Дипольные моды в теории Хорндески с дополнительным векторным полем над динамическим фоном

Выполнила
студентка 4 курса 443 группы
Бахлова Марина Константиновна.
Научный руководитель:
н.с. ИЯИ РАН, к.ф.-м.н
Волкова Виктория Евгеньевна.

Введение

Один из возможных вариантов расширения теории гравитации Эйнштейна можно получить путём добавления новой степени свободы, отличной от метрики, такой как скалярное поле. Теория Хорндески - наиболее общая теория гравитации с одним скалярным полем, приводящая к уравнениям движения второго порядка.

Наблюдения события GW170817 показали, что $c_{GW} \approx c_\gamma$, что накладывает жесткие ограничения на возможные модифицированные теории гравитации. Чтобы обойти эти ограничения, обратимся к идее компактификации.

Цель работы - получить условия отсутвия нестабильностей для дипольного возмущения, сравнить с результатами для случая больших l.

Действие теории

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4) + \mathcal{L}_{4A_\mu} + \mathcal{L}_{4\varphi} = \\
&\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\, \varphi \Bigg[G_2(\pi,\, X) + G_3(\pi,\, X)\, \Box\pi + G_4(\pi,\, X) \\
&\times \left(R - \frac{1}{4}\varphi^2\, F^2 - 2\frac{\Box\varphi}{\varphi} \right) + G_{4,X}(\pi,\, X) \Bigg((\Box\pi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)^2 \\
&+ 2\,\frac{1}{\varphi}\, \nabla_\mu\varphi \nabla^\mu\pi\, \Box\pi - \frac{1}{2}\varphi^2\, F_\mu^{\ \sigma}\, F_{\nu\sigma}\, \nabla^\mu\pi\, \nabla^\nu\pi \Bigg) \Bigg]
\end{aligned} \tag{1}
$$

Действие теории

$$
\begin{aligned}
&\varphi\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_{5A_\mu} + \mathcal{L}_{5\varphi} = \\
&\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\varphi\,G_5(\pi)\Bigg[\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\,R\right)\nabla_\mu\nabla_\nu\pi - \frac{1}{2\,\varphi}R\,\nabla_\mu\varphi\,\nabla^\mu\pi \\
&+ \frac{1}{\varphi}\left(\Box\varphi\,\Box\pi - \nabla_\mu\nabla_\nu\varphi\nabla^\mu\nabla^\nu\pi\right) + \frac{1}{2}\varphi^2\,F_{\mu\nu}\,\nabla_\sigma F^{\nu\sigma}\,\nabla^\mu\pi \\
&+ \frac{1}{8}\varphi\,F^{\mu\nu}\,F^{\sigma\rho}\Big(3\,g_{\nu\rho}(-4\,g_{\lambda\mu}\,g_{\beta\sigma} + g_{\lambda\beta}\,g_{\mu\sigma})\,\nabla^\lambda\pi\nabla^\beta\varphi \\
&+ \varphi\,g_{\sigma\mu}\,(-4\,\nabla_\nu\nabla_\rho\pi + g_{\rho\nu}\Box\pi)\Big)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Метрика

Рассматривается зависящий от времени сферически-симметричный фон следующего вида:

$$ds^2 = -A(t,r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{B(t,r)} + J^2(t,r)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{3}$$

и возмущения метрики и векторного потенциала:

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu. \tag{4}$$

Параметризация возмущений

Рассмотрим только нечётные моды и их разложение через сферические гармоники $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$:

$$
\begin{aligned}
h_{tt} &= 0, \quad h_{tr} = 0, \quad h_{rr} = 0 \\
h_{ta} &= \sum_{\ell, m} h_{0,\ell m}(t, r) E_{ab} \nabla^b Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \\
h_{ra} &= \sum_{\ell, m} h_{1,\ell m}(t, r) E_{ab} \nabla^b Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \\
h_{ab} &= \frac{1}{2} \sum_{\ell, m} h_{2,\ell m}(t, r) \left[E_a{}^c \nabla_c \nabla_b Y_{\ell m}(\theta, \varphi) + E_b{}^c \nabla_c \nabla_a Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \right]
\end{aligned}
$$

и возмущение векторного потенциала:

$$
\delta A_t = \delta A_r = 0, \quad \delta A_a = \sum_{\ell m} \mathcal{V}_{\ell m}(t, r) E_{ab} \nabla^b Y_\ell^m(\theta, \varphi)
$$

Квадратичное действие

Подставляя линеаризованную метрику в действие, удерживаем члены до второго порядка по возмущениям:

$$S^{(2)}_{h+\nu} = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}r \left\{ a_3 \left[\dot{h}_1 - h_0' + 2\left(\frac{J'}{J} h_0 - \frac{\dot{J}}{J} h_1 \right) \right]^2 + b_1 \left(\nu' h_0 - \dot{\nu} h_1 \right) \right.$$
$$\left. + b_2 \dot{\nu}^2 + b_3 (\nu')^2 + b_4 \dot{\nu}\nu' + 2 b_{5(\ell^2)} \nu^2 + b_{5(m)} \nu^2 \right\} \tag{5}$$

Система уравнений на h_0, h_1

$$
\begin{cases}
\delta h_1: \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[2J^2 a_3\left(-h_0' + 2\dfrac{J'}{J}h_0\right)\right] + b_1 J^2 \dot{\nu} = 0 \\
\delta h_0: \quad 2(a_3 h_0')' - 4\dfrac{(a_3 J J')'}{J^2}h_0 - b_1\nu' = 0
\end{cases}
$$

Решение:

$$
h_0 = \frac{3J_1}{4\pi}J^2 \int \frac{1}{J^4 a_3}\left\{\int b_1 J^2 \dot{\nu}\,\mathrm{d}t + 1\right\}\,\mathrm{d}r + C_2(t)J^2.
$$

Калибровка

Теория инвариантна относительно инфинитезимальных преобразований $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$, выберем

$$\xi_t = \xi_r = 0, \quad \xi_a = \sum_{l,m} \Lambda_{lm}(t,r) E_a^b \nabla_b Y_{lm}$$

с произвольной функцией $\Lambda_{lm}(t,r)$.

При таких инфинитезимальных преобразованиях метрические возмущения изменяются следующим образом:

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$$

Калибровка

Рассмотрим калибровочные преобразования

$$h_0 \to h_0 + \dot{\Lambda} - 2\frac{\dot{J}}{J}\Lambda, \qquad h_1 \to h_1 + \Lambda' - 2\frac{J'}{J}\Lambda.$$

Положим $h_1 \equiv 0$ с помощью фиксации следующего вида:

$$\Lambda' - 2\frac{J'}{J}\Lambda = -h_1.$$

Решение:

$$\Lambda(t,r) = J^2\left(C(t) - \int \frac{h_1(t,r)}{J^2(r)}\,\mathrm{d}r\right),$$

положим $C_2(t)J^2 = 0$

Итоговый вид квадратичного действия

Таким образом, окончательное решение системы на h_0, h_1 имеет вид

$$\begin{cases} h_0 = \dfrac{3J_1}{4\pi} J^2 \displaystyle\int \dfrac{1}{J^4 a_3} \left\{ \int b_1 J^2 \dot{\nu} \, \mathrm{d}t + 1 \right\} \mathrm{d}r \\ h_1 = 0 \end{cases}$$

Подставляя $h_1 = 0$ в квадратичное действие (5), можем переписать его в следующем виде:

$$S^{(2)}_{h+\nu} = \int \mathrm{d}t \, \mathrm{d}r \left\{ a_3 \left[-h_0' + 2\frac{J'}{J} h_0 \right]^2 + b_1 \nu' h_0 + b_2 \dot{\nu}^2 \right.$$
$$\left. + b_3 (\nu')^2 + b_4 \dot{\nu} \nu' + 2 b_{5(\ell^2)} \nu^2 + b_{5(m)} \nu^2 \right\}, \qquad (6)$$

Исследование на устойчивость

Условие отсутствия духовых неустойчивостей $b_2 > 0$ или, что то же самое,

$$F > 0. \tag{7}$$

Дисперсионное соотношение:

$$b_2 w^2 - b_4 w k + b_3 k^2 + 2(2b_{5(\ell^2)} + b_{5(m)}) = 0,$$

Скорости распространения электромагнитных волн

Скорость в радиальном направлении:

$$C_r^{\pm} = \sqrt{\frac{B}{A} \cdot \frac{J}{F}} \pm \frac{1}{F}\sqrt{GF + \frac{B}{A}J^2},$$

условие отсутствия градиентных нестабильностей в радиальном направлении:

$$GF + \frac{B}{A}J^2 > 0. \tag{8}$$

Итоги

Обобщая написанное выше, сформулируем полный набор условий устойчивости дипольных мод возмущений:

$$F > 0, \qquad GF + \frac{B}{A}J^2 > 0.$$

$$C_r^{\pm} = \sqrt{\frac{B}{A} \cdot \frac{J}{F}} \pm \frac{1}{F}\sqrt{GF + \frac{B}{A}J^2}$$

Результат согласуется с расчетами, проведенными для случая $l \geq 2$.