho(r)$ – плотность темной материи на расстоянии r от центра галактики, R_s – характерный радиус, ρ_0 – характерная плотность.

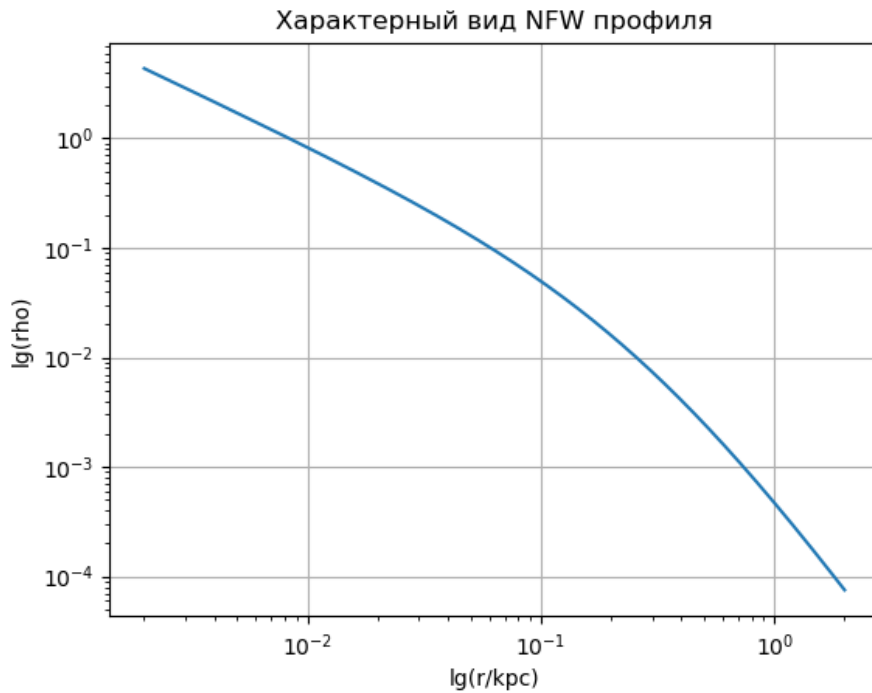


Рис2: характерный вид NFW профиля

Основной особенностью этого профиля является изменение угла наклона его графика в точке $r = R_s$

- При $r \leq R_s$ $\rho(r) \sim \frac{1}{r}$
- При $r \geq R_s$ $\rho(r) \sim \frac{1}{r^3}$

Таким образом профиль Наварро-Френка-Уайта хорошо описывает централизацию темной материи в галактике и ее разреженность за пределами галактики.

Также к особенностям NFW профиля плотности можно отнести расходимость его полной массы:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi(r')^2 \rho(r') dr'$$

где $M(r)$ – полная масса гало внутри радиуса r .

При $r \rightarrow \infty$ $\rho(r) \sim \frac{1}{r^3}$

Поэтому:

$$M(r) \sim \int_0^r \frac{1}{(r')^3} \cdot (r')^2 dr' = \int_0^r \frac{dr'}{r'} \sim \ln r$$

Ввиду этого, важная характеристика $R_{0.5}$ – радиус сферы, в которой содержится половина масса гало определяется неоднозначно и зависит от выбора точки, в которой масса приблизительно равна нулю. Чтобы это обойти, вводится характерный радиус R_{200} – радиус, внутри которого средняя плотность в 200 раз превышает критическую плотность вселенной.

Решая уравнение Пуассона:

$$\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}),$$

где $\phi(\vec{r})$ – гравитационный потенциал в точке \vec{r} , G – гравитационная постоянная, можно получить выражение для гравитационного потенциала [6]:

$$\phi(r) = \frac{-4\pi G \rho_0 R_s^3}{r} \ln \left(1 + \frac{r}{R_s} \right)$$

Модель Пламмера

Для описания распределения плотности барионной материи в звездных системах обычно используется другое приближение – Модель Пламмера. В ней плотности как функция радиуса задается в виде [7]:

$$\rho(r) = \frac{3M_0}{4\pi a^3} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

где M_0 – общая масса системы, a – характерный (масштабный радиус).
 отличие от NFW профиля, в модели Пламмера отсутствует сингулярность
 в точке $r = 0$, и на больших расстояниях $\rho(r) \sim \frac{1}{r^5}$, что обеспечивает
 конечность общей массы системы.

Такое распределение хорошо подходит для описания поведения барионной
 материи в карликовых, сферически симметричных галактиках.

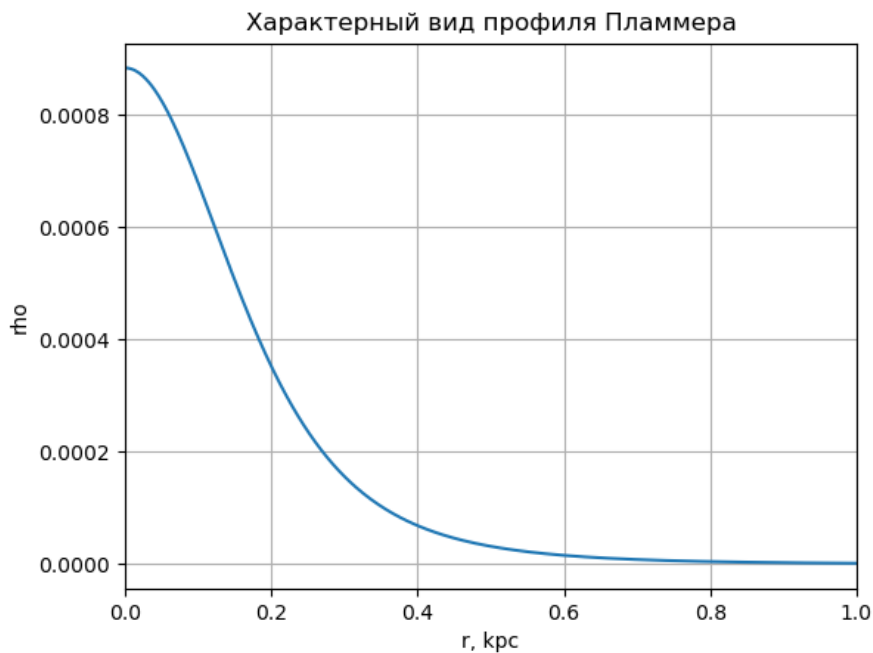


Рис. 3: характерный вид профиля Пламмера

Решение уравнения Пуассона дает выражения для потенциала Пламмера
 [7]:

$$\phi(r) = \frac{-GM_0}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

Симуляция звездной системы

Для симуляции карликовой, сферически симметричной галактики был выбран пакет Galpy языка программирования python.

Основные этапы симуляции:

1. Задание гравитационного потенциала галактики: была выбрана совокупность NFW потенциала с характерным радиусом $r_s = 0,3$ кпк и $\rho_0 = 10^8 M_\odot$ и потенциала Пламмера с тем же характерным радиусом и $M_0 = 10^5 M_\odot$.
2. Генерация начальных условий: в систему запускаются 10000 звезд с радиусами, подчиняющимися описанному выше профилю Пламмера, и равномерно распределёнными по сфере угловыми координатами. Компоненты их скоростей выбираются случайным образом в пределах половины круговой скорости, рассчитанной для соответствующего радиуса.
3. Эволюция системы: Galpy решает задачу движения звезд во времени от 0 до 10 миллиардов лет в заданной совокупности потенциалов, не учитывая вклад самих звезд в потенциал.
4. Измерение: в момент времени $t = 10$ Gyr проводится измерение положения звезд в плоскости неба, а также их скоростей по всем трем направлениям. Полученные данные используются в дальнейшем анализе.

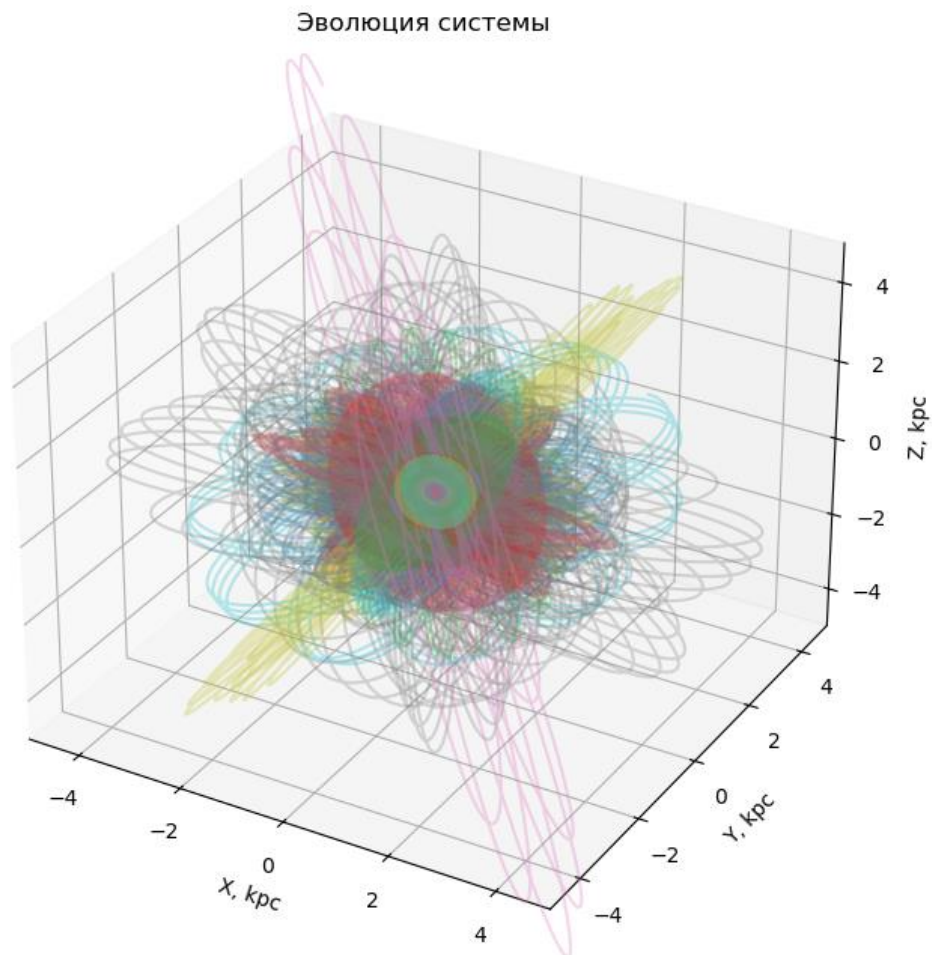


Рис.4: пример эволюции системы из 1000 звезд

Метод Gravsphere

Gravsphere – непараметрический метод восстановления распределения темной материи и анизотропии скоростей в сферических звездных системах по наблюдаемым проекциям их скоростей на луч зрения и их распределению на небе. Также возможен учет скоростей движения звезд в плоскости неба, если имеются соответствующие наблюдательные данные. Основным преимуществом метода является очень гибкое задание плотности темной материи в виде степенной функции со сколь угодно большим числом параметров. [1-5]

Звезды в системе с хорошей точностью подчиняются кинетическому уравнению Больцмана [1]:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x f \vec{v} - \nabla_v f \nabla_x \phi = 0 \quad (1)$$

где $f(\vec{x}, \vec{v})$ – функция распределения звезд в фазовом пространстве.

Интегрируя уравнение Больцмана по радиальной скорости и пренебрегая вращением системы, получим [1]:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial r} (v \sigma_r^2) + \frac{2\beta(r) \sigma_r^2}{r} = - \frac{GM(< r)}{r^2} \quad (2)$$

где σ_r, σ_t – радиальная и тангенциальная дисперсии скоростей звезд соответственно, $M(< r)$ – общая масса, заключенная в сфере радиуса r , $v(r)$ – радиальное распределение плотности звезд, движущихся в потенциале ϕ , $\beta(r)$ – функция анизотропии скоростей.

$$\beta(r) = 1 - \frac{\sigma_t^2}{\sigma_r^2} \quad (3)$$

Анизотропия описывает орбитальную конфигурацию системы:

- $\beta = 0$ соответствует полностью изотропному распределению скоростей
- $\beta = 1$ соответствует полностью радиальному распределению
- $\beta = -\infty$ соответствует полностью тангенциальному распределению

Интегрирование уравнения (2) дает выражение для радиальной дисперсии скоростей [1]:

$$\sigma_r^2(r) = \frac{1}{v(r)g(r)} \int_r^\infty \frac{GM(\tilde{r})v(\tilde{r})}{\tilde{r}^2} g(\tilde{r}) d\tilde{r} \quad (4)$$

где

$$g(r) = \exp\left(2 \int \frac{\beta(r)}{r} dr\right) \quad (5)$$

Проецируя уравнение (4) на луч зрения [1]:

$$\sigma_{Los}^2(R) = \frac{1}{\Sigma_*(R)} \int_R^\infty \left(1 - \beta \frac{R^2}{r^2}\right) \frac{v(r)\sigma_r^2(r)r}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr \quad (6)$$

где $\sigma_{Los}(R)$ – дисперсия скоростей на луче зрения, $\Sigma_*(R)$ – поверхностная плотность звезд.

Из уравнений (6) и (4) видно, что по одному лишь профилю $\sigma_{Los}(R)$ невозможно одновременно определить и анизотропию $\beta(r)$, и $M(< r)$, а следовательно, и $\rho(r)$. Этот эффект часто называют $\rho - \beta$ вырождением.

Параметризация ключевых функций в GravSphere осуществляется следующим образом [1]:

$$\beta(r) = \beta_0 + (\beta_\infty - \beta_0) \frac{1}{1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^n} \quad (7)$$

где β_0 – внутренняя асимптотическая анизотропия, β_∞ – внешняя асимптотическая анизотропия, r_0 – радиус перехода, n – параметр, отвечающий за остроту перехода.

$$v = \sum_j^{N_p} \frac{3M_j}{4\pi a_j^3} \left(1 + \frac{r^2}{a_j^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \quad (8)$$

То есть распределение плотности звезд параметризуется N_p числом профилей Пламмера.

Тогда выражение для $\Sigma_*(R)$ в формуле (6) имеет вид [1]:

$$\Sigma_*(R) = \frac{R^2}{\rho(R)} \sum_j^{N_p} \frac{15M_j}{4\pi a_j^5} \left(1 + \frac{R^2}{a_j^2}\right)^{-\frac{7}{2}} \quad \#(9)$$

Для параметризации распределения плотности темной материи пространство разбивается на логарифмически равномерные по радиусу интервалы r_j , в каждом из которых $\rho(r)$ представляет собой степенную функцию [1]:

$$\rho_{dm}(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma_0} & r < r_0 \\ \rho_0 \prod_{n=0}^{j < N_{dm}} \left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^{-\gamma_n} \left(\frac{r}{r_{j+1}}\right)^{-\gamma_n} & r_j < r < r_{j+1} \end{cases} \quad (10)$$

Для преодоления $\rho - \beta$ вырождения в GravSphere используются вириальные параметры [1]:

$$V_{s_1} = \frac{2}{5} \int_0^\infty GMv(5 - 2\beta)\sigma_r^2 r dr = \int_0^\infty \Sigma_* \langle v_{Los}^4 \rangle R dR \quad (11)$$

$$V_{s_2} = \frac{4}{35} \int_0^\infty GMv(7 - 6\beta)\sigma_r^2 r^3 dr = \int_0^\infty \Sigma_* \langle v_{Los}^4 \rangle R^3 dR \quad (12)$$

Преимущество их использования заключается в том, что они не зависят от $\rho(r)$ и, следовательно, позволяют получить дополнительные ограничения на $\beta(r)$ только из v_{Los} , тем самым устраняя ρ - β вырождение.

Если же имеются еще и наблюдательные данные о скоростях звезд в плоскости, перпендикулярной лучу зрения, то по аналогии с уравнением (5) можно дополнительно использовать следующие 2 уравнения для радиальной и тангенциальной дисперсий скоростей [1]:

$$\sigma_{pmr}^2(R) = \frac{1}{\Sigma_*(R)} \int_R^\infty \left(1 - \beta + \beta \frac{R^2}{r^2}\right) \frac{v(r)\sigma_r^2(r)r}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr \quad (13)$$

$$\sigma_{pmt}^2(R) = \frac{1}{\Sigma_*(R)} \int_R^\infty (1 - \beta) \frac{v(r)\sigma_r^2(r)r}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr \quad (14)$$

Таким образом алгоритм работы Gravsphere:

1. По фотометрическим данным восстановить профиль поверхностной плотности звезд $\Sigma_*(R)$ в виде (9) с некоторым начальным приближением $\rho(r)$.
2. Разделить звезды с измеренными скоростями по радиальным бинам. Для каждого бина рассчитать $\sigma_{Los}(R)$ и вириальные параметры (11) и (14)
3. На основе выбранной параметризации $\rho(r)$ и $\beta(r)$ рассчитать $\sigma_{Los}(R)$ по формуле (6), вириальные параметры (11) и (14), а

также при наличии соответствующих данных радиальную и тангенциальную дисперсии скоростей (13) и (14)

4. Сравнить полученные значения $\sigma_{Los}(R)$, $\sigma_{pmr}(R)$, $\sigma_{pmt}(R)$, V_{s_1} и V_{s_2} с наблюдаемыми, рассчитать χ^2 , задать априорные вероятности для параметров модели.
5. Использовать EMCEE алгоритм для построения вероятностного распределения параметров.

Результаты и заключение

Полученные в результате моделирования данные о положениях звёзд и их скоростях передавались алгоритму GravSphere.

Для восстановления поверхностного распределения звёзд в качестве фотометрических данных использовались положения всех 10 000 звёзд на плоскости неба.

Звёзды с кинематическими данными отбирались так, чтобы их распределение по радиусу было логарифмически равномерным в диапазоне от 0.01 кпк до 5 кпк, то есть в пределах области, где восстанавливался профиль плотности тёмной материи.

В результате работы GravSphere были получены модель максимального правдоподобия и апостериорные доверительные интервалы для профиля плотности тёмной материи. Число звёзд с кинематическими данными варьировалось: 10, 50, 200 и 500.

По полученным графикам можно сделать вывод о том, что использование кинематических данных 10, 50 и 200 звезд не позволяет точно восстановить распределение плотности темной материи, однако накладывает некоторые ограничения на возможные формы этого распределения.

Использование же данных кинематических данных 500 звезд позволило с точностью около 15 процентов восстановить профиль на широком интервале от 0.15 до 5 кпк.

Чтобы установить возможную причину расхождения полученных методом GravSphere и заданных при моделировании галактики данных на малых расстояниях, была предпринята попытка увеличить число звезд с кинематическими данными в проблемном интервале 0.0015 – 0.15 кпк. Однако это не привело к улучшению точности восстановления профиля.

Таким образом, эти расхождения не связаны с недостатком данных в указанном интервале и являются следствием ограничений метода GravSphere.

Список источников

- [1] Read J. I., Steger P. How to break the density-anisotropy degeneracy in spherical stellar systems // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2017. — Vol. 471, Issue 4. — P. 4541–4558. — DOI: 10.1093/mnras/stx1798.
- [2] Read J. I., Walker M. G., Steger P. The case for a cold dark matter cusp in Draco // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2018. — Vol. 481, Issue 1. — P. 860–877. — DOI: 10.1093/mnras/sty2286.
- [3] Genina A., Read J. I., Frenk C. S., Cole S., Benítez-Llambay A., Ludlow A. D., Navarro J. F., Oman K. A., Robertson A. To β or not to β : can higher order Jeans analysis break the mass-anisotropy degeneracy in simulated dwarfs? // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2020. — Vol. 498, Issue 1. — P. 144–160. — DOI: 10.1093/mnras/staa2352. Kyle Oman.
- [4] Cautun M., van de Weygaert R., Jones B. J. T., Frenk C. S., Aragon-Calvo M. A., van der Hulst J. M. The cosmic web: a critical review // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2021. — Vol. 505, Issue 4. — P. 5686–5705. — DOI: 10.1093/mnras/stab1576.
- [5] Read J. I. Gravsphere [Электронный ресурс]. Доступно по ссылке: <https://github.com/justinread/gravsphere>
- [6] Navarro–Frenk–White profile [Электронный ресурс] // Wikipedia: свободная энциклопедия. Доступно по ссылке: https://en.wikipedia.org/wiki/Navarro%E2%80%93Frenk%E2%80%93White_profile
- [7] Plummer Model [Электронный ресурс] // Wikipedia: свободная энциклопедия. Доступно по ссылке: https://en.wikipedia.org/wiki/Navarro%E2%80%93Frenk%E2%80%93White_profile
- [8] Dark Matter [Электронный ресурс] // Wikipedia: свободная энциклопедия. Доступно по ссылке: https://en.wikipedia.org/wiki/Dark_matter

Приложение

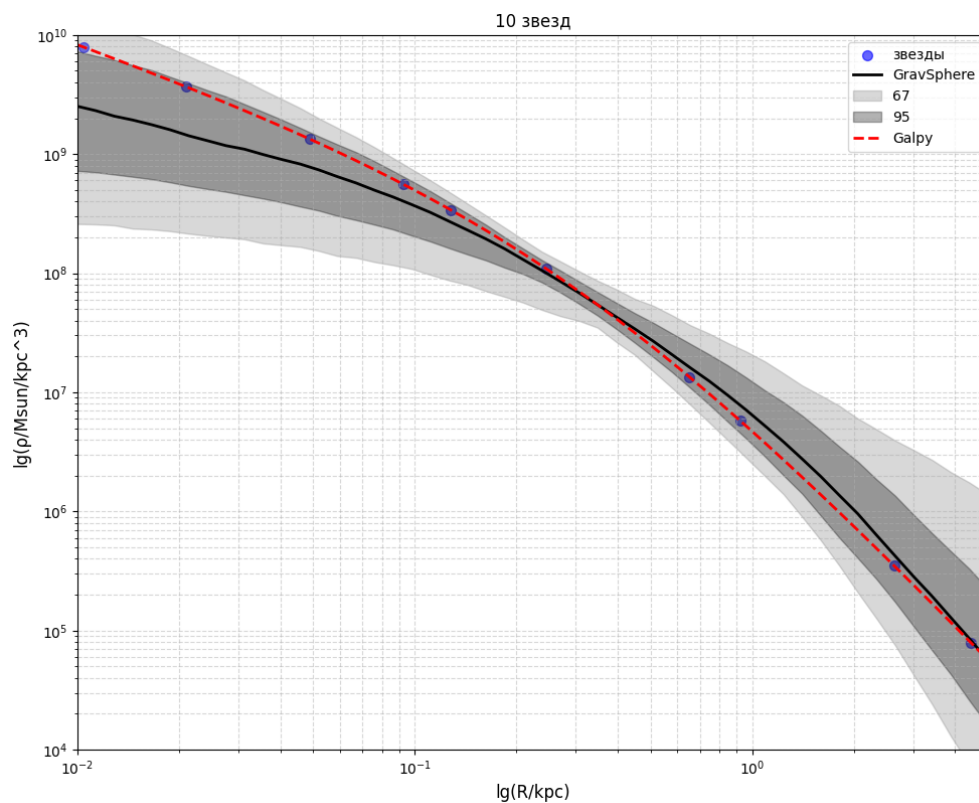


Рис.1: Восстановленный по 10 звездам профиль темной материи

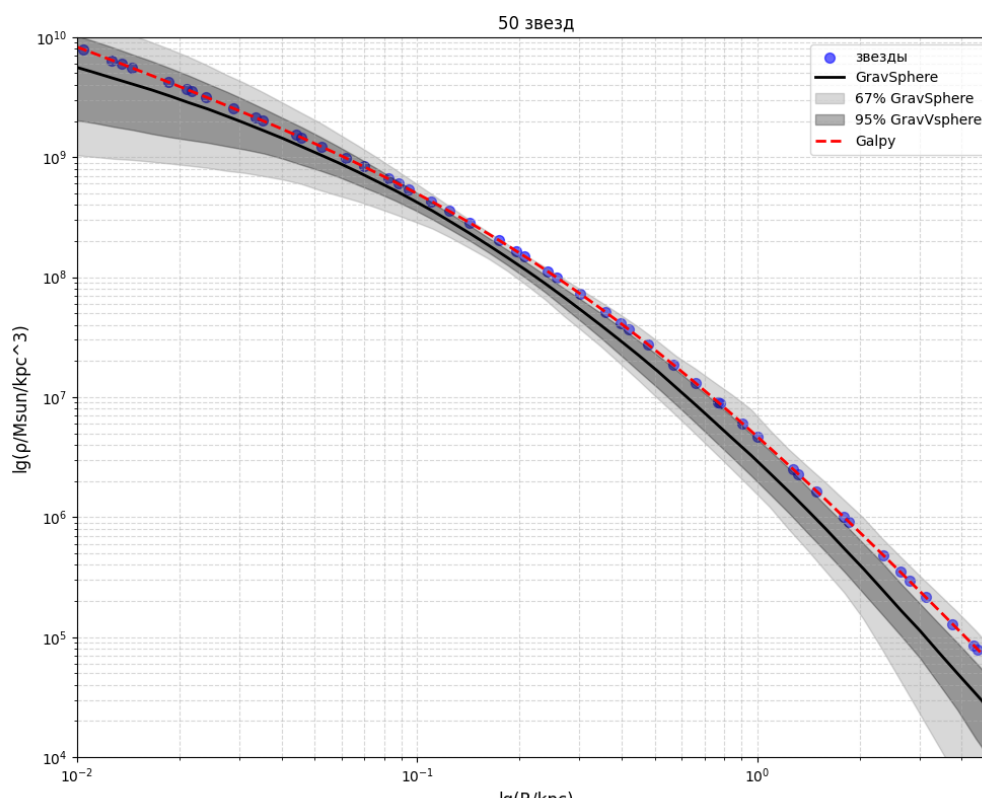


Рис.2: Восстановленный по 50 звездам профиль темной материи

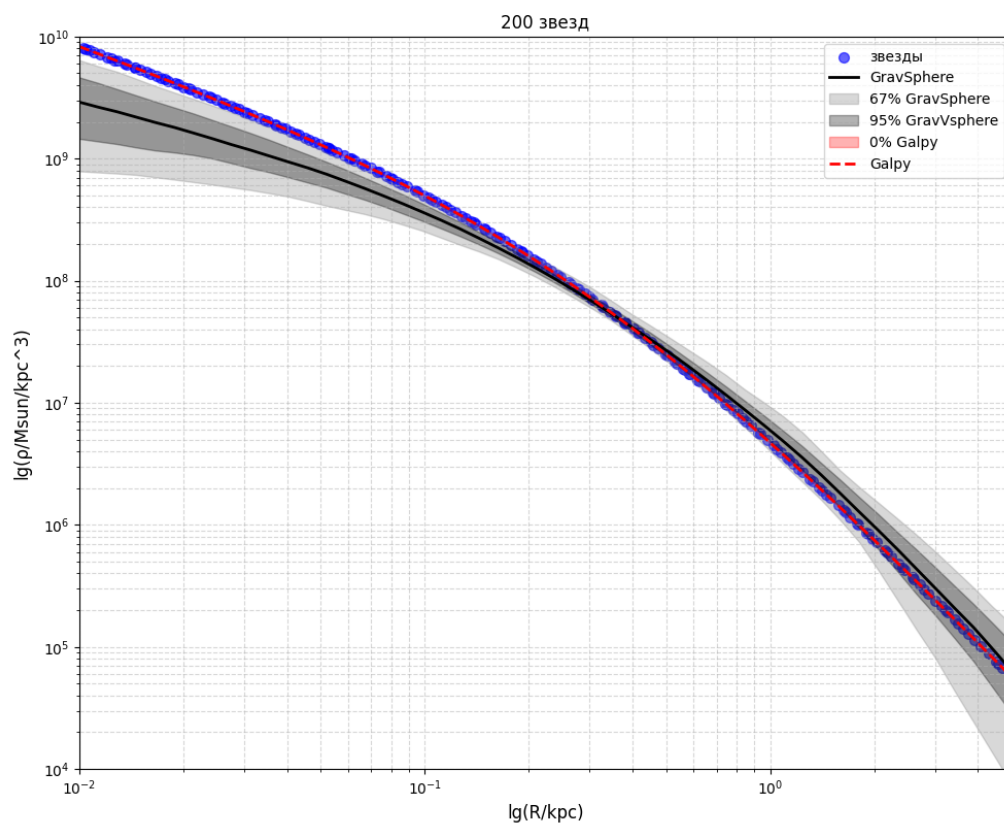


Рис.3: Восстановленный по 200 звездам профиль темной материи

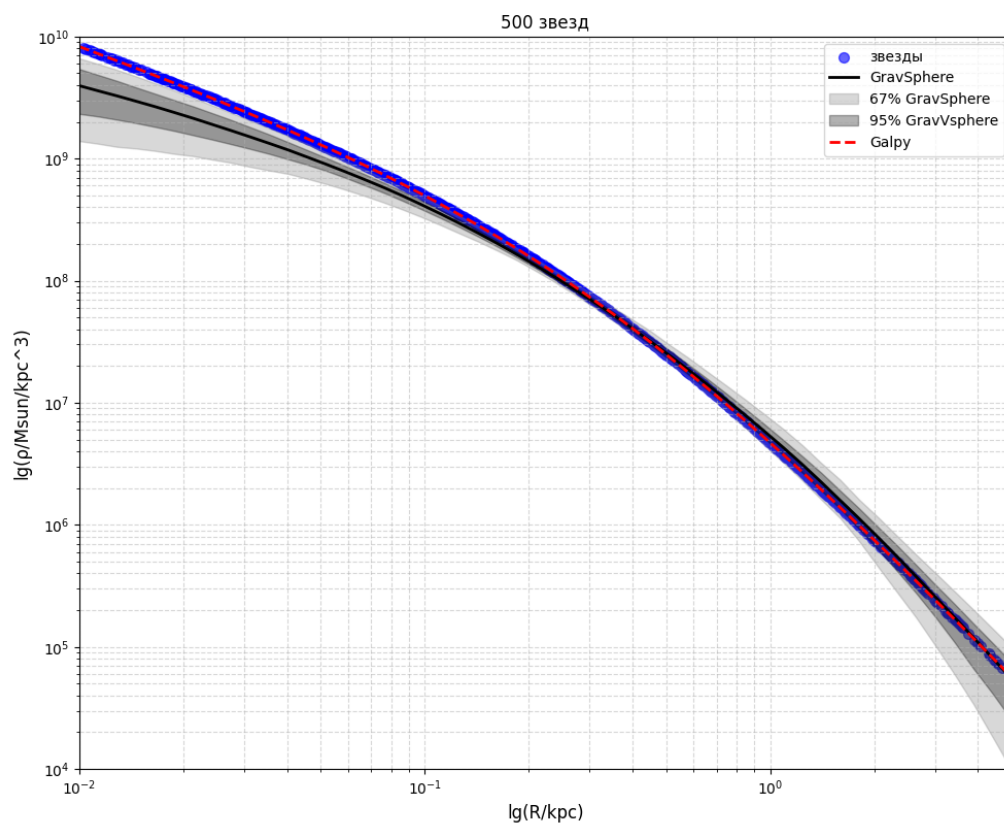


Рис.4: Восстановленный по 500 звездам профиль темной материи

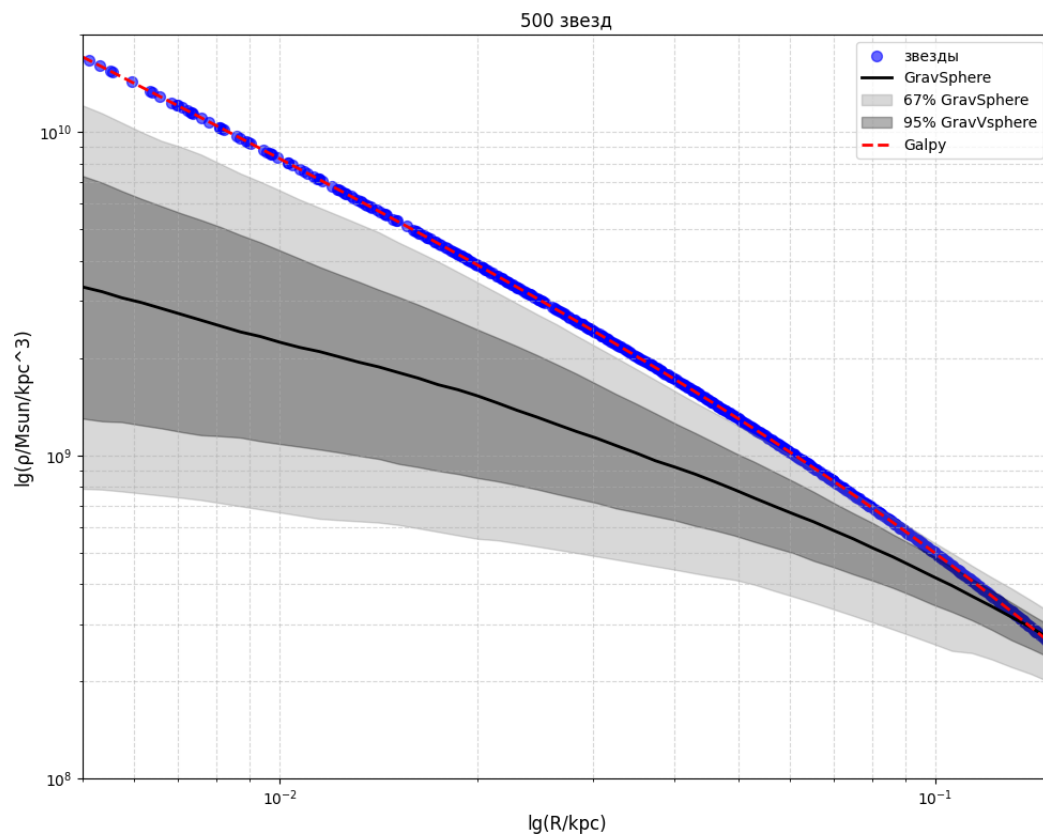


Рис.5: Восстановленный по 500 звездам профиль темной материи в меньшем интервале

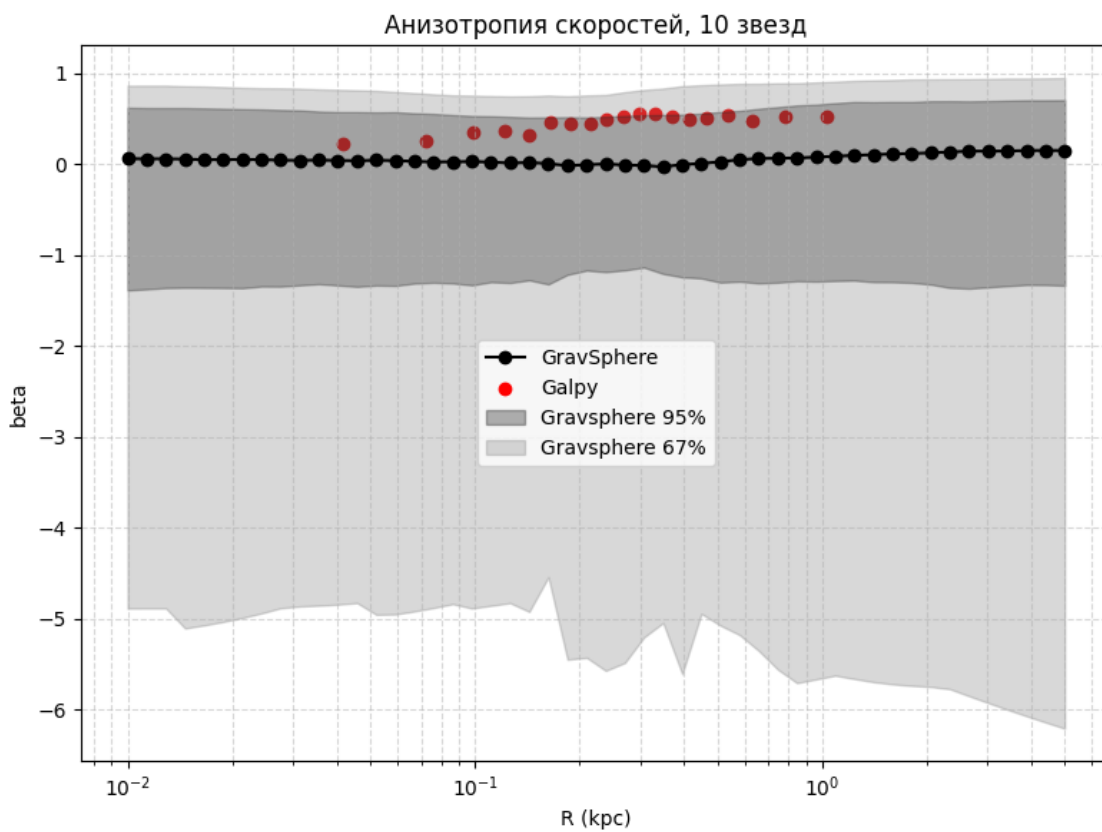


Рис.6: Восстановленная по 10 звездам анизотропия скоростей

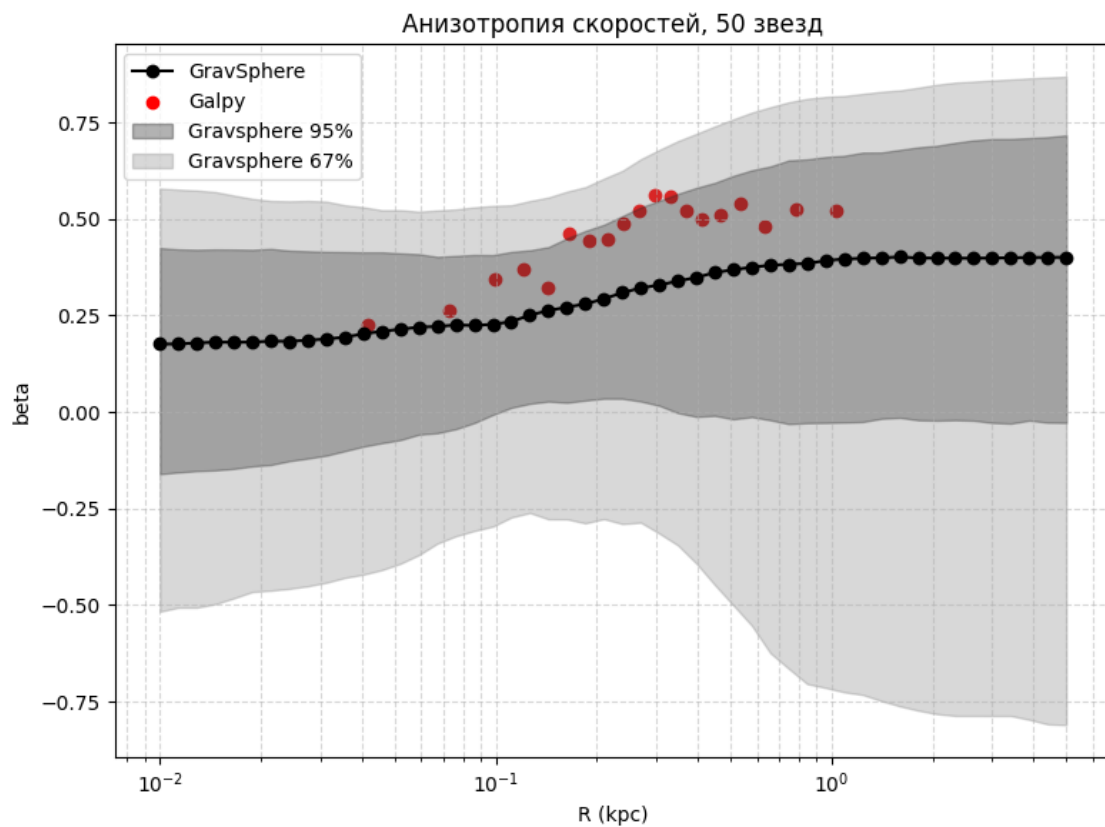


Рис.7: Восстановленная по 50 звездам анизотропия скоростей

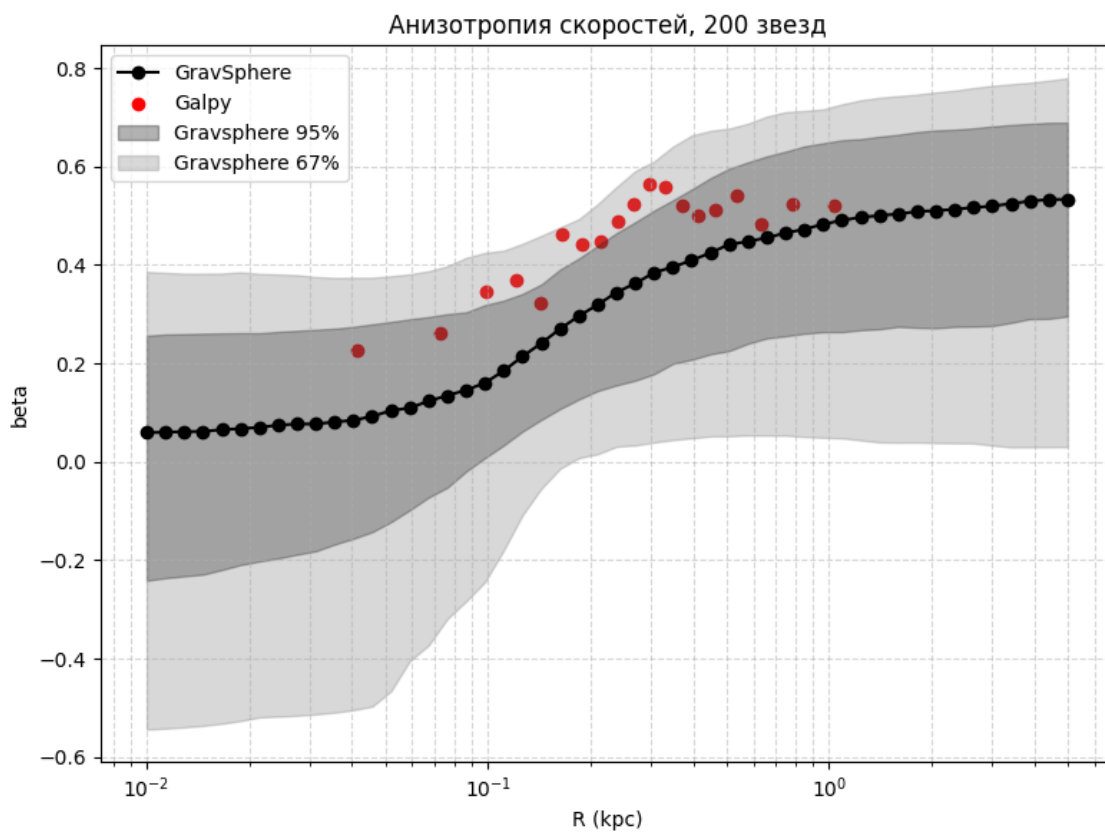


Рис.8: Восстановленная по 200 звездам анизотропия скоростей

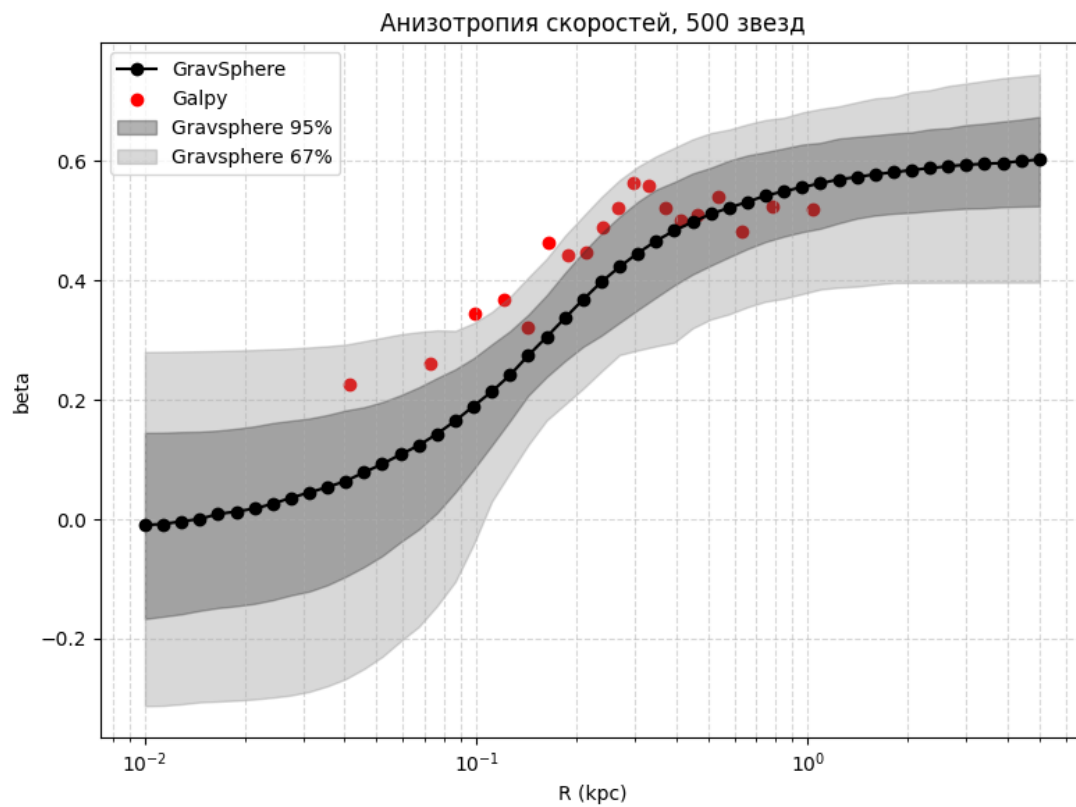


Рис.9: Восстановленная по 500 звездам анизотропия скоростей