МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА
на тему

«Эффект бесконечной энергии при столкновении частиц вблизи чёрной дыры»

Выполнила:
студентка 2 курса 210 ак. группы
Панфилова Мария Антоновна

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва 2025

Содержание

Введение

В работе исследуется следующий эффект: при столкновении двух частиц вблизи горизонта вращающейся чёрной дыры Керра энергия в системе центра масс может неограниченно расти (эффект BSW – Bañados-Silk-West). Он демонстрирует, как экстремальные гравитационные поля могут служить "ускорителями частиц" с энергиями, недостижимыми в лабораторных условиях. Это явление исследовалось в ряде работ, где было показано, что ключевую роль играет наличие "критической" частицы, для которой выполняется условие

$$E - \omega_H L = 0,$$

где ω_H – угловая скорость чёрной дыры на горизонте.

Цель данной работы – дать альтернативное кинематическое объяснение эффекта BSW, основанное на анализе трёхмерных скоростей частиц.

Эффект представляет интерес как для теоретической физики, открывая возможность исследования планковских масштабов вблизи горизонта чёрной дыры, так и для астрофизики, поскольку столкновения с неограниченно растущими энергиями могут влиять на наблюдаемый поток испускаемых частиц [6, 7].

1. Основные формулы

Рассмотрим пространство-время вращающейся черной дыры, описываемое метрикой Керра:

$$ds^2 = -N^2dt^2 + g_{\phi\phi}(d\phi - \omega dt)^2 + dl^2 + g_{zz}dz^2. \tag{1}$$

N - коэффициент, который определяет, насколько сильно замедляется время в гравитационном поле черной дыры по сравнению с удаленным наблюдателем. На горизонте событий выполняется условие $N = 0$, что соответвует точки, в которой временная компонента метрики исчезает. На бесконечности $N \to 1$ (время течет "нормально"). $g_{\phi\phi}$, g_{zz} - коэффициенты метрики, не зависящие от t и ϕ. Предполагается, что эти коэффициенты являются четными функциями z, поэтому экваториальная плоскость $\theta = \pi/2$ ($z = 0$) – плоскость симметрии.

Координаты задаются следующим образом: $x^\mu = (t, l, z, \phi)$, а 4-скорость $u^\mu = (\dot{t}, \dot{l}, \dot{z}, \dot{\phi})$, где l - радиальная координата, перпендикулярная поверхности горизонта событий, z - координата, перпендикулярная экваториальной плоскости, ϕ - угол поворота вокруг оси вращения черной дыры.

Рассмотрим движение массивных частиц в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ и получим уравнения движения. Для начала, найдём выражение для лагранжиана частицы L.

$$S = -m\int d\tau = -m\int\sqrt{-(ds)^2} =$$
$$= -m\int\sqrt{N^2(\dot{t})^2 - g_{\phi\phi}(\dot{\phi} - \omega\dot{t})^2 - l^2 - (\dot{z})^2 g_{zz}}\, d\tau$$

S - действие для частицы массой m, движущейся в пространстве-времени с метрикой (1), τ - собственное время частицы.

С другой стороны: $S = \int L d\tau$

Таким образом, $L = -m\sqrt{N^2(\dot{t})^2 - g_{\phi\phi}(\dot{\phi} - \omega\dot{t})^2 - l^2 - (\dot{z})^2 g_{zz}}.$

Так как L явно не зависит от t и ϕ, то обобщённые импульсы, а следовательно, энергия и угловой момент вращения – сохраняющиеся величины:

$$-p_t = -\frac{dL}{d\dot{t}} = E \qquad\qquad p_\phi = \frac{dL}{d\dot{\phi}} = L$$

С учётом нормировки 4-скорости $u^\mu u_\mu = -1$, и принимая массу m=1, получаем уравнения движения:

$$\dot{t} = u^0 = \frac{E - \omega L}{N^2}, \tag{2}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{g_{\phi\phi}} + \frac{\omega(E - \omega L)}{N^2}, \tag{3}$$

$$\dot{l}^2 = \frac{(E - \omega L)^2}{N^2} - 1 - \frac{L^2}{g_{\phi\phi}}, \tag{4}$$

В работе используются единицы измерения, в которых скорость света $c = 1$. Предполагается, что $\dot{t} > 0$, что соответствует условию $E - \omega L > 0$ (движение вперед во времени). Однако на горизонте событий допускается равенство $E - \omega_H L = 0$ (индекс «H» обозначает величины, вычисленные на горизонте).

В зависимости от величины энергии и углового момента, частицы классифицируются следующим образом:

- Обычные частицы: $E - \omega_H L > 0$
- Критические частицы: $E - \omega_H L = 0$

Такая классификация позволяет анализировать динамику частиц вблизи горизонта событий и исследовать эффекты, связанные с их столкновениями.

Для удобства расчётов, перейдём в ZAMO (zero angular momentum observers) — локально инерциальную систему отсчёта, связанную с наблюдателем, который не имеет углового момента ($L = 0$) и "покоится" относительно локального пространства-времени, но может иметь радиальное ускорение. В метрике Керра ZAMO определяется через тетрадные векторы $h_{(a)\mu}$, которые позволяют проектировать 4-векторы на локальную систему координат и использовать формулы специальной теории относительности в локально плоском пространстве-времени. Здесь a — индекс локального лоренцева пространства, а μ — координатный индекс. В координатах $x^\mu = (t, l, z, \phi)$ тетрадные векторы выбираются следующим образом:

$$h_{(0)\mu} = -N \cdot (1, 0, 0, 0) \quad \text{- временная компонента} \tag{5}$$

$$h_{(1)\mu} = (0, 1, 0, 0) \quad \text{- радиальная компонента} \tag{6}$$

$$h_{(2)\mu} = \sqrt{g_{zz}}(0, 0, 1, 0) \quad \text{- вертикальная компонента} \tag{7}$$

$$h_{(3)\mu} = \sqrt{g_{\phi\phi}}(-\omega, 0, 0, 1) \quad \text{- азимутальная компонента} \tag{8}$$

Трёхмерная скорость частицы в системе ZAMO задаётся проекцией 4-скорости u^{μ} на тетрадные векторы:

$$v^{(i)} = v_{(i)} = \frac{u^{\mu} h_{\mu(i)}}{-u^{\mu} h_{\mu(0)}}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{9}$$

где $h_{\mu(0)}$ - временная компонента тетрады, $h_{\mu(i)}$ - пространственные компоненты.

Из уравнений движения (2)-(4) и свойств тетрады получаем:

Проекция 4-скорости частицы u_{μ} на временную компоненту тетрадного базиса:

$$u_{\mu} h^{\mu}_{(0)} = g_{\mu\nu} u^{\nu} h^{\mu}_{(0)} = -N\dot{t} = -\frac{E - \omega L}{N}. \tag{10}$$

Эта проекция представляет собой энергию частицы $E_{\text{лок}}$, измеренную наблюдателем ZAMO в его локальной системе отсчёта.

Проекция на азимутальное направление:

$$u_{\mu} h^{\mu}_{(3)} = g_{\mu\nu} u^{\nu} h^{\mu}_{(3)} = \sqrt{g_{\phi\phi}}(-\omega u^0 + u^3) = \frac{L}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \tag{11}$$

Эта проекция представляет собой локальный угловой момент частицы, измеренный наблюдателем в ZAMO.

Азимутальная скорость:

$$v^{(3)} = \frac{LN}{\sqrt{g_{\phi\phi}}(E - \omega L)} \tag{12}$$

Радиальная скорость:

$$v^{(1)} = \sqrt{1 - \frac{N^2}{(E - \omega L)^2} \left(1 + \frac{L^2}{g_{\phi\phi}}\right)} \tag{13}$$

Полная скорость v определяется как:

$$v^2 = [v^{(1)}]^2 + [v^{(2)}]^2. \tag{14}$$

Отсюда следуют важные для дальнейшего анализа соотношения:

$$E - \omega L = \frac{N}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (15) \tag{15}$$

$$v^2 = 1 - \left(\frac{N}{E - \omega L}\right)^2 \tag{16}$$

2. Предельные случаи относительной скорости

Энергия столкновения двух частиц в системе центра масс $E_{\text{c.m.}}$ определяется как скалярная величина:

$$E^2_{\text{c.m.}} = -(p^\mu_1 + p^\mu_2)(p_{1\mu} + p_{2\mu}) = m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 u^\mu_1 u_{2\mu}, \tag{17}$$

где $p^\mu_i = m_i u^\mu_i$ — 4-импульс i-ой частицы ($i = 1, 2$), m_i — масса покоя частицы, u^μ_i — её 4-скорость.

В искривлённом пространстве-времени (ОТО): $u^\mu_1 u_{2\mu} = g_{\mu\nu} u^\mu_1 u^\nu_2$

В плоском пространстве времени (СТО): $u^\mu_1 u_{2\mu} = \eta_{\mu\nu} u^\mu_1 u^\nu_2$,
где $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского $(-1, 1, 1, 1)$.

Для удобства, выберем систему отсчёта, связанную с одной из частиц (например, с частицей 2). В тетрадном представлении это позволяет использовать формулы специальной теории относительности в локально плоском пространстве-времени:

$u^\mu_1 u_{2\mu} = \eta_{\mu\nu} u^\mu_1 u^\nu_2 = -u^0_1 u^0_2 + u^1_1 u^1_2 + u^2_1 u^2_2 + u^3_1 u^3_2$

Учитывая, что в СТО $u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$, получим: $u^\mu_1 u_{2\mu} = -\gamma_1\gamma_2(1 - \mathbf{v_1}\mathbf{v_2})$,
где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ — Лоренц-фактор

В системе, в которой частица 2 покоится:
$u^a_2 = (1, 0, 0, 0)$ – 4-скорость частицы 2 (в её собственной системе отсчёта координаты изменяются только по времени)
$u^a_1 = (\gamma, \gamma w^{(1)}, \gamma w^{(2)}, \gamma w^{(3)})$ – 4-скорость частицы 1, где $w^{(i)}$ — компоненты относительной 3-скорости частицы 1 в этой системе.

Тогда их скалярное произведение: $u^a_1 u_{2a} = -\gamma$

В результате:

$$\gamma = -u^a_1 u_{2a} = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} = \gamma_1\gamma_2(1 - \mathbf{v_1}\mathbf{v_2}) \tag{18}$$

Из (18) выражается относительная скорость

$$w = \sqrt{1 - \frac{(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)}{(1 - \mathbf{n_1 n_2} v_1 v_2)^2}} \tag{19}$$

Рассмотрим различные сценарии поведения относительной скорости w между двумя частицами в зависимости от их скоростей v_1, v_2 и их взаимной ориентации.

а) Одна частица ультрарелятивистская.

$v_1 \to 1, v_2 < 1, (\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2})$ – произвольное.

Из уравнения (19) следует, что относительная скорость $w \to 1$ независимо от значения $(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2})$. Это соответствует фундаментальному принципу, согласно которому скорость света $c = 1$ одинакова во всех системах отсчёта.

б) Две ультрарелятивистские частицы

Обе частицы приближаются к скорости света: $v_i = 1 - A_i\delta$, где A_i — константы, $\delta \ll 1$.

б1) $(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}) \neq 1$ – непараллельные траектории

$w \to 1$ при $\delta \to 0$:

$$w^2 \approx 1 - \frac{4A_1A_2\delta^2}{[1 - (\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2})]^2} \tag{20}$$

б2) $(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}) = 1$ – частицы движутся в одном направлении

$$w \approx \frac{|A_1 - A_2|}{A_1 + A_2} < 1 \tag{21}$$

В этом случае относительная скорость остаётся досветовой, даже если собственные скорости частиц стремятся к 1.

в) Две досветовые частицы

$v_1 < 1, v_2 < 1, (\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2})$ — произвольное

В этом случае $w < 1$. Хотя этот случай тривиален с точки зрения относительной скорости, он играет важную роль в контексте обсуждаемых эффектов (например, при анализе столкновений вблизи горизонта чёрной дыры).

3. Асимптотики вблизи горизонта

Исследуем поведение скоростей частиц вблизи горизонта событий для двух типов частиц: обычных и критических.

- **Обычные частицы** $(E - \omega_H L \neq 0)$

При приближении к горизонту $(N \to 0)$ из (15) следует, что абсолютная скорость $v \to 1$. Из (12) и (13) получаем:

$v^{(3)} \to 0$ – азимутальная скорость,

$v^{(1)} \to 1$ – радиальная скорость

Обычные частицы достигают скорости света у горизонта, двигаясь радиально внутрь чёрной дыры, что согласуется с эффектом "замораживания" для внешнего наблюдателя. Для любых двух таких частиц $(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}) = 1$.

- **Критические частицы** $(E - \omega_H L = 0)$

Угловая скорость чёрной дыры вблизи горизонта раскладывается в ряд:

$$\omega = \omega_H - B_1 N + B_2 N^2 + \dots \tag{22}$$

Здесь, из-за свойств метрики $B_1 = 0$ для неэкстремальных чёрных дыр ($a < M$), $B_1 \neq 0$ может появляться в экстремальном случае ($a = M$) или при учёте дополнительных эффектов [8].

С учётом (15), получим:

$$v^2 = 1 - \frac{1}{L^2 B_1^2} < 1 \tag{23}$$

То есть, критическая частица не достигает скорости света на горизонте, в отличие от обычных частиц. Компоненты скорости $v^{(1)}$ (радиальная) и $v^{(3)}$ (азимутальная) имеют одинаковый порядок. Частица пересекает горизонт под ненулевым углом к нормали и для двух критических частиц: $(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}) \neq 1$.

На основании этих свойств можно классифицировать столкновения частиц:

А. Столкновение двух обычных частиц

При приближении к горизонту $(N \to 0)$, их скорости $v \to 1$, направления движения строго радиальны ($\mathbf{n_1} \parallel \mathbf{n_2}$), относительная скорость $w < 1$ (случай b2). Эффект неограниченного роста энергии отсутствует. Даже при ультрарелятивистских скоростях, параллельность траекторий обычных частиц исключает возникновение сингулярности в энергии системы центра масс.

Б. Столкновение двух критических частиц

Их скорости на горизонте $v < 1$, направления движения образуют ненулевой угол $(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2})$, относительная скорость $w < 1$ (случай с). Эффект неограниченного роста энергии отсутствует. Критические частицы, несмотря на их особые свойства, при столкновении друг с другом не создают условий для сингулярного роста энергии.

В. Столкновение обычной (1) и критической частицы (2)

Этот тип столкновений относится к случаю а, описанному выше. В результате $w \to 1, \gamma \to \infty$, эффект неограниченного роста энергии возможен.

Реализуемость эффекта осложняется тем, что критическая частица не может достичь горизонта за конечное собственное время, так как собственное расстояние до горизонта бесконечно для частицы с $v_2 < 1$. Поэтому рассмотрим околокритические частицы ($E \approx \omega_H L$).

В неэкстремальном случае (случае, относящемся к чёрным дырам, у которых параметр вращения a не достигает своих максимально возможных значений) околокритическая частица не может достичь горизонта, поскольку при $N \to 0$ выполняется: $\omega - \omega_H \sim N^2$ (подробнее в [3],[5]), что делает правую часть уравнения (4) отрицательной. Это означает, что частица физически не может существовать в такой области (мнимая скорость), её траектория "зависает" вблизи горизонта. Однако частица может сколь угодно близко приближаться к горизонту. То есть для наблюдения эффекта необходимо обеспечить положительность $\dot{l}^2$ в (4).

Пусть энергия частицы близка к критическому значению:

$$E = \omega_H L(1 + \delta), \quad \delta \ll 1.$$

Для выполняения условия, необходимо $\delta \geq N$. Параметр δ можно представить в виде: $\delta = AN(P)$, где: A — конечный коэффициент, P — точка столкновения. Используя (16), получим:

$$1 - v^2 = \left(\frac{N}{E - \omega_H L}\right)^2 \approx \frac{1}{(\omega_H L A)^2} \neq 0.$$

Таким образом, $v < 1$. То есть, относительная скорость $w \to 1$, лоренц-фактор $\gamma \to \infty$ и энергия в системе центра масс неограниченно растёт, когда точка столкновения выбирается всё ближе к горизонту ($N \to 0$), а энергия частицы приближается к критическому значению ($\delta \to 0$) так, чтобы $\delta \geq N$ (тонкая настройка параметров). Однако для этого требуется, чтобы:

- **Частица многократно рассеивалась**.

В метрике Керра частицы не могут изначально иметь на бесконечности параметры, удовлетворяющие критическому условию $E \approx \omega_H L(1+\delta)$, так как это соотношение достигается только вблизи горизонта. Чтобы оно выполнялось, частица должна приобретать критичность в процессе движения, что, в свою очередь, требует многократных взаимодействий с окружающей средой (аккреционным диском, другими частицами) и постепенной коррекции параметров E и L через гравитационное излучение, электромагнитное торможение (для заряженных частиц) или столкновение с нерелятивистскими частицами плазмы.

- **Столкновение должно произойти в узкой полосе вблизи горизонта**

Ширина зоны столкновения оценивается как $r \approx r_H\delta$ (для типичных параметров $r \leq 10^{-3}r_H$), где r_H — радиус горизонта. За пределами этой зоны δ становится больше N, и относительная скорость частиц w перестает стремиться к c. (подробнее см. [2],[3]).

Это объясняет, почему эффект BSW остается теоретически предсказанным, но редко наблюдаемым в астрофизических условиях.

4. Столкновение массивных и безмассовых частиц

Если одна из сталкивающихся частиц безмассовая, приведенное выше объяснение возникновения эффекта BSW неверно, поскольку для безмассовой частицы не существует сопутствующей системы отсчета, в любой системе отсчета такая частица движется всегда со скоростью света. Для краткости, назовём массивную частицу электроном, а безмассовую - фотоном.

Случай, когда обе частицы не имеют массы не рассматривается. Классическая электродинамика является линейной теорией, поэтому взаимодействие между фотонами может происходить только за счет слабых квантово электродинамических эффектов, которыми в данной работе пренебрегают.

Вид уравнений движения для фотона отличаются, по сравнению с (2)–(4).

Во-первых, для фотона энергия выражается через частоту: $E = h\nu$ (в дальнейшем считаем, что $h = 1$).

Во-вторых, в случае безмассовых частиц (фотонов) их движение описывается светоподобными геодезическими ($ds^2 = 0$), в отличие от массивных частиц, где используется собственное время τ (нормированное как $ds^2 = -c^2 d\tau^2$). Поскольку для фотонов $d\tau = 0$, то дифференцирование координат производится по, так называемому аффинному параметру λ.

В-третьих, волновой вектор $k^\mu = dx^\mu/d\lambda$ – это 4-импульс фотона (поскольку для безмассовых частиц $p^\mu = \hbar k^\mu$). В ОТО k^μ – касательный вектор к светоподобной геодезической и сохраняется вдоль неё (в стационарных и аксиально-симметричных пространствах).
Учитывая нормировку волнового вектора $k^\mu k_\mu = 0$, уравнения движения для фотона в экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$) имеют вид:

$$\frac{dt}{d\lambda} = k^0 = \frac{\nu_0 - \omega L_2}{N^2}, \tag{24}$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L_2}{g_{\phi\phi}} + \frac{\omega(\nu_0 - \omega L_2)}{N^2}, \tag{25}$$

$$\left(\frac{dl}{d\lambda}\right)^2 = \frac{(\nu_0 - \omega L_2)^2}{N^2} - \frac{L_2^2}{g_{\phi\phi}} \tag{26}$$

где $\nu_0 = -k_0$ – частота, измеренная удалённым наблюдателем на бесконечности ($\omega \to 0$ и $N \to 1$), $L_2 = k_\phi$ – сохраняющийся угловой момент фотона.

По аналогии, предполагается, что $\frac{dt}{d\lambda} > 0$, так что $\nu_0 - \omega L > 0$ (движение вперёд во времени), за исключением горизонта, где допускается равенство $\nu_0 - \omega_H L_1 = 0$ (критический фотон).

Хотя фотон всегда движется со скоростью света, переход в ZAMO позволяет локально измерить частоту и импульс фотона через проекции $k^{(a)}$ и учесть гравитационное красное смещение. Поэтому для объяснения бесконечного роста энергии, применим этот подход к фотону.

Для фотона используется волновой вектор $k^\mu = dx^\mu/d\lambda$ (нормировка: $k^\mu k_\mu = 0$). Поскольку k^μ светоподобен, $d\tau = 0$, поэтому используется параметр λ, не требующий нормировки как в (9):

$$k^{(i)} = k_{(i)} = k^\mu h_{\mu(i)}, \tag{27}$$

$$k^{(0)} = k^\mu h^{(0)}_\mu = -k^\mu h_{\mu(0)}. \tag{28}$$

Используя полученное соотношение и уравнения движения (2)-(4), находим:

$$k^{(1)} = -\sqrt{\nu^2 - \frac{L^2}{g_{\phi\phi}}}, \tag{29}$$

$$k^{(3)} = \frac{L}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}. \tag{30}$$

Аналог уравнения (15) имеет вид:

$$\nu = \frac{\nu_0 - \omega L}{N}. \tag{31}$$

Для безмассовых частиц используется та же тетрада, что и для массивных, но нормировка $k^\mu k_\mu = 0$ упрощает уравнения и временная компонента тетрады для фотона будет иметь вид:

$$h^\mu_{(0)} = \left(\frac{1}{N}, 0, 0, \frac{\omega}{N}\right). \tag{32}$$

Квадрат пространственной части волнового вектора:

$$k^2 = [k^{(1)}]^2 + [k^{(2)}]^2 = \frac{(\nu_0 - \omega L)^2}{N^2} = \nu^2, \tag{33}$$

$$k^{(0)} = -k_\mu h^\mu_{(0)} = \frac{\nu_0 - \omega L}{N} = \nu. \tag{34}$$

Ранее было получено:

Для **обычных электронов** в пределе горизонта событий ($N \to 0$):

$$v^{(3)} \to 0, \qquad v^{(1)} \to 1$$

Единичный вектор скорости $\vec{n}_1 = \dfrac{\vec{v}}{v}$ направлен вдоль координаты l, то есть перпендикулярно горизонту.

Для **критических электронов** компоненты $v^{(1)}$ и $v^{(3)}$ имеют одинаковый порядок величины, а вектор $\vec{n}_1$ нестрого перпендикулярен горизонту.

Для **фотонов** компоненты $k^{(1)}$ и $k^{(3)}$ имеют одинаковый порядок. Аналогичные свойства наблюдаются и для фотонов: единичный вектор $\vec{n}_2 = \dfrac{\vec{k}}{k}$ не перпендикулярен горизонту.

Таким образом $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1$ – верно только для обычных электронов (или критического фотона и электрона – подробнее далее), а для остальных частиц $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \neq 1$.

5. Общая классификация столкновений частиц

Случай 1. Критический электрон и обычный фотон

При переходе в систему отсчёта, связанную с электроном, частота фотона ν' в этой системе связана с частотой ν в системе ZAMO релятивистской формулой:

$$\nu' = \gamma(\nu - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) = \nu\gamma\left[1 - \nu(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)\right] \tag{35}$$

Для критической частицы $v \neq 1$, поэтому лоренц-фактор γ остаётся конечным, скалярное произведение $(\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}) \neq 1$, поэтому и ν' имеет порядок ν. Поскольку фотон обычный, то с учётом (37) при $N \to 0$, $\nu \to \infty$, что приводит к $\nu' \to \infty$.

Результирующий эффект можно интерпретировать как следствие двух факторов. С одной стороны, существует бесконечное синее смещение излучения из-за сильного гравитационного поля вблизи черной дыры. С другой стороны, существует красное смещение из-за эффекта Доплера, поскольку в лабораторных условиях приемник излучения удаляется от фотона ($v^{(1)} < 0$ и $k^{(1)} < 0$). В рассматриваемом случае первый фактор бесконечен, тогда как второй конечен, так что конечный результат обусловлен синим смещением.

Случай 2: Обычный электрон и критический фотон

Для критического фотона ν конечно. Поскольку электрон обычный, $v \to 1$, а $\gamma \to \infty$. Скалярное произведение $(\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}) \neq 1$, поэтому $\nu' \to \infty$.

Пусть в плоском пространстве-времени фотон с частотой ν движется в лабораторной системе отсчёта. Обычный электрон движется со скоростью v относительно этой системы отсчета. Так как $(\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}) \neq 1$, рассмотрим случай ортогонального движения $(\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}) = 0$, тогда из (41): $\nu' = \nu\gamma$.

Так как электрон обычный, то при приближении к горизонту $v \to 1$, при этом $\gamma \to \infty$, что приводит к $\nu' \to \infty$.

В этом случае гравитационное синее смещение даёт конечное увеличение частоты ν для критического фотона. Доплеровский эффект вносит бесконечный вклад из-за ультрарелятивистского движения электрона. Таким образом, результирующая частота ν' определяется именно доплеровским эффектом.

Случай 3. Обе частицы критические.

Критическая частица (электрон или фотон) характеризуется тем, что её энергия и угловой момент связаны соотношением: $E = \omega_H L$, то есть их движение синхронизировано с вращением пространства-времени вблизи горизонта.

Поэтому единичный вектор электрона: $\mathbf{n_1} = \mathbf{v}/v$ не строго перпендикулярен горизонту, а единичный вектор фотона $\mathbf{n_2} = \mathbf{k}/k$ также не радиален, но совпадает по направлению с $\mathbf{n_1}$.

Тогда $(\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}) = 1$, $v < 1$ – в системе, связанной с критическим электроном, поэтому частота фотона ν - конечна. Из (41) следует, что ν' - также конечная величина.

Таким образом, гравитационное синее смещение и эффект Доплера ограничены и не могут привести к возникновению бесконечных энергий в данном случае.

Случай 4. Обе частицы обычные.

Из (15) следует, что $\gamma \sim \dfrac{1}{N}$, а из (37): $\nu \sim \dfrac{1}{N}$.

Из (12), (13), (35), (36): $1 - (\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}) \sim N^2$.

То есть, с учётом (41):

$$\nu' \sim \frac{1}{N^2} \cdot N^2 = 1 = \text{const}$$

Таким образом, расходимости γ и ν при приближении к горизонту "компенсируются" – эффект бесконечного красного смещения, обусловленный эффектом Доплера, для приемника, удаляющегося от фотона, полностью компенсируется бесконечным синим смещением частоты фотона.

Заключение

В работе представлено общее объяснение эффекта бесконечной энергии в системе центра масс для частиц, сталкивающихся вблизи горизонта чёрной дыры. Объяснение основано на кинематике частиц в плоском пространстве-времени и свойствах горизонта, рассмотрено отдельно для массивных и безмассовых частиц.

Для массивных частиц:

- В системе ZAMO обычные частицы достигают скорости света у горизонта, критические частицы имеют скорость, отличную от c.
- Критические частицы падают на горизонт неперпендикулярно (для вращающихся чёрных дыр) и требуют бесконечного собственного времени для достижения горизонта, обычные частицы падают на горизонт строго вдоль радиального направления.
- Столкновение обычной и критической частиц приводит к эффекту BSW.

Для безмассовых частиц:

- Критерий критичности: конечность частоты фотона у горизонта.
- Эффект BSW возможен, только если одна из частиц критическая.
- Классификация случаев:
  - Критический электрон + обычный фотон: $E_{\text{ц.м.}} \to \infty$.
  - Критический фотон + обычный электрон: $E_{\text{ц.м.}} \to \infty$.
  - Две критические частицы: конечная $E_{\text{ц.м.}}$.
  - Две обычные частицы: компенсация эффектов $\to$ конечная $E_{\text{ц.м.}}$.

Список литературы

[1] O. B. Zaslavskii, Phys. Rev. D 84, 024007 (2011).
[2] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. 92, 147 (2010); JETP Lett. 92, 125 (2010).
[3] O. B. Zaslavskii, Phys. Rev. D 82, 083004 (2010).
[4] O. B. Zaslavskii, Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. 92, 635 (2010); JETP Lett. 92, 571 (2010)
[5] A. J. M. Medved, D. Martin, and M. Visser, Phys. Rev. 70, 024009 (2004). [6] M. Ban˜ados, B. Hassanain, J. Silk, and S. M. West, Phys. Rev. D 83, 023004 (2011). [7] A. J. Williams, Phys. Rev. D 83, 123004 (2011). [8] "The Mathematical Theory of Black Holes" by S. Chandrasekhar (1983)