Квазиклассическое описание рождения магнонов в неоднородном магнитном поле

Курсовая работа студента 443 группы
Чиркова Владислава Игоревича
Научный руководитель:
к.ф.-м.н., с.н.с. ОТФ ИЯИ РАН
Сатунин Пётр Сергеевич

14.05.2025

Постановка задачи

Найти ширину рождения магнон-антимагнонных пар в антиферромагнетике помещённом в неоднородное магнитное поле с помощью квазиклассического метода Worldline инстантонов.

Уравнение для Worldline инстантонов:

$$m \frac{\ddot{x}_\mu}{\int_0^1 \dot{x}^2 \, du} = ieF_{\mu\nu}\dot{x}_\nu .$$

Аналогия:

Используем аналогию с эффектом Швингера. Математически совпадает если заменить градиент магнитного поля $\partial_x B$ на электрическое поле E, то есть $E(x) \to -\frac{\partial}{\partial x} B(x)$

Эффект Швингера

Скорость рождения электрон-позитронных пар во внешнем электрическом поле:

$$\Gamma = \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n^2} \exp\left[-\frac{\pi m^2}{eE} n\right].$$

Для случая слабого внешнего поля формула упрощается:

$$\Gamma = \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} e^{-\pi m^2/eE}.$$

Модель

Лагранжиан в квадратичном порядке:

$$\mathcal{L} = f_t^2(D_0\Phi^* D_0\Phi - \Delta\Phi^*\Phi) - f_s^2\delta_{ij}\partial_i\Phi^*\partial_j\Phi$$

$$D_0\Phi = (\partial_0 + iU)\Phi, D_0\Phi^* = (\partial_0 - iU)\Phi^*$$

Здесь $\Delta = m$ - энергетическое расстояние, играет роль массового слагаемого, а константа $v_s = \frac{f_s}{f_t}$ играет роль эффективной скорости света в среде. Кроме того, $U = \mu B$. Связь между магнитным полем и электрическим:

$$E(x) = -\frac{\partial}{\partial x}B(x)$$

Рассмотрим два случая пространственной неоднородности, когда $E = \text{const}$ (в этом случае $B(x) = \beta x$, где $\beta = \partial_x B$ - постоянный градиент магнитного поля) и случай $E = \frac{E_0}{\cosh^2(kx)}$ (что соответствует $B = B_0 \tanh(kx)$).

Пространственно неоднородный случай

Соответствующее волновое уравнение будет являться модификацией уравнения Клейна-Гордона:

$$(D_0^2 - v_s^2 \delta^{ij} \partial_i \partial_j + \Delta^2)\Phi(x) = 0$$

$$D_0 \Phi = (\partial_0 + iU)\Phi, U = \mu B(x)$$

Уравнения движения для Worldline инстантонов в евклидовом пространстве-времени принимают следующий вид:

$$\frac{\ddot{x}_3}{\sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2}} = i\mu\beta v_s \dot{x}_4, \quad \frac{\ddot{x}_4}{\sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2}} = -i\mu\beta v_s \dot{x}_3.$$

Постоянный градиент

Рассматриваем стационарный случай. Перейдем к комплексной переменной $z(u) = x_3(u) + ix_4(u)$. Уравнения сводятся к виду:

$$\ddot{z} = -\mu\beta a v_s \dot{z}.$$

Решение:

$$\dot{z}(u) = Ce^{-i\mu\beta a v_s u}.$$

Интегрируем:

$$z(u) = \frac{C}{i\mu\beta a v_s} e^{-i\mu\beta a v_s u} + D.$$

Учитывая периодичность $z(u+1) = z(u)$, получаем:

$$\mu\beta a v_s = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Таким образом итоговая периодическая константа:

$$a = \frac{2\pi n}{\mu\beta v_s}.$$

Решение

После разделения $z(u)$ на действительную и мнимую части можем получить явный вид траектории:

$$x_3(u) = \frac{m}{\mu\beta v_s}\cos(2\pi nu),$$

$$x_4(u) = \frac{m}{\mu\beta v_s}\sin(2\pi nu).$$

Здесь $n \in \mathbb{Z}^+$, а радиус окружности: $\frac{m}{\mu(\partial_x B)v_s}$.

Инстантонное действие

Подставляем полученные решения в действие:

$$S_0 = mv_s\sqrt{\int_0^1 (\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2) du} + i\mu \int_0^1 B(x)\dot{x}_4 du.$$

После преобразований итоговый ответ выглядит как:

$$S_0 = \frac{2\pi nm^2}{\mu\beta v_s} - i\mu\beta \cdot \left(-\frac{\pi nm^2}{\mu^2\beta^2 v_s}\right) = \frac{\pi nm^2}{\mu\beta v_s}.$$

Экспоненциальное подавление образования магнон-антимагнонных пар с шириной:

$$\operatorname{Im}\Gamma \sim e^{-S_0} \sim \exp\left(-\frac{\pi m^2}{\mu\beta v_s}\right).$$

Инстантонная траектория

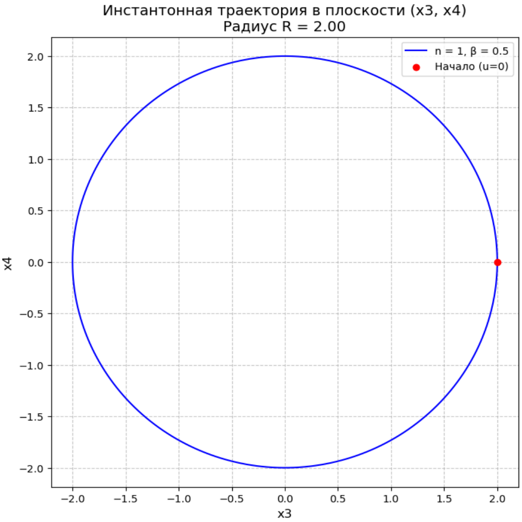

Рис.: Инстантонная траектория в виде окружности в плоскости (x_3, x_4) с радиусом $R = \frac{m}{\mu\beta} = 2$.

Случай гиперболического тангенса

Рассмотрим теперь магнитное поле вида $B(x) = B_0 \tanh(kx)$, проводим те же самые аналогии, только выражения будут менее тривиальными.
Градиент магнитного поля $\partial_x B(x) = B_0 k \operatorname{sech}^2(kx)$ приводит к эффективному электрическому полю:
$E(x) = -\partial_x B(x) = -B_0 k \operatorname{sech}^2(kx)$. Так как $B(x)$ зависит только от x_3, упрощаем:

$$\frac{\ddot{x}_3}{\sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2}} = \frac{i\mu v_s}{m} \partial_{x_3} B(x) \dot{x}_4,$$

$$\frac{\ddot{x}_4}{\sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2}} = -\frac{i\mu v_s}{m} \partial_{x_3} B(x) \dot{x}_3.$$

Решение

Решим эти уравнения по аналогии со случаем постоянного градиента магнитного поля. Введём параметр $\gamma = \frac{mk}{\mu B_0 v_s}$. Сделаем замену переменных:

$$\dot{x}_3 = a v_s \cos\theta(u), \quad \dot{x}_4 = a v_s \sin\theta(u),$$

где $\theta(u)$ — угол, зависящий от u. Тогда:

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\mu B_0 k a v_s}{m} \operatorname{sech}^2(k x_3).$$

Аналитические инстантонные траектории:

$$x_3(u) = \frac{1}{k} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \sin(2\pi n u)\right).$$

$$x_4(u) = \frac{1}{k\sqrt{1-\gamma^2}} \arcsin\left(\gamma \cos(2\pi n u)\right).$$

Периодичность и инстантонное действие

Для замкнутости траектории требуем условие $(x(u+1) = x(u))$, как и в случае постоянного градиента магнитного поля:

$$\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} k a v_s = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Отсюда находим a:

$$a = \frac{2\pi n \gamma}{k v_s \sqrt{1-\gamma^2}}.$$

Подставляем решения в действие:

$$S_0 = m a v_s + i\mu \int_0^1 B(x) \dot{x}_4 du.$$

Итоговое выражение:

$$S_0 = n \frac{\pi m^2}{\mu B_0 v_s} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1-\gamma^2}} \right).$$

Инстантонная траектория

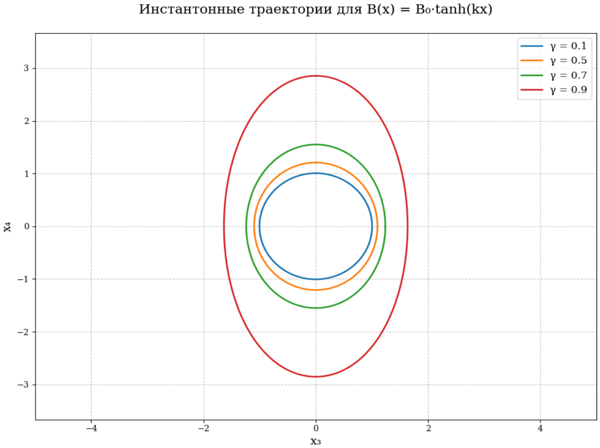

Рис.: Инстантонные траектории в виде овалов в плоскости (x_3, x_4) с разными параметрами γ.

Выводы

1. Постоянный градиент магнитного поля:
а) Инстантонные траектории — окружности в плоскости (x_3, x_4) с радиусом $\frac{m}{\mu\beta}$.
б) Подавление производства пар — сильный градиент β уменьшает S_0, усиливая рождение магнон-антимагнонных пар, аналогично эффекту Швингера в электрическом поле.
2. Случай $B(x) = B_0 \tanh(kx)$:
а) $\gamma \to 0$ (слабая неоднородность) приводит к тому, что $S_0 \to n\frac{\pi m^2}{\mu B_0 v_s}$, а этот результат совпадает с полученным для постоянного градиента магнитного поля.
б) $\gamma \to 1$ приводит к тому, что $S_0 \to \infty$, что означает полное подавление производства пар.
При $\gamma < 1$, пространственная неоднородность уменьшает S_0, увеличивая производство пар по сравнению с постоянным полем. При $\gamma \to 0$ получаем практически окружность единичного радиуса, а при $\gamma \to 1 - 0$ траектория вытягивается вдоль оси x_4, оставаясь при этом замкнутой.