Монопольные возмущения и их устойчивость над динамическим фоном в расширенной теории Хорндески

Выполнил:
студент 4 курса 443 группы
Киселев Кирилл
Научные руководитель:
н.с. ИЯИ РАН, к.ф.-м.н.,
Волкова Виктория Евгеньевна

Действие теории

Рассмотрим теорию beyond Horndeski со следующим действием:

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \left(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_{\mathcal{BH}}^{(4)} \right), \tag{1a}$$

$$\mathcal{L}_2 = F(\pi, X), \tag{1b}$$

$$\mathcal{L}_3 = -K(\pi, X)\Box\pi, \tag{1c}$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\pi, X)R + G_{4X}(\pi, X)\left[(\Box\pi)^2 - \pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}\right], \tag{1d}$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\pi, X)G^{\mu\nu}\pi_{;\mu\nu} - \frac{1}{6}G_{5X}\left[(\Box\pi)^3 - 3\Box\pi\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu} + 2\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\rho}\pi_{\rho}^{;\nu}\right], \tag{1e}$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{BH}}^{(4)} = -2F_4(\pi, X)\left(X\left[(\Box\pi)^2 - \pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}\right] + \left[\pi^{,\mu}\pi_{;\mu\nu}\pi^{,\nu}\Box\pi - \pi^{,\mu}\pi_{;\mu\lambda}\pi^{;\nu\lambda}\pi_{,\nu}\right]\right). \tag{1f}$$

где π – скалярное поле; R и $G^{\mu\nu}$ - скаляр Риччи и тензор Эйнштейна; F, K, G_4, G_5 и F_4 - произвольные функции скалярного поля π и

$$X = -\frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\pi_{,\mu}\pi_{,\nu},$$

где $\pi_{,\mu} = \partial_\mu \pi$, $\pi_{;\mu\nu} = \nabla_\nu\nabla_\mu\pi$, $\Box\pi = g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu\pi$, $G_{iX} = \partial G_i/\partial X$.

Метрика

Динамический сферически–симметричный фон с метрикой:

$$ds^2 = -A(t,r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{B(t,r)} + J^2(t,r)\gamma_{ab}dx^a dx^b, \quad (2)$$

где $\gamma_{ab} = \mathrm{diag}(1, \sin^2\theta)$ и $a, b = \theta, \varphi$; $A(t,r), B(t,r)$ и $J(t,r)$ - произвольные функции времени и радиальной координаты.

Метрика

Динамический сферически–симметричный фон с метрикой:

$$ds^2 = -A(t,r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{B(t,r)} + J^2(t,r)\gamma_{ab}dx^a dx^b, \tag{2}$$

где $\gamma_{ab} = \mathrm{diag}(1, \sin^2\theta)$ и $a, b = \theta, \varphi$; $A(t,r), B(t,r)$ и $J(t,r)$ - произвольные функции времени и радиальной координаты.
Рассмотрим возмущённую метрику:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

где $\bar{g}_{\mu\nu}$ – введённая ранее фоновая метрика (2),
а $h_{\mu\nu}$ – возмущение.

Параметризация возмущений

Разложим возмущения по сферическим гармоникам в четном секторе, согласно формализму Редже-Уиллера:

$$
h_{\mu\nu}^{\text{even parity}}
\begin{cases}
h_{tt} = A(t,r) \sum\limits_{\ell,m} H_{0,\ell m}(t,r) Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\
h_{tr} = \sum\limits_{\ell,m} H_{1,\ell m}(t,r) Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\
h_{rr} = \dfrac{1}{B(t,r)} \sum\limits_{\ell,m} H_{2,\ell m}(t,r) Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\
h_{ta} = \sum\limits_{\ell,m} \beta_{\ell m}(t,r) \partial_a Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\
h_{ra} = \sum\limits_{\ell,m} \alpha_{\ell m}(t,r) \partial_a Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\
h_{ab} = \sum\limits_{\ell,m} K_{\ell m}(t,r) g_{ab} Y_{\ell m}(\theta,\varphi) + \sum\limits_{\ell,m} G_{\ell m}(t,r) \nabla_a \nabla_b Y_{\ell m}(\theta,\varphi).
\end{cases}
$$

Параметризация возмущений

Возмущения скалярного поля существуют только в четном секторе и также раскладываются по сферическим гармоникам

$$\pi(t, r, \theta, \varphi) = \pi(t, r) + \sum_{\ell,m} \chi_{\ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \qquad (3)$$

где $\pi(t, r)$ - сферически–симметричное фоновое поле.

Параметризация возмущений

Возмущения скалярного поля существуют только в четном секторе и также раскладываются по сферическим гармоникам

$$\pi(t, r, \theta, \varphi) = \pi(t, r) + \sum_{\ell, m} \chi_{\ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \tag{3}$$

где $\pi(t, r)$ - сферически–симметричное фоновое поле.

Моды с разными ℓ и m не смешиваются на линейном уровне!

Калибровочные преобразования

Теория инвариантна относительно замены локальной системы координат

$$x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$$

При таких преобразованиях возмущения метрики и скалярного поля изменяются

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu,$$
$$\chi_{\ell m} Y_{\ell m} \to \chi_{\ell m} Y_{\ell m} + \xi^\mu \partial_\mu \pi(t, r)$$

Калибровочные преобразования

Удобно, в качестве произвольного вектора ξ_μ выбрать

$$\xi_\mu \begin{cases} \xi_t = \sum\limits_{\ell,m} T_{\ell m}(t,r) Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\ \xi_r = \sum\limits_{\ell,m} R_{\ell m}(t,r) Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\ \xi_a = \sum\limits_{\ell,m} \Theta_{\ell m}(t,r) \partial_a Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \end{cases}$$

где $a = \theta, \varphi$; $T_{\ell m}(t,r)$, $R_{\ell m}(t,r)$ и $\Theta_{\ell m}(t,r)$ – произвольные функции от t и r.

Калибровочные преобразования

$$
\begin{aligned}
H_{0,\ell m} &\to H_{0,\ell m} + 2\frac{\dot{T}_{\ell m}}{A} - \frac{A' B}{A} R_{\ell m} - \frac{\dot{A}}{A^2} T_{\ell m}, \\
H_{1,\ell m} &\to H_{1,\ell m} + \dot{R}_{\ell m} + T'_{\ell m} - \frac{A'}{A} T_{\ell m} - \frac{\dot{B}}{B} R_{\ell m}, \\
H_{2,\ell m} &\to H_{2,\ell m} + 2BR'_{\ell m} + B' R_{\ell m} + \frac{\dot{B}}{AB} T_{\ell m}, \\
\beta_{\ell m} &\to \beta_{\ell m} + T_{\ell m} + \dot{\Theta}_{\ell m} - 2\frac{\dot{J}}{J}\Theta_{\ell m}, \\
\alpha_{\ell m} &\to \alpha_{\ell m} + R_{\ell m} + \Theta'_{\ell m} - 2\frac{J'}{J}\Theta_{\ell m}, \\
K_{\ell m} &\to K_{\ell m} + 2\frac{BJ'}{J} R_{\ell m} - 2\frac{\dot{J}}{AJ} T_{\ell m}, \\
G_{\ell m} &\to G_{\ell m} + 2\Theta_{\ell m}. \\
\chi_{\ell m} &\to \chi_{\ell m} + B\pi'(t,r) R_{\ell m} - \frac{T_{\ell m}}{A}\dot{\pi}(t,r)
\end{aligned}
$$

Калибровочные преобразования

Зафиксируем калибровку

$$K = G = \chi = 0$$

Квадратичное действие

Тогда квадратичное действие принимает вид:

$$S^{(2)}_{even,dyn} = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}r \Bigg(n_0 H_0^2 + H_0 \Big[a_3 H_2' + j^2 a_4 \alpha' + \left(a_7 + j^2 a_8\right) H_2 + j^2 a_9 \alpha + n_1 \dot{H}_1$$
$$+ n_2 H_1 + n_3 \dot{H}_2 + j^2 n_4 \dot{\alpha} + j^2 n_5 \dot{\beta} + j^2 n_6 \beta' + j^2 n_7 \beta \Big] + H_1 \Big[b_4 \dot{H}_2 + j^2 b_5 \dot{\alpha}$$
$$+ j^2 b_{10} \beta' + j^2 b_{11} \beta + n_8 H_2' + n_9 H_2 + j^2 n_{10} \alpha' + j^2 n_{11} \alpha + j^2 n_{12} \dot{\beta} + n_{13} H_0' \Big]$$
$$+ j^2 b_1 H_1^2 + c_6 H_2^2 + H_2 \Big[j^2 c_5 \alpha + j^2 n_{14} \alpha' + j^2 n_{15} \dot{\alpha} \Big] + j^2 d_1 \dot{\alpha}^2 + j^2 d_4 \alpha^2$$
$$+ j^2 d_8 \dot{\alpha}' \beta + j^2 d_9 \dot{\alpha} \beta + j^2 p_1 (\beta')^2 + j^2 p_2 \beta^2$$
$$+ j^2 c_{14} \dot{H}_2 \beta + j^2 n_{16} \beta \alpha' + j^2 n_{17} \beta \alpha + j^2 n_{18} \beta H_2' + j^2 n_{19} \beta H_2 \Bigg) \qquad (4)$$

где индексы ℓ, m опущены, $j^2 = \ell(\ell+1)$, и взяты интегралы по θ и φ.

Монопольные возмущения

Остановимся подробнее на рассмотрении монопольных возмущений

Монопольные возмущения

Остановимся подробнее на рассмотрении монопольных возмущений

$\ell = 0 \;\Rightarrow\; m = j^2 = 0$

Монопольные возмущения

Остановимся подробнее на рассмотрении монопольных возмущений

$\ell = 0 \;\Rightarrow\; m = j^2 = 0$

$Y_{00} = \text{const} \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = 0$

Монопольные возмущения

Остановимся подробнее на рассмотрении монопольных возмущений

$\ell = 0 \;\Rightarrow\; m = j^2 = 0$

$Y_{00} = \text{const} \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = 0$

Квадратичное действие для монопольных возмущений:

$$S^{(2)}_{l=0} = \int drdt \left[n_0 H_0^2 + H_0 \left(a_3 H_2' + a_7 H_2 + n_1 \dot{H}_1 + n_2 H_1 + n_3 \dot{H}_2 \right) \right. \\ \left. + H_1 \left(b_4 \dot{H}_2 + n_8 H_2' + n_9 H_2 + n_{13} H_0' \right) + c_6 H_2^2 \right] \quad (5)$$

Монопольные возмущения

Вариация действия (5) по H_0 приведет к уравнению связи:

$$H_0 = -\frac{1}{2n_0}\left(a_7 H_2 + n_1 \dot{H}_1 + n_2 H_1 + n_3 \dot{H}_2 + a_3 H_2' - n_{13} H_1' - H_1 n_{13}'\right)$$

Монопольные возмущения

В полученном действии обратим внимание на кинетические члены

$$S^{(2)}_{l=0} = \int drdt \left[-\frac{n_1^2}{4n_0}\dot{H}_1^2 - \frac{n_3^2}{4n_0}\dot{H}_2^2 - \frac{n_1 n_3}{2n_0}\dot{H}_1\dot{H}_2 + \dots \right] \tag{6}$$

Монопольные возмущения

В полученном действии обратим внимание на кинетические члены

$$S^{(2)}_{l=0} = \int drdt \left[-\frac{n_1^2}{4n_0}\dot{H}_1^2 - \frac{n_3^2}{4n_0}\dot{H}_2^2 - \frac{n_1 n_3}{2n_0}\dot{H}_1\dot{H}_2 + \dots \right] \tag{6}$$

Кинетические члены образуют квадратичную форму с вырожденной матрицей

$$K = -\frac{1}{4n_0}\begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix}$$

Монопольные возмущения

В полученном действии обратим внимание на кинетические члены

$$S^{(2)}_{l=0} = \int drdt \left[-\frac{n_1^2}{4n_0}\dot{H}_1^2 - \frac{n_3^2}{4n_0}\dot{H}_2^2 - \frac{n_1 n_3}{2n_0}\dot{H}_1\dot{H}_2 + ... \right] \tag{6}$$

Кинетические члены образуют квадратичную форму с вырожденной матрицей

$$K = -\frac{1}{4n_0}\begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix}$$

Значит, можно совершить замену, которая оставит только одну динамическую переменную

$$H_2 = \Psi - \frac{n_1}{n_3}H_1$$

Монопольные возмущения

Действие (6) в терминах Ψ и H_1 перепишется в виде:

$$S^{(2)}_{l=0} = \int \mathrm{d}r\mathrm{d}t \Big[- q_1 \dot{\Psi}^2 - q_2 \Psi'^2 - q_3 H_1'^2 + q_4 \Psi' H_1' + q_5 H_1' \dot{\Psi} - q_6 \Psi' \dot{\Psi}$$

$$+ q_{11} H_1 \dot{\Psi} + q_{13} H_1 \Psi' + q_{14} \Psi^2 + q_{15} \Psi H_1 + q_{16} H_1^2 \Big]$$

Монопольные возмущения

Заметим, что при выполнении равенства на коэффициенты:

$$\frac{b_4}{n_3} + \frac{a_7 n_1}{2 n_0 n_3} - \frac{n_8}{a_3} + \frac{a_7 n_{13}}{2 n_0 a_3} = 0$$

Монопольные возмущения

Заметим, что при выполнении равенства на коэффициенты:

$$\frac{b_4}{n_3} + \frac{a_7 n_1}{2n_0 n_3} - \frac{n_8}{a_3} + \frac{a_7 n_{13}}{2n_0 a_3} = 0$$

Действие может быть переписано в виде:

$$S^{(2)}_{l=0} = \int \mathrm{d}r\mathrm{d}t \Bigg[-\left(\alpha_1 \dot{\Psi} + \alpha_2 \Psi' - \alpha_3 H_1' - \alpha H_1\right)^2 + q_{14}\Psi^2 + q_{15}\Psi H_1 + \tilde{q}_{16} H_1^2 \Bigg] \tag{7}$$

где $\alpha_i = \sqrt{q_i}, i = \overline{1,3}$; $\alpha = \frac{q_{11}}{2\sqrt{q_1}} = \frac{q_{13}}{2\sqrt{q_2}}$; $\tilde{q}_{16} = q_{16} - \frac{(\alpha\alpha_3)'}{2}$

Монопольные возмущения

Используя вспомогательное поле Q, действие (7) можно записать как:

$$S^{(2)}_{l=0} = \int \mathrm{d}r\mathrm{d}t \Bigg[- \left[2Q \left(\alpha_1 \dot{\Psi} + \alpha_2 \Psi' - \alpha_3 H_1' - \alpha H_1 \right) - Q^2 \right] + q_{14} \Psi^2 + q_{15} \Psi H_1 + \tilde{q}_{16} H_1^2 \Bigg] \quad (8)$$

Монопольные возмущения

Вариация действия (8) по переменным Ψ и H_1 приведет к системе уравнений:

$$\begin{cases} \delta\Psi : & 2\alpha_1\dot{Q} + 2\alpha_2 Q' + (2\dot{\alpha}_1 + 2\alpha_2')Q + 2q_{14}\Psi + q_{15}H_1 = 0 \\ \delta H_1 : & 2\alpha_3 Q' + (2\alpha_3' - 2\alpha)Q - q_{15}\Psi - 2\tilde{q}_{16}H_1 = 0 \end{cases}$$

Решаем систему (17) относительно Ψ и H_1 и получим:

$$H_1 = -\beta_1\dot{Q} - \beta_2 Q' - \beta_0 Q$$

$$\Psi = \gamma_1\dot{Q} + \gamma_2 Q' + \gamma_0 Q$$

Монопольные возмущения

Окончательно имеем действие в терминах одной переменной Q:

$$S^{(2)}_{l=0} = \int \mathrm{d}r\mathrm{d}t \left[\mathcal{K}_0 \dot{Q}^2 - \mathcal{G}_0 Q'^2 + \mathcal{P}_0 \dot{Q} Q' - \mathcal{M}_0 Q^2 \right] \tag{9}$$

Монопольные возмущения

Окончательно имеем действие в терминах одной переменной Q:

$$S^{(2)}_{l=0} = \int \mathrm{d}r\mathrm{d}t \left[\mathcal{K}_0 \dot{Q}^2 - \mathcal{G}_0 Q'^2 + \mathcal{P}_0 \dot{Q} Q' - \mathcal{M}_0 Q^2 \right] \tag{9}$$

Используя высокочастотное приближение, можно получить уравнение движения

$$-\mathcal{K}_0 \ddot{Q} + \mathcal{G}_0 Q'' - 2\mathcal{P}_0 \dot{Q}' - \mathcal{M}_0 Q = 0$$

Откуда немедленно следует дисперсионное соотношение

$$\mathcal{K}_0 \omega^2 = \mathcal{G}_0 k^2 + 2\mathcal{P}_0 k\omega + \mathcal{M}_0$$

Монопольные возмущения

Дисперсионное соотношение

$$\mathcal{K}_0\omega^2 = \mathcal{G}_0 k^2 + 2\mathcal{P}_0 k\omega + \mathcal{M}_0$$

Из дисперсионного соотношения можно получить условие на отсутствие духовых неустойчивостей

$$\mathcal{K}_0 > 0 \;\Rightarrow\; q_1\tilde{q}_{16}\left(4q_{14}\tilde{q}_{16} + q_{15}^2(2q_{15}^2 - 8q_{14} - 1)\right) > 0$$

Монопольные возмущения

Также, полагая $\omega = c_r k$, найдем скорости распространения возмущений вдоль радиального направления.

$$c_r^{\pm} = \frac{\mathcal{P}_0 \pm \sqrt{\mathcal{P}_0^2 + \mathcal{G}_0 \mathcal{K}_0}}{\mathcal{K}_0} \tag{10}$$

где c_r^+ и c_r^- скорости распространения возмущений вдоль и против радиальной координаты соответственно.

Для обеспечения отсутствия радиально-градиентных нестабильностей необходимо, чтобы скорости $c_r^{\pm}$ были действительны, что приводит к условию

$$\mathcal{P}_0^2 + \mathcal{G}_0 \mathcal{K}_0 > 0 \tag{11}$$

Заключение

В ходе работы было сделано:

- Получены калибровочные преобразования для метрических возмущений в случае динамической сферически–симметричной фоновой метрики.
- Отрешаны связи в квадратичном действии для монопольных возмущений. Получено действие, содержащие только одну переменную:

$$S^{(2)}_{l=0} = \int \mathrm{d}r\mathrm{d}t \left[\mathcal{K}_0 \dot{Q}^2 - \mathcal{G}_0 Q'^2 + \mathcal{P}_0 \dot{Q} Q' - \mathcal{M}_0 Q^2 \right]$$

Заключение

Получено дисперсионное соотношение в высокочастотном приближении, на основании которого были посчитаны радиальные скорости распространения возмущений и условия отсутствия неустойчивостей:

$$\mathcal{K}_0\omega^2 = \mathcal{G}_0 k^2 + 2\mathcal{P}_0 k\omega + \mathcal{M}_0$$

$$c_r^{\pm} = \frac{\mathcal{P}_0 \pm \sqrt{\mathcal{P}_0^2 + \mathcal{G}_0\mathcal{K}_0}}{\mathcal{K}_0}$$

$$\mathcal{K}_0 > 0, \quad \mathcal{P}_0^2 + \mathcal{G}_0\mathcal{K}_0 > 0$$

Дополнительный слайд

Действие после подстановки H_0:

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{l=0} = \int drdt \Bigg[& \left(c_6 - \frac{a_7^2}{4n_0}\right) H_2^2 + \left(b_4 - \frac{n_2 n_3}{2n_0} + \frac{n_3 n_{13} n_0'}{2n_0^2} - \frac{n_{13} n_3'}{2n_0}\right) \dot{H}_2 H_1 \\
& - \frac{a_7 n_1}{2n_0} \dot{H}_1 H_2 - \frac{n_1^2}{4n_0} \dot{H}_1{}^2 + \left(-\frac{a_7 n_2}{2n_0} + n_9 - \frac{n_{13} a_7'}{2n_0} + \frac{a_7 n_{13} n_0'}{2n_0^2}\right) H_1 H_2 \\
& + \left(-\frac{n_1 n_2}{2n_0} + \frac{n_1 n_{13} n_0'}{2n_0^2} - \frac{n_{13} n_1'}{2n_0}\right) \dot{H}_1 H_1 + \left(-\frac{n_2^2}{4n_0} + \frac{n_2 n_{13} n_0'}{2n_0^2} - \frac{n_{13} n_2'}{2n_0}\right. \\
& \left. - \frac{n_{13} n_0' n_{13}'}{2n_0^2} + \frac{n_{13}'^2}{4n_0} + \frac{n_{13} n_{13}''}{2n_0}\right) H_1^2 - \frac{a_7 n_3}{2n_0} \dot{H}_2 H_2 - \frac{n_1 n_3}{2n_0} \dot{H}_1 \dot{H}_2 \\
& - \frac{n_3^2}{4n_0} \dot{H}_2{}^2 + \left(-\frac{n_2 n_{13}}{2n_0} + \frac{n_{13} n_{13}'}{2n_0}\right) H_1' H_1 - \frac{n_{13}^2}{4n_0} H_1'^2 - \frac{a_3 a_7}{2n_0} H_2' H_2 \\
& - \frac{a_3 n_1}{2n_0} \dot{H}_1 H_2' + \left(-\frac{a_3 n_2}{2n_0} + n_8 - \frac{a_7 n_{13}}{2n_0} - \frac{n_{13} a_3'}{2n_0} + \frac{a_3 n_{13} n_0'}{2n_0^2}\right) H_1 H_2' \\
& - \frac{a_3 n_3}{2n_0} \dot{H}_2 H_2' - \frac{a_3^2}{4n_0} H_2'^2 - \frac{n_1 n_{13}}{2n_0} \dot{H}_1{}' H_1 - \frac{n_3 n_{13}}{2n_0} \dot{H}_2{}' H_1 - \frac{a_3 n_{13}}{2n_0} H_2'' H_1 \Bigg]
\end{aligned}
$$

Дополнительный слайд

Коэффициенты:

$$q_1 = \frac{n_3^2}{4n_0} \tag{12}$$

$$q_2 = \frac{a_3^2}{4n_0} \tag{13}$$

$$q_3 = \left(\frac{a_3^2 n_1^2}{4n_0 n_3^2} + \frac{a_3 n_1 n_{13}}{2n_0 n_3} + \frac{n_{13}^2}{4n_0} \right) = \frac{1}{4n_0} \left(\frac{a_3 n_1}{n_3} + n_{13} \right)^2 \tag{14}$$

$$q_4 = \left(\frac{a_3^2 n_1}{2n_0 n_3} + \frac{a_3 n_{13}}{2n_0} \right) \tag{15}$$

$$q_5 = \left(\frac{a_3 n_1}{2n_0} + \frac{n_3 n_{13}}{2n_0} \right) \tag{16}$$

$$q_6 = \frac{a_3 n_3}{2n_0} \tag{17}$$

Дополнительный слайд

$$q_{11} = \left(b_4 + \frac{a_7 n_1}{2n_0} - \frac{n_2 n_3}{2n_0} + \frac{a_3 n_1'}{2n_0} - \frac{a_3 n_1 n_3'}{2n_0 n_3} + \frac{n_3 \dot{n}_1}{2n_0} - \frac{n_1 \dot{n}_3}{2n_0} + \frac{n_3 n_{13}'}{2n_0}\right) \tag{18}$$

$$q_{13} = \left(-\frac{a_3 n_2}{2n_0} + n_8 - \frac{a_7 n_{13}}{2n_0} + \frac{a_3 n_{13}'}{2n_0} + \frac{a_3^2 (n_1' - \frac{n_1 n_3'}{n_3})}{2n_0 n_3} + \frac{a_3 (\dot{n}_1 - \frac{n_1 \dot{n}_3}{n_3})}{2n_0}\right) \tag{19}$$

$$q_{14} = \left(c_6 - \frac{a_7^2}{4n_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{a_3 a_7}{2n_0}\right)' + \frac{1}{2}\left(\dot{\frac{a_7 n_3}{2n_0}}\right)\right) \tag{20}$$

$$\begin{aligned} q_{15} = \Bigg[& -\frac{a_7 n_2}{2n_0} - \frac{2c_6 n_1}{n_3} + \frac{a_7^2 n_1}{2n_0 n_3} + n_9 - \frac{n_{13} a_7' - a_7 n_{13} \frac{n_0'}{n_0}}{2n_0} + \frac{a_3 a_7}{2n_0 n_3}\left(n_1' - \frac{n_1 n_3'}{n_3}\right) \\ & + \frac{a_7}{2n_0}\left(\dot{n}_1 - \frac{n_1 \dot{n}_3}{n_3}\right) - \left(\frac{a_3 a_7 n_1}{2n_0 n_3}\right)' \Bigg] \end{aligned} \tag{21}$$

Дополнительный слайд

$$
\begin{aligned}
q_{16} = \Bigg[& -\frac{n_2^2}{4n_0} + \frac{c_6 n_1^2}{n_3^2} - \frac{a_7^2 n_1^2}{4n_0 n_3^2} + \frac{a_7 n_1 n_2}{2n_0 n_3} - \frac{n_1 n_9}{n_3} + \frac{n_1 n_{13} a_7'}{2n_0 n_3} + \frac{n_2 n_{13} n_0'}{2n_0^2} \\
& - \frac{a_7 n_1 n_{13} n_0'}{2n_0^2 n_3} - \frac{a_3 a_7 n_1 n_1'}{2n_0 n_3^2} + \frac{a_3 n_2 n_1'}{2n_0 n_3} - \frac{n_8 n_1'}{n_3} + \frac{a_7 n_{13} n_1'}{2n_0 n_3} + \frac{n_{13} a_3' n_1'}{2n_0 n_3} - \frac{a_3 n_{13} n_0' n_1'}{2n_0^2 n_3} \\
& - \frac{a_3^2 n_1'^2}{4n_0 n_3^2} - \frac{n_{13} n_2'}{2n_0} + \frac{a_3 a_7 n_1^2 n_3'}{2n_0 n_3^3} - \frac{a_3 n_1 n_2 n_3'}{2n_0 n_3^2} + \frac{n_1 n_8 n_3'}{n_3^2} - \frac{a_7 n_1 n_{13} n_3'}{2n_0 n_3^2} - \frac{n_1 n_{13} a_3' n_3'}{2n_0 n_3^2} \\
& + \frac{a_3 n_1 n_{13} n_0' n_3'}{2n_0^2 n_3^2} + \frac{a_3^2 n_1 n_1' n_3'}{2n_0 n_3^3} - \frac{a_3 n_{13} n_1' n_3'}{n_0 n_3^2} - \frac{a_3^2 n_1^2 n_3'^2}{4n_0 n_3^4} + \frac{a_3 n_1 n_{13} n_3'^2}{n_0 n_3^3} - \frac{n_{13} n_0' n_{13}'}{2n_0^2} + \frac{n_{13}'^2}{4n_0} \\
& + \frac{a_3 n_{13} n_1''}{2n_0 n_3} - \frac{a_3 n_1 n_{13} n_3''}{2n_0 n_3^2} + \frac{n_{13} n_{13}''}{2n_0} + \frac{n_2 \dot{n}_1}{2n_0} - \frac{b_4 \dot{n}_1}{n_3} - \frac{a_7 n_1 \dot{n}_1}{2n_0 n_3} - \frac{n_{13} n_0' \dot{n}_1}{2n_0^2} \\
& - \frac{a_3 n_1' \dot{n}_1}{2n_0 n_3} + \frac{a_3 n_1 n_3' \dot{n}_1}{2n_0 n_3^2} - \frac{n_{13} n_1' \dot{n}_3}{2n_0 n_3} - \frac{\dot{n}_1^2}{4n_0} + \frac{b_4 n_1 \dot{n}_3}{n_3^2} + \frac{a_7 n_1^2 \dot{n}_3}{2n_0 n_3^2} - \frac{n_1 n_2 \dot{n}_3}{2n_0 n_3} \\
& + \frac{n_1 n_{13} n_0' \dot{n}_3}{2n_0^2 n_3} + \frac{a_3 n_1 n_1' \dot{n}_3}{2n_0 n_3^2} - \frac{a_3 n_1^2 n_3' \dot{n}_3}{2n_0 n_3^3} + \frac{n_1 n_{13} n_3' \dot{n}_3}{2n_0 n_3^2} + \frac{n_1 \dot{n}_1 \dot{n}_3}{2n_0 n_3} - \frac{n_1^2 \dot{n}_3^2}{4n_0 n_3^2} \\
& + \frac{n_{13} \dot{n}_1'}{2n_0} - \frac{n_1 n_{13} \dot{n}_3'}{2n_0 n_3} - \frac{\dot{q}_9}{2} - \frac{q_{10}'}{2} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Дополнительный слайд

$$\beta_1 = \frac{2\alpha_1}{q_{15}(q_{15}^2 - 4q_{14}\tilde{q}_{16})} \quad (23)$$

$$\beta_2 = \frac{2\alpha_2 q_{15} + 4q_{14}\alpha_3}{q_{15}^2(q_{15}^2 - 4q_{14}\tilde{q}_{16})} \quad (24)$$

$$\beta_0 = \frac{2\dot{\alpha}_1 q_{15} + 2\alpha_2' q_{15} + 4q_{14}(\alpha_3' - \alpha)}{q_{15}^2(q_{15}^2 - 4q_{14}\tilde{q}_{16})} \quad (25)$$

$$\gamma_1 = \frac{2\tilde{q}_{16}\beta_1}{q_{15}} \quad (26)$$

$$\gamma_2 = \frac{2\alpha_3 + 2\tilde{q}_{16}\beta_2}{q_{15}} \quad (27)$$

$$\gamma_0 = \frac{2\alpha - 2\alpha_3' + 2\tilde{q}_{16}\beta_0}{q_{15}} \quad (28)$$

Дополнительный слайд

$$\mathcal{K}_0 = \left(\tilde{q}_{16}\beta_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1 - q_{15}\beta_1\gamma_1 + q_{14}\gamma_1^2\right) \tag{29}$$

$$\mathcal{G}_0 = -\left(2\alpha_3\beta_2 + \tilde{q}_{16}\beta_2^2 + 2\alpha_2\gamma_2 - q_{15}\beta_2\gamma_2 + q_{14}\gamma_2^2\right) \tag{30}$$

$$\mathcal{P}_0 = (2\alpha_3\beta_1 + 2\tilde{q}_{16}\beta_1\beta_2 + 2\alpha_2\gamma_1 - q_{15}\beta_2\gamma_1 + 2\alpha_1\gamma_2 - q_{15}\beta_1\gamma_2 + 2q_{14}\gamma_1\gamma_2) \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0 = -\Big[&1 - 2\alpha\beta_0 + \tilde{q}_{16}\beta_0^2 - q_{15}\beta_0\gamma_0 + q_{14}\gamma_0^2 + \beta_2\alpha' - \gamma_0\gamma_2 q_{14}' + \frac{1}{2}\beta_2\gamma_0 q_{15}' + \frac{1}{2}\beta_0\gamma_2 q_{15}' \\ &-\beta_0\beta_2\tilde{q}_{16}' + \gamma_0\alpha_2' + \beta_0\alpha_3' - \alpha_3\beta_0' - \tilde{q}_{16}\beta_2\beta_0' + \frac{1}{2}q_{15}\gamma_2\beta_0' + \alpha\beta_2' - \tilde{q}_{16}\beta_0\beta_2' + \frac{1}{2}q_{15}\gamma_0\beta_2' \\ &-\alpha_3'\beta_2' - \alpha_2\gamma_0' + \frac{1}{2}q_{15}\beta_2\gamma_0' - q_{14}\gamma_2\gamma_0' + \frac{1}{2}q_{15}\beta_0\gamma_2' - q_{14}\gamma_0\gamma_2' - \alpha_2'\gamma_2' - \gamma_2\alpha_2'' - \beta_2\alpha_3'' \\ &+\beta_1\dot{\alpha} - \gamma_0\gamma_1\dot{q}_{14} + \frac{1}{2}\beta_1\gamma_0\dot{q}_{15} + \frac{1}{2}\beta_0\gamma_1\dot{q}_{15} - \beta_0\beta_1\dot{q}_{16} + \gamma_0\dot{\alpha}_1 - \gamma_2'\dot{\alpha}_1 - \tilde{q}_{16}\beta_1\dot{\beta}_0 + \frac{1}{2}q_{15}\gamma_1\dot{\beta}_0 \\ &+\alpha\dot{\beta}_1 - \tilde{q}_{16}\beta_0\dot{\beta}_1 + \frac{1}{2}q_{15}\gamma_0\dot{\beta}_1 - \alpha_3'\dot{\beta}_1 - \alpha_1\dot{\gamma}_0 + \frac{1}{2}q_{15}\beta_1\dot{\gamma}_0 - q_{14}\gamma_1\dot{\gamma}_0 + \frac{1}{2}q_{15}\beta_0\dot{\gamma}_1 - q_{14}\gamma_0\dot{\gamma}_1 \\ &-\alpha_2'\dot{\gamma}_1 - \dot{\alpha}_1\dot{\gamma}_1 - \gamma_2\dot{\alpha}_1' - \gamma_1\dot{\alpha}_2' - \beta_1\dot{\alpha}_3' - \gamma_1\ddot{\alpha}_1\Big]\end{aligned} \tag{32}$$

Дополнительный слайд